

VISOKO UČILIŠTE VERN

**VISOKA ŠKOLA ZA EKONOMIJU PODUZETNIŠTVA
S PRAVOM JAVNOSTI**

Zagreb, Trg bana Josipa Jelačića 3

**KVANITATIVNE METODE
U EKONOMIJI PODUZETNIŠTVA**

**Autori: Izv. prof. dr. sc. Elizabeta Kovač Striko
Prof. dr. sc. Vjeran Hari**

U Zagrebu, 2004.

Sadržaj

1	Matrice	5
1.1	Definicija i primjeri	5
1.2	Matrice posebnog oblika	8
1.3	Osnovne operacije na matricama	10
1.3.1	Zbrajanje matrica	10
1.3.2	Množenje matrice sa skalarom	11
1.3.3	Množenje matrica	17
1.3.4	Transponiranje matrica	25
1.3.5	Primjena matrica u gospodarstvu	33
1.4	Reducirani oblik matrice	40
1.4.1	Metoda za dobivanje reduciranog oblika matrice	40
1.4.2	Svojstva reduciranog oblika matrice	42
1.4.3	Inverzna matrica	45
1.4.4	Primjeri iz gospodarstva	54
1.5	Linearni sustavi	56
1.5.1	Gauss-Jordanova metoda eliminacije	59
1.5.2	Homogeni sustav	63
1.5.3	Nehomogeni sustav	66
1.5.4	Primjeri iz gospodarstva	71
1.6	Međusektorski model Leontiefa	75
2	Uvod u optimizaciju	93
2.1	Uvod kroz primjere	93
2.1.1	Problem prehrane	93
2.1.2	Klasičan problem transporta	98
2.1.3	Problem proizvodnje.	102

Poglavlje 1

Matrice

U mnogim ekonomskim i financijskim problemima pojavljuju se tablice sa brojevima. U njima raspoznavamo retke i stupce. Kadkad problem zahtijeva da se određeni stupci (ili retci) pomnože nekim brojem ili da se neki stupci (ili retci) zbroje, oduzmu ili pomnože po komponentama. U složenijim modelima javlja se potreba da se cijele tablice zbroje, pomnože brojem ili na pogodni način međusobno pomnože. Da bi se takove operacije s tablicama na konzistentni način koristile treba upoznati *teoriju matrica* koja pripada dijelu matematike koja se zove *linearna algebra*.

Najvažniji problem linearne algebre je rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Taj problem javlja se u gotovo svim znanostima, a posebno u tehničkim i ekonomskim primjenama. U ovom poglavlju uvest ćemo algebarsku strukturu koja će značajno pojednostaviti i sistematizirati računanje rješenja sustava linearnih jednadžbi, ali i drugih problema linearne algebre. Ta algebarska struktura naziva se *matrična algebra*.

1.1 Definicija i primjeri

Matrica je matematički objekt koji se sastoji od realnih (ili kompleksnih) brojeva koji su raspoređeni u retke i stupce. Ona se zapisuje u obliku pravokutne sheme ili tablice. Brojeve od kojih se sastoji nazivamo *elementima* matrice. Matrica A sa m redaka, n stupaca i s elementima a_{ij} zapisuje se kao

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}).$$

Takvu matricu nazivamo $m \times n$ (čitaj: m -puta- n) matrica ili matrica tipa (reda,

dimenzije) $m \times n$. Pritom je (a_{ij}) tek kraći zapis za pravokutnu shemu iz gornje relacije. Ako pišemo $A = (a_{ij})$ mislimo na cijelu shemu brojeva tj. na matricu A . Ako pišemo a_{ij} (ili $[A]_{ij}$ ili $(A)_{ij}$), mislimo na *opći element* koji se nalazi na presjeku i -tog retka i j -tog stupca matrice A .

Pritom niz brojeva

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}$$

nazivamo i -ti redak, a niz brojeva

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}$$

j -ti stupac matrice A . Ako vrijedi $m = n$, tj. ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, kažemo da je A *kvadratna* matrica reda n . Matricu sa samo jednim retkom nazivamo *matrica redak* ili *jednoretčana* matrica, a matricu sa samo jednim stupcem nazivamo *matrica stupac* ili *jednostupčana* matrica. Matricu sa jednim retkom i jednim stupcem ćemo poistovjetiti sa brojem koji je njen jedini element.

Matricu, čiji su elementi realni brojevi, zovemo *realna matrica*, a matricu, čiji su elementi kako realni tako i kompleksni brojevi, nazivamo *kompleksna matrica*. S obzirom da kompleksne matrice nećemo razmatrati pojam matrice poistovjećujemo s pojmom realne matrice.

Praktično je imati oznaku za skup svih m -puta- n matrica. Mi ćemo koristiti već uvriježene oznake $\mathbf{R}^{m \times n}$ odnosno \mathcal{M}_{mn} . Ako pišemo $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (čitaj: “ A pripada skupu \mathcal{M}_{mn} ”), to znači da je A m -puta- n matrica. U slučaju kad je $m = n$, oznaka \mathcal{M}_{nn} se skraćuje na \mathcal{M}_n , dok $\mathbf{R}^{m \times n}$ prelazi u $\mathbf{R}^{n \times n}$. Skup svih jednostupčanih matrica $\mathbf{R}^{n \times 1}$ se kraće označava s \mathbf{R}^n , dok se skup jednoretčanih matrica od n elemenata označava sa $\mathbf{R}^{1 \times n}$.

Primjer 1.1.1. Matrice $A_1 \in \mathcal{M}_{23}$, $A_2 \in \mathcal{M}_{32}$, $A_2 \in \mathcal{M}_{32}$, $B_1 \in \mathcal{M}_2$, $B_2 \in \mathcal{M}_3$,

$$\begin{array}{cc} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, & A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 15 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \\ \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, & B_2 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

su primjeri pravokutnih i kvadratnih matrica. Matrice $A_3 \in \mathbf{R}^3$, $A_4 \in \mathbf{R}^4$, $B_3 \in \mathbf{R}^{1 \times 2}$, $B_4 \in \mathbf{R}^{1 \times 4}$,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = [1 \ 2], \quad B_4 = [0 \ 0 \ -1 \ 1]$$

su primjeri jednostupčanih i jednoretčanih matrica. ■

Jednoretčane matrice iz $\mathbf{R}^{1 \times n}$ su općeg oblika $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ gdje su a_j realni brojevi. Još se koristi i oznaka sa zarezima umjesto prazninama $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Kada su dvije matrice jednake?

Matrica $A \in M_{mn}$ je jednaka matrici $B \in M_{pq}$ ako vrijedi $p = m$, $q = n$ i

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{za sve } 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n.$$

U tom slučaju pišemo

$$A = B.$$

Prema tome, dvije matrice su jednake ako i samo ako imaju jednak broj redaka, jednak broj stupaca i svaki element jedne matrice jednak je odgovarajućem elementu druge matrice. Budući da matrica A ima $m \cdot n$ elementata, jednakost $A = B$ zapravo znači $m \cdot n$ jednakosti realnih brojeva, $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ako zamijenimo retke i stupce matrice dobivamo tzv. *transponiranu* matricu. Dakle, matrica $B = (b_{ij})$ je transponirana matrica matrice $A = (a_{ij})$, ako je

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{za sve } i, j.$$

Ako je A tipa $m \times n$, transponirana matrica je tipa $n \times m$. Prvi redak (stupac) matrice A je prvi stupac (redak) transponirane matrice B itd. Transponiranu matricu označavamo s A^\top , dakle umjesto B pišemo A^\top . Operaciju koja matrici A pridružuje matricu A^\top nazivamo *transponiranjem*. Evo primjera,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^\top = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operaciji transponiranja ćemo se vratiti nakon što uvedemo operacije u skup matrica.

1.2 Matrice posebnog oblika

Matrica čiji su svi elementi nule je *nul matrica* i označava se s 0 ili O , neovisno o tome kojega je tipa ili reda. Sljedeće matrice su nul-matrice,

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0 \ 0 \ 0].$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

kvadratna matrica reda n . Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ čine *glavnu dijagonalu* matrice A . Na isti način se definira i glavna dijagonala pravokutne matrice.

Kvadratna (ili pravokutna) matrica je *dijagonalna* ako su svi elementi koji nisu na glavnoj dijagonali, jednaki nuli. Sljedeće kvadratne matrice su dijagonalne,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Te se matrice još zapisuju: $\text{diag}(2, -1)$, $\text{diag}(2, 0, 5)$, $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Jedinična matrica je kvadratna dijagonalna matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali. Označujemo je s I (ponegdje se koristi i oznaka E) ili I_k gdje k označava red matrice. Sljedeće su jedinične matrice reda 2, 3 i n ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna matrica je *gornja trokutasta* ili *gornje-trokutasta* ako su svi njezini elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. Neki primjeri su:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemu je zadnja matrica opći oblik gornje trokutaste matrice reda n .

Kvadratna matrica je *donja trokutasta* ili donje-trokutasta ako su svi njezini elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.2.1. Vrijede sljedeće jednostavne tvrdnje:

- a) Ako je D dijagonalna matrica, tada je $D^T = D$.
- b) Transponirana gornje-trokutasta matrica je donje-trokutasta matrica, i obratno.
- c) $(A^T)^T = A$, za svaku matricu A .
- d) Ako je A kvadratna matrica, tada se transponirana matrica dobiva zrcaljenjem elemenata matrice A s obzirom na njenu glavnu dijagonalu. ■

Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ je *simetrična* ako je $A^T = A$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ za svaki i, j . Zrcaljenjem s obzirom na glavnu dijagonalu, matrica se ne mijenja. Evo primjera simetrične matrice reda tri,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna matrica $A = (a_{ij})$ je *antisimetrična* ako vrijedi $A^T = -A$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ za svaki i, j . Antisimetrična matrica ima nule na glavnoj dijagonali jer $a_{ii} = -a_{ii}$ daje $a_{ii} = 0$. Primjer je,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednostupčane i jednoretčane matrice nazivamo vektorima. Jednostupčanu matricu nazivamo vektor stupac ili kraće vektor. Za sljedeće vektore,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

kažemo da imaju dimenzije 2, 3 i m , respektivno. Vektore ćemo označavati malim slovima. Ako je b vektor stupac, tada je njemu transponirani vektor b^\top vektor-redak,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^\top = [1 \ 1 \ 0]$$

i obratno, transponiranjem vektora retka dobiva se vektor stupac. Kad kažemo samo vektor, onda mislimo na vektor stupac.

Stupce i retke matrice možemo shvatiti kao vektore. Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Označimo njene vektore-retke

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}] \\ \tilde{a}_2 &= [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}] \\ &\vdots \\ \tilde{a}_m &= [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}] \end{aligned}, \quad \text{tada je } A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}.$$

Označimo vektore-stupce

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

tada je

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Oznaka $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ se još zove particija matrice po stupcima, a ona druga, particija po retcima. Osim oznake $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ još se koristi oznaka bez zareza $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$.

1.3 Osnovne operacije na matricama

Sada ćemo uvesti osnovne operacije na skupu matrica. Pritom ćemo opće elemente matrica A, B, C, \dots označiti sa odgovarajućim malim slovima $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$

1.3.1 Zbrajanje matrica

Neka je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbf{R}^{p \times q}$. Ako je $m = p$ i $n = q$, onda matricu $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ s elementima

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.2)$$

nazivamo zbrojem ili sumom matrica A i B i pišemo

$$C = A + B. \quad (1.3)$$

Zbrajanje matrica A i B znači $m \cdot n$ zbrajanja realnih brojeva, kao što je naznačeno u (1.2), a što možemo prikazati relacijom

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Evo jednog primjera zbrajanja matrica u $\mathbf{R}^{2 \times 3}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje je definirano za svaki par matrica iz $\mathbf{R}^{m \times n}$ i rezultat je uvijek u $\mathbf{R}^{m \times n}$. Zato kažemo da je skup $\mathbf{R}^{m \times n}$ zatvoren u odnosu na operaciju zbrajanja. Zbrajanje ima ova glavna svojstva:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asocijativnost)
2. $A + B = B + A$ (komutativnost)
3. Postoji matrica $O \in \mathbf{R}^{m \times n}$ sa svojstvom da je $A + O = A$ za svaku matricu $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Svi elementi matrice O jednaki su nuli.
4. Za svaki $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ postoji jedna i samo jedna matrica koju označavamo s $-A$ takva da vrijedi $A + (-A) = O$. Ako je $A = (a_{ij})$, onda je $-A = (-a_{ij})$.

Sljedeća operacija koju možemo jednostavno definirati je

1.3.2 Množenje matrice sa skalarom

Ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $c \in \mathbf{R}$, matricu $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ s elementima

$$b_{ij} = ca_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.4)$$

nazivamo umnožak ili produkt matrice A sa skalarom c i označavamo

$$B = cA. \quad (1.5)$$

Jednakost (1.5) zapravo označava da smo svaki od $m \cdot n$ elemenata matrice A pomnožili s c kako bismo dobili matricu B . To možemo još zapisati u obliku

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

Evo primjera množenja matrice iz $\mathbf{R}^{2 \times 3}$ sa -2

$$(-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1)A$ označavamo s $-A$, a $A + (-B)$ označavamo s $A - B$ i nazivamo razlikom matrica A i B .

Jasno je da za svaki skalar c i svaku matricu $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, mora $B = cA$ opet biti u $\mathbf{R}^{m \times n}$. Za proizvoljne $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $\alpha, \beta, c \in \mathbf{R}$ lako se pokaže da vrijedi

1. $c(A + B) = cA + cB$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}^{m \times n}$)
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivnost množenja prema zbrajanju u \mathbf{R})
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ (kompatibilnost množenja)
4. $1A = A$ (netrivijalnost množenja).

Za svako m i n skup $\mathbf{R}^{m \times n}$ zajedno sa operacijama zbrajanja i množenja sa skalarom ima vrlo poželjna svojstva koja su opisana kroz svojstva 1.–4. operacija $+$ i \cdot . Takva matematička struktura se naziva *vektorski prostor*, pa možemo zaključiti da je $\mathbf{R}^{m \times n}$ odnosno \mathcal{M}_{mn} vektorski prostor. Općenito, elementi vektorskog prostora se zovu vektori, ali u teoriji matrica, taj se naziv isključivo koristi za jednostupčane i jednoretčane matrice.

Primjer 1.3.1. *Izračunajmo matricu $X = 2A + 3B - C$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prvo izračunamo

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$3B = 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{aligned} X &= 2A + 3B - C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+0+1 & -2+3-2 & 4-3+3 \\ 0+6-4 & 2+0-1 & 6+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Ako su $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ i $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ particije po stupcima matrica A , B i C , respektivno, tada uvjet $C = \alpha A + \beta B$, gdje su α i β skalari, povlači $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$ za sve $1 \leq i \leq n$. Kako vrijedi i obratna tvrdnja (tj. da $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$ za sve $1 \leq i \leq n$ povlači $C = \alpha A + \beta B$), možemo pisati $C = [\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \dots, \alpha a_n + \beta b_n]$. Da li vrijedi analogna tvrdnja i za retke?

Sljedeća tri primjera pokazuju primjene zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom u gospodarskoj praksi.

Primjer 1.3.2. Poduzeće MOBIL-TEL prodaje dva tipa mobilnih telefona M_1 i M_2 preko dva prodajna mjesta P_1 i P_2 . Ukupni prihodi od prodaje u kunama za mjesec studeni i prosinac dani su u matricama A i B .

$$A = \begin{array}{cc} \text{Studenj:} & \\ & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} 60000 & 121600 \\ 75000 & 112000 \end{bmatrix} \\ P_2 & \end{array} \end{array}, \quad B = \begin{array}{cc} \text{Prosinac} & \\ & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ P_1 & \begin{bmatrix} 120000 & 160000 \\ 66000 & 144000 \end{bmatrix} \\ P_2 & \end{array} \end{array}.$$

a) Kolika je ukupna prodaja poduzeća MOBIL-TEL u ta dva mjeseca po pojedinom prodajnom mjestu i pojedinom tipu mobitela.?

b) Koliko je povećanje prodaje u prosincu u odnosu na studeni po pojedinom prodajnom mjestu i pojedinom tipu mobitela.? Komentirajte rezultat.

c) Ako je provizija na prodaju 5%, izračunajte proviziju za svako prodajno mjesto po pojedinom tipu mobitela za mjesec studeni.

Rješenje. a) Rezultat je matrica $A + B$,

$$A + B = \begin{bmatrix} 180000 & 281600 \\ 141000 & 256000 \end{bmatrix}.$$

b) Rezultat je matrica $B - A$,

$$B - A = \begin{bmatrix} 60000 & 38400 \\ -9000 & 32000 \end{bmatrix}.$$

Jer je $(2, 1)$ -element negativan, na prodajnom mjestu P_2 je za mobitel M_1 , došlo do smanjenja prodaje.

c) Rezultat je $0.05A$,

$$0.05A = \begin{bmatrix} 3000 & 6080 \\ 3750 & 5600 \end{bmatrix}.$$

■

Primjer 1.3.3. Poduzeće ELIPSA proizvodi četiri tipa proizvoda I, II, III i IV na dva proizvodna mjesta P_1 i P_2 . Troškovi u tisućama kuna po jedinici rada i repromaterijala za pojedini tip proizvoda i proizvodno mjesto, dani su u matricama A i B redom:

$$A = \begin{array}{c} \text{Proizvodno mjesto } P_1 \\ \text{repr.} \\ \text{rad} \end{array} \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \\ \left[\begin{array}{cccc} 12 & 14 & 18 & 20 \\ 20 & 24 & 35 & 28 \end{array} \right], & B = \begin{array}{c} \text{Proizvodno mjesto } P_2 \\ \text{repr.} \\ \text{rad} \end{array} \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \\ \left[\begin{array}{cccc} 12 & 15 & 16 & 21 \\ 18 & 25 & 26 & 29 \end{array} \right]. \end{array}$$

Izračunajte prosječne troškove proizvodnje po jedinici rada i repromaterijala za svaki tip proizvoda.

Rješenje. Treba izračunati matricu $0.5(A + B)$,

$$\frac{1}{2}(A + B) = \begin{array}{c} \text{repromaterijal} \\ \text{rad} \end{array} \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \\ \left[\begin{array}{cccc} 12 & 14.5 & 17 & 20.5 \\ 19 & 24.5 & 30.5 & 28.5 \end{array} \right]. \end{array}$$

■

Primjer 1.3.4. Tri skladišta raspolažu s tri vrste robe R_1 , R_2 , R_3 . Količine otpremljene robe iz skladišta u prodajne centre po godišnjim kvartalima (proljeće, ljeto, jesen, zima) dane su sljedećim matricama

$$A_1 = \begin{bmatrix} 17 & 4 & 12 \\ 6 & 4 & 13 \\ 11 & 4 & 8 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 10 \\ 10 & 5 & 15 \\ 20 & 5 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Pokazati da je iz prvog skladišta otpremljena u svakoj sezoni veća količina robe nego iz trećeg skladišta. Odredite matricu ukupne otpreme robe po skladištima i po kvartalima.

Rješenje. Treba provjeriti da je suma elemenata u svakom retku matrice A_1 veća od odgovarajuće sume u matrici A_3 . Kako su te sume za prvu matricu redom 33, 23, 23, 17, a za treću matricu 19, 15, 19, 14, respektivno, prva tvrdnja je dokazana.

Matrica ukupne otpreme je

$$A_1 + A_2 + A_3 = \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \\ \begin{bmatrix} 49 & 12 & 26 \\ 24 & 12 & 32 \\ 41 & 12 & 22 \\ 21 & 12 & 23 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{proljeće} \\ \text{ljeto} \\ \text{jesen} \\ \text{zima} \end{array} & \blacksquare \end{array}$$

Matrična algebra sadrži osim binarnih operacija $+$ i \cdot još dvije dodatne operacije: binarnu operaciju matričnog množenja i unarnu operaciju matričnog transponiranja (koju smo već upoznali). Te dvije operacije čine osnovu s kojom ćemo kasnije moći riješiti mnoge probleme.

Zadaci

1. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte

- (a) $2A + B^T$. (Rješenje je: $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.)
- (b) $A^T - 2B$. (Rješenje je: $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.)

2. U transportnom poduzeću raspoložu sa tri tipa teretnih automobila. Matrica A pokazuje koliki je bio transportni učinak svakog tipa vozila na svakoj od tri relacije u 1998. godini. Matrica B daje takve podatke za 1999. godinu.

Učinak u 1998. godini:

Učinak u 1999. godini:

$$A = \begin{array}{ccc} & \text{lin. 1} & \text{lin. 2} & \text{lin. 3} \\ \begin{bmatrix} 450 & 780 & 210 \\ 1050 & 240 & 90 \\ 1500 & 120 & 590 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{tip 1} \\ \text{tip 2} \\ \text{tip 3} \end{array} & & \end{array} \quad B = \begin{array}{ccc} & \text{lin. 1} & \text{lin. 2} & \text{lin. 3} \\ \begin{bmatrix} 520 & 910 & 220 \\ 1080 & 580 & 290 \\ 1460 & 830 & 600 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{tip 1} \\ \text{tip 2} \\ \text{tip 3} \end{array} & & \end{array}$$

Izračunajte matricu promjene ostvarenog transportnog učinka i matricu srednjeg transportnog učinka za taj period od dvije godine.

Rješenje. Matrica promjene ostvarenog transportnog učinka je

$$B - A = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \text{linija 1} & \text{linija 2} & \text{linija 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tip 1} \\ \text{tip 2} \\ \text{tip 3} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 70 & 130 & 10 \\ 30 & 340 & 200 \\ -40 & 710 & 20 \end{array} \right] \end{array} .$$

Matrica srednjeg transportnog učinka za period 1998.–1999. je

$$\frac{1}{2}(A + B) = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \text{linija 1} & \text{linija 2} & \text{linija 3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{tip 1} \\ \text{tip 2} \\ \text{tip 3} \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 485 & 845 & 215 \\ 1065 & 410 & 190 \\ 1480 & 475 & 595 \end{array} \right] \end{array} .$$

■

3. Neka portfelji P i Q državnog fonda A sadrže dionice Plive, Zagrebačke banke i Podravke. Neka portfelji R i S fonda B također sadrže dionice Plive, Zagrebačke banke i Podravke. Ako portfeljima pripadaju stupci, a firmama retci, tada fondovima A i B pripadaju matrice čiji su elementi ukupni brojevi dionica pojedinih firma po portfeljima

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & Q \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 100 & 200 \\ 500 & 400 \\ 150 & 80 \end{array} \right], \quad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} R & S \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 200 & 150 \\ 300 & 200 \\ 250 & 180 \end{array} \right].$$

Odlukom Vlade došlo je do stapanja dvaju fondova. Kako su portfelji P i R kao i Q i S u fondovima imali slične funkcije, novi fond je zadržao dva portfelja, pri čemu je u prvi stopio portelje P i R , a u drugi portefelje Q i S . Odredite matricu C portelja novog fonda.

Rješenje.

$$C = A + B = \left[\begin{array}{cc} 100 & 200 \\ 500 & 400 \\ 150 & 80 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 200 & 150 \\ 300 & 200 \\ 250 & 180 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 300 & 350 \\ 800 & 600 \\ 400 & 260 \end{array} \right].$$

1.3.3 Množenje matrica

Množenje matrica složenija je operacija od zbrajanja i množenja skalarom. Umnožak nije definiran za bilo kakve dvije matrice, pa čak niti za matrice istog tipa $m \times n$, ukoliko je $m \neq n$. I kad je umnožak definiran, on ovisi o poretku matrica.

Ako je a vektor-redak i b vektor-stupac iste duljine (još se kaže: dimenzije) n

$$a = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n], \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

njihov umnožak se definira

$$a \cdot b = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Rezultat ovog množenja je skalar. Npr. ako je

$$a = [1 \ 0 \ 2], \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onda je

$$a \cdot b = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 7.$$

Primjer 1.3.5. U vektoru-retku d su ukupni brojevi dionica pojedinih firmi koje sadrži neki portfelj, a u vektoru stupcu p njihove zaključne cijene na današnji dan. Kolika je današnja vrijednost portfelja? Uzmite konkretni primjer $d = [100 \ 200 \ 80]$ i $p = [200 \ 100 \ 300]^T$.

Rješenje. Vrijednost portfelja V se dobije da se za svaku firmu pomnoži broj odgovarajućih dionica u portfelju sa njihovom zaključnom cijenom, a onda se zbroje ti produkti. Ako je je

$$d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n] \text{ i } p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \text{ tada je } V = d \cdot p = d_1 p_1 + d_2 p_2 + \cdots + d_n p_n.$$

Na konkretnom primjeru to iznosi

$$V = [100 \ 200 \ 80] \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} = 100 \cdot 200 + 200 \cdot 100 + 80 \cdot 300 = 63000. \quad \blacksquare$$

Umnožak dviju matrica je definiran ako su one *ulančane*: broj stupaca prve mora biti jednak broju redaka druge matrice. Ako je A tipa $m \times n$, da bi umnožak $A \cdot B$ postojao, matrica B mora biti tipa $n \times p$. Umnožak će biti matrica tipa $m \times p$.

Ako je $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times p}$, tada je umnožak $A \cdot B \in \mathbf{R}^{m \times p}$. Uvedemo li za matricu $A \cdot B$ oznaku $C = (c_{ij})$, tada je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p.$$

Vidimo da je opći element c_{ij} umnožak i -tog retka matrice A i j -tog stupca matrice B .

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Gornja formula izgleda na prvi pogled komplicirano. Ona zapravo kaže da jednostavno pomnožimo elemente i -tog retka matrice A sa odgovarajućim elementima j -tog stupca matrice B i produkte zbrojimo. U sljedećem prikazu matrica, prikazani su samo oni dijelovi matrica A i B koji su potrebni za izračunavanje elementa c_{ij} matrice C ,

$$\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & c_{ij} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & b_{1j} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & b_{2j} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & b_{3j} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdot & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdot & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdot & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdot & \circ & \circ \\ \circ & \circ & b_{nj} & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

Matricu C možemo dobiti na sljedeći način. Prvi redak matrice A pomnožimo po redu prvim, drugim, ..., p -tim stupcem matrice B i tako dobivene brojeve pišemo u prvi redak matrice C slijeva nadesno. Nakon toga drugi redak matrice A množimo po redu prvim, drugim, ..., p -tim stupcem matrice B i dobivene brojeve pišemo u drugi redak matrice C , itd.

Produkt matrica se obično piše (kao i produkt skalara) bez znaka \cdot množenja između faktora, dakle AB . Produkt matrica ima, za razliku od produkta brojeva, pomalo neočekivana svojstva. Neka ćemo prikazati u sljedećem primjeru.

Primjer 1.3.6. Na sljedećim primjerima matrica uočimo neka svojstva množenja matrica.

a) *Produkt matrica AB postoji, dok produkt BA ne postoji.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) *Ako su $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, tada su oba produkta AB i BA definirana. Pritom je $AB \in \mathbf{R}^{m \times m}$ i $BA \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Jasno, ako je $m \neq n$, matrice AB i BA su različitog tipa, pa ne mogu biti jednake,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) *Ako su obje matrice kvadratne i istog reda, tada i AB i BA postoje i istog su reda kao i A odnosno B . No, ni tada ne mora vrijediti $AB = BA$,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

d) *Produkt matrica koje nisu nul-matrica može biti nul-matrica*

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) *Kvadrat matrice može biti minus jedinična matrica. Ako je*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dobivamo

$$J^2 = JJ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I.$$

U aritmetici ne postoji realan broj čiji kvadrat je -1 . Zato i jesu uvedeni kompleksni brojevi. S njima možemo riješiti npr. jednadžbu $x^2 = -1$. Ulogu jedinice u matricnoj algebri ima matrica I . Dakle, postoji realna matrica, čiji kvadrat je jednak $-I$. ■

Neka su a i b vektori-stupci iste duljine n . Kako su oni jednostupčane matrice, definirana su oba umnoška $a^\top b$ i ab^\top . Tada je

$$a^\top b = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n] \quad (1.6)$$

tipa 1×1 tj. skalar, dok je

$$ab^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

tipa $n \times n$.

Primjer 1.3.7. *Ako su $a^\top = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$ i $b^\top = [-4 \ 3 \ -2 \ 1]$, tada je*

$$a^\top b = [1 \ 2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 = [-4 \ 3 \ -2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = b^\top a,$$

$$ab^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [-4 \ 3 \ -2 \ 1] = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 & 2 \\ -12 & 9 & -6 & 3 \\ -16 & 12 & -8 & 4 \end{bmatrix},$$

$$ba^\top = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3 \ 4] = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 & -16 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Dakle, ako su a i b vektori-stupci iste dimenzije, tada je produkt oblika $a^\top b$ skalar pa se takav produkt zove *skalarni produkt* vektora a i b .

Kako gledati na produkt matrica?

Na produkt matrica A i B možemo gledati na više načina, ovisno o tome koju particiju matrica odaberemo.

Neka su $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$. Najlakše je opisati produkt matrica A i B pomoću skalarnih produkata redaka od A i stupaca od B . Neka su

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}, \quad B = [b_1, b_2, \dots, b_p]$$

particija po retcima od A i particija po stupcima od B . Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} [b_1, b_2, \dots, b_p] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 b_1 & \tilde{a}_1 b_2 & \cdots & \tilde{a}_1 b_p \\ \tilde{a}_2 b_1 & \tilde{a}_2 b_2 & \cdots & \tilde{a}_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_m b_1 & \tilde{a}_m b_2 & \cdots & \tilde{a}_m b_p \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Ako pogledamo retke matrice skalarnih produkata u (1.7), tada vidimo da je

$$AB = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 B \\ \tilde{a}_2 B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m B \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

dok gledajući stupce matrice skalarnih produkata u (1.7), vidimo da je

$$AB = A[b_1, b_2, \dots, b_p] = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p]. \quad (1.9)$$

Vidimo da do matrice AB možemo doći na više načina.

- AB se najčešće poima kao matrica skalarnih produkata retka od A sa stupcima od B , a to prikazano relacijom (1.7).
- Prema relaciji (1.8), tako da prvi redak od A , pomnožimo (s desna) s B i taj produkt $\tilde{a}_1 B$ stavimo kao prvi redak od AB , zatim drugi redak od A pomnožimo s B i $\tilde{a}_2 B$ stavimo kao drugi redak od AB itd.
- Prema relaciji (1.9), do produkta AB možemo doći i tako da svaki stupac od B pomnožimo (s lijeva) sa A i onda stavimo Ab_1 kao prvi, Ab_2 kao drugi itd., Ab_p kao zadnji stupac od AB .

Primjer 1.3.8. *Pojasnimo zadnje zaključke na sljedećem paru matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}.$$

Prema relaciji (1.7) imamo

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 31 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 32 & 1 \cdot 13 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 33 \\ \hline 4 \cdot 11 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 31 & 4 \cdot 12 + 5 \cdot 22 + 6 \cdot 32 & 4 \cdot 13 + 5 \cdot 23 + 6 \cdot 33 \\ \hline 7 \cdot 11 + 8 \cdot 21 + 9 \cdot 31 & 7 \cdot 12 + 8 \cdot 22 + 9 \cdot 32 & 7 \cdot 13 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 33 \end{array} \right].$$

Ovdje smo koristili vodoravne i okomite linije da lakše uočimo elemente matrice.

Prema relaciji (1.8) imamo

$$AB = \begin{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] B \\ [4 \ 5 \ 6] B \\ [7 \ 8 \ 9] B \end{bmatrix}$$

pritom je

$$\begin{aligned} [1 \ 2 \ 3] B &= [1 \cdot 11 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 31 \quad 1 \cdot 12 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 32 \quad 1 \cdot 13 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 33] \\ [4 \ 5 \ 6] B &= [4 \cdot 11 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 31 \quad 4 \cdot 12 + 5 \cdot 22 + 6 \cdot 32 \quad 4 \cdot 13 + 5 \cdot 23 + 6 \cdot 33] \\ [7 \ 8 \ 9] B &= [7 \cdot 11 + 8 \cdot 21 + 9 \cdot 31 \quad 7 \cdot 12 + 8 \cdot 22 + 9 \cdot 32 \quad 7 \cdot 13 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 33]. \end{aligned}$$

Ako maknemo uglate zagrade koje naznačuju retke, dobivamo istu matricu AB kao u prvom slučaju.

Prema relaciji (1.9) imamo

$$\begin{aligned} AB &= A \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \left[A \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{bmatrix} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ 33 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \cdot 11 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 31 \\ 4 \cdot 11 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 31 \\ 7 \cdot 11 + 8 \cdot 21 + 9 \cdot 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \cdot 12 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 32 \\ 4 \cdot 12 + 5 \cdot 22 + 6 \cdot 32 \\ 7 \cdot 12 + 8 \cdot 22 + 9 \cdot 32 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \cdot 13 + 2 \cdot 23 + 3 \cdot 33 \\ 4 \cdot 13 + 5 \cdot 23 + 6 \cdot 33 \\ 7 \cdot 13 + 8 \cdot 23 + 9 \cdot 33 \end{bmatrix} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ako maknemo duge uglate zagrade koje naznačuju stupce, dobivamo istu matricu AB kao i prije. ■

Osnovna svojstva produkta matrica

Navedimo glavna svojstva matričnog množenja

1. $(AB)C = A(BC)$ (asocijativnost)
2. $(A + B)C = AC + BC$ (distributivnost s desna)
3. $C(A + B) = CA + CB$ (distributivnost s lijeva)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (kompatibilnost).

Prvo svojstvo kaže da možemo pisati produkt ABC bez zagrada jer dolazimo do iste matrice bilo da prvo pomnožimo AB i onda to pomnožimo (s desna) sa C ili da prvo pomnožimo BC a onda to pomnožimo (s lijeva) s A . Korištenjem tog pravila možemo izvesti zaključak da i produkt od proizvoljnog broja matrica možemo pisati bez zagrada koje upućuju na redoslijed izvršavanja operacija množenja. U dokazu se koristi činjenica da $A(BC)$ i $(AB)C$ možemo pisati kao ABC . Evo primjera

$$\begin{aligned} X &= A_1(((A_2A_3)A_4)A_5) = A_1((A_2A_3A_4)A_5) = A_1(A_2A_3A_4A_5) \\ &= A_1A_2A_3A_4A_5. \end{aligned}$$

Drugo i treće svojstvo se može poopćiti na više matrica. Npr. svojstvo 3. se proširi na oblik $A(B_1 + B_2 + \dots + B_r) = AB_1 + AB_2 + \dots + AB_r$ za svako r . Dokaz koristi matematičku indukciju.

Potrebni broj računskih operacija

Kad se računa na računalu, važno je znati da svaka računaska operacija između dva broja traje (red veličine je 10^{-9} sekunde), pa je važan broj osnovnih računskih operacija koje matrične operacije zahtijevaju. Vrijede sljedeće tvrdnje:

- skalarni produkt $x^\top y = y_1x_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ vektora $x, y \in \mathbf{R}^n$ zahtijeva n operacija množenja i $n - 1$ operacija zbrajanja.
- produkt matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i vektora $x \in \mathbf{R}^n$ zahtijeva računanje m komponenata vektora Ax , a svaka komponenta je skalarni produkt ("duljine n ") odgovarajućeg retka matrice A i vektora x . Dakle Ax zahtijeva mn množenja i $m(n-1)$ zbrajanja. Kad je $m = n$ to iznosi n^2 množenja i $n^2 - n$ zbrajanja.
- umnožak matrica $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$ možemo prikazati pomoću stupčane particije (vidi relaciju (1.9)) $[Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p]$, gdje je $B = [b_1, b_2, \dots, b_p]$ stupčana particija od B . Dakle, za produkt AB potrebno je p množenja matrice A sa vektorom duljine n (stupcem od B), odnosno pm skalarnih produkata duljine n . Dakle, potrebno je mpn množenja i $mp(n-1)$ zbrajanja. Kad je $m = n = p$ to je n^3 množenja i $n^3 - n^2$ zbrajanja.

Jedinična matrica

Kao što nul-matrica ima posebnu ulogu kod operacije zbrajanja, tako jedinična matrica ima posebnu ulogu kod matricnog množenja (tzv. neutralni element za operaciju množenja). Ako je A kvadratna matrica reda n i I jedinična matrica istog reda, tada je

$$AI = IA = A.$$

Kao primjer, provjerite da je

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, a I_m i I_n jedinične matrice dimenzija m i n , respektivno, tada vrijedi poopćenje zadnje relacije na pravokutne matrice

$$I_m A = A I_n = A.$$

Stupci jedinične matrice se obično označavaju s e_1, e_2, \dots , tako da vrijedi $I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, pri čemu je $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ s jedinicom na i -tom mjestu.

Ako u prije pokazanoj relaciji $AB = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_p]$ umjesto B stavimo jediničnu matricu I_n , iz $A = A I_n$ odmah slijedi

$$A = [Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n], \quad (1.10)$$

pa je Ae_1 prvi, Ae_2 drugi itd., Ae_n zadnji stupac od A . Sažetije se kaže da je Ae_j j -ti stupac od A .

Primjer 1.3.9. Neka je $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ stupčana particija matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i neka je $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$. Pokažimo da je

$$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n.$$

Pokažimo prvo da se x može zapisati kao suma $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, gdje su e_1, e_2, \dots, e_n stupci jedinične matrice I_n . Doista,

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x.$$

Svaki član $x_i e_i$ je jednostupčana matrica. Ako ju označimo s B_i , možemo iskoristiti svojstvo distributivnosti matricnog množenja, $A(B_1 + \cdots + B_n) = AB_1 + \cdots + AB_n$. Nakon toga još možemo koristiti 4. svojstvo množenja matrica i dobiti

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = A(x_1 e_1) + A(x_2 e_2) + \cdots + A(x_n e_n) \\ &= x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \cdots + x_n A e_n = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n. \end{aligned}$$

Općenito, ako se vektor b može prikazati kao suma

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k$$

gdje su $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ skalari, kažemo da je b linearna kombinacija vektora a_1, a_2, \dots, a_k .

Zadnji primjer pokazuje da se vektor Ax može prikazati kao linearna kombinacija stupaca od A pri čemu su skalari baš komponente vektora x . Taj rezultat se može iskoristiti kad množimo matrice “na ruke”, pogotovo ako desna matrica u produktu ima dosta nula.

1.3.4 Transponiranje matrica

Postoji još jedna vrlo korisna operacija na matricama, operacija transponiranja, koju smo već upoznali, a sada će nas zanimati kako se ponaša u odnosu na već uvedene operacije matricnog zbrajanja, matricnog množenja i množenja matrice sa skalarom. Sjetimo se, ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, matrica $A^T \in \mathbf{R}^{n \times m}$ se naziva transponirana matrica A , ako je svaki redak (stupac) od A^T jednak odgovarajućem stupcu (retku) matrice A . Operacija koja matrici pridružuje transponiranu matricu (transponiranje) je unarna operacija jer ima samo jedan argument.

Prema tome, transponiranu matricu dobivamo tako da stupce (retke) matrice zamijenimo njenim retcima (stupcima). Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Kraće to zapisujemo: ako je $A = (a_{ij})$, onda je $A^T = (a_{ji})$. Na primjer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vrijede sljedeća jednostavna svojstva

1. $(A^\top)^\top = A$ za proizvoljnu matricu A ,
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ za proizvoljne matrice A i B istog tipa,
3. $(cA)^\top = cA^\top$ za proizvoljnu matricu A i skalar c ,
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$ za proizvoljne ulančane matrice A i B .

Zadnje svojstvo je najzanimljivije. Ako je A tipa $m \times n$, a B tipa $n \times p$, onda je matrica B^\top tipa $p \times n$, A^\top je tipa $n \times m$, a umnožak $B^\top A^\top$ je tipa $p \times m$. Istog je tipa i matrica $(AB)^\top$. Pokazuje se da su one i jednake.

Primjer 1.3.10. Neka su a i b vektori stupci iz \mathbf{R}^n . Koristeći svojstvo 4. i 1., lako provjerimo da je

$$a^\top b = b^\top a \quad i \quad ab^\top = (ba^\top)^\top.$$

Doista, $a^\top b$ je 1×1 matrica (skalar) koja ostaje ista i nakon transponiranja. Stoga je

$$a^\top b = (a^\top b)^\top = b^\top (a^\top)^\top = b^\top a.$$

Druga relacija se dobiva na sličan način

$$(ba^\top)^\top = (a^\top)^\top b^\top = ab^\top.$$

Provjera tih relacija na konkretnim vektorima je dana u primjeru 1.3.7. ■

Neka je $A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}$ retčana particija od $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Kako transponiranjem

retci prelaze u stupce, $A^\top = [\tilde{a}_1^\top, \dots, \tilde{a}_m^\top]$ je stupčana particija od A^\top . S druge strane, prema relaciji (1.10), stupčanu particiju od $A^\top \in \mathbf{R}^{n \times m}$ možemo zapisati kao $A^\top = [A^\top e_1, \dots, A^\top e_m]$, gdje je e_i i -ti stupac od I_m . Ako još jedamput transponiramo matricu i iskoristimo da je dvaput transponirana matrica jednaka samoj sebi, dobivamo

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix} = A = (A^\top)^\top = [A^\top e_1, \dots, A^\top e_m]^\top = \begin{bmatrix} (A^\top e_1)^\top \\ \vdots \\ (A^\top e_m)^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^\top A \\ \vdots \\ e_m^\top A \end{bmatrix}.$$

Ovdje smo koristili 4. i 1. svojstvo transponiranja: $(A^\top e_i)^\top = e_i^\top (A^\top)^\top = e_i^\top A$ za sve $1 \leq i \leq m$. Zaključujemo da se i -ti redak matrice A može dobiti množenjem $e_i^\top A$. Slično svojstvo smo pokazali pomoću relacije (1.10) za stupce: j -ti stupac se dobije množenjem Ae_j .

Ako umjesto A uzmemo vektor-stupac x , zaključujemo da je $e_i^\top x$ i -ti redak od x , a to znači i -ta komponenta od x . Slično, vektor redak x^\top ima n stupaca (duljine jedan, dakle skalare) pri čemu je i -ti stupac $(x^\top)e_i = x_i$. Dakle je $x_i = e_i^\top x = x^\top e_i$.

Uočimo da se opći element a_{ij} nalazi u i -tom retku j -tog stupca od A , pa vrijedi $a_{ij} = e_i^\top (Ae_j) = e_i^\top Ae_j$ za sve i, j . Do istog zaključka nas vodi i gledanje na a_{ij} kao na j -ti stupac od i -tog retka matrice A , $a_{ij} = (e_i^\top A)e_j = e_i^\top Ae_j$ za sve i, j .

Primjer 1.3.11. *Neka je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tada npr. za a_{23} imamo

$$\begin{aligned} a_{23} = e_2^\top Ae_3 &= (e_2^\top A)e_3 = [4 \ 5 \ 6]e_3 = [4 \ 5 \ 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \quad \text{ili} \\ &= e_2^\top (Ae_3) = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Zbog važnosti, vektori e_i se još nazivaju *kanonski* ili *koordinatni* vektori.

Primjer 1.3.12. *U primjeru 1.3.9. pokazano je da se vektor Ax može prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice, $Ax = x_1a_1 + \dots + x_na_n$ gdje su za sve $1 \leq i \leq n$ skalari x_i komponente vektora x , a a_i stupci matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Da li postoji slična formula kad se računa vektor redak $y^\top A$, a koja uključuje retke matrice A ?*

Odgovor je potvrđan, a rezultat se jednostavno dobije iz prethodnog rezultata pomoću operacije transponiranja. Označimo retke matrice A sa $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$. Tada su $\tilde{a}_1^\top, \tilde{a}_2^\top, \dots, \tilde{a}_m^\top$ stupci matrice A^\top . Ako su y_1, y_2, \dots, y_m komponente od y , tada je

$$\begin{aligned} y^\top A &= y^\top (A^\top)^\top = (A^\top y)^\top = ([\tilde{a}_1^\top, \tilde{a}_2^\top, \dots, \tilde{a}_m^\top]y)^\top \\ &= (y_1\tilde{a}_1^\top + y_2\tilde{a}_2^\top \dots + y_m\tilde{a}_m^\top)^\top = y_1\tilde{a}_1 + y_2\tilde{a}_2 \dots + y_m\tilde{a}_m. \end{aligned}$$

Npr. ako je

$$y^\top = [1 \ 0 \ -1 \ 0] \quad \text{i} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -8 & -7 & -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{tada je}$$

$$y^\top A = 1 \cdot \tilde{a}_1 + 0 \cdot \tilde{a}_2 + (-1) \cdot \tilde{a}_3 + 0 \cdot \tilde{a}_4, \text{ pa je}$$

$$y^\top A = 1 \cdot [1 \ 2 \ 3 \ 4] - 1 \cdot [5 \ 6 \ 7 \ 8] = [-4 \ -4 \ -4 \ -4]. \quad \blacksquare$$

Dijagonalne matrice

Prva generalizacija jedinične matrice je dijagonalna matrica,

$$\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Nul-matrica i jedinična matrica također spadaju u dijagonalne matrice. Zbroj i produkt dviju dijagonalnih matrica je također dijagonalna, a isto vrijedi i za produkt dijagonalne matrice sa skalarom. Produkt dviju netrivialnih dijagonalnih matrica (npr. $\text{diag}(1, 0, 2)$ i $\text{diag}(0, -1, 0)$) može biti nul-matrica.

Neka je $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ako je $A \in \mathbf{R}^{n \times p}$, tada je i -ti redak od DA jednak i -tom retku od A pomnoženom sa α_i .

Ako je $A \in \mathbf{R}^{p \times n}$, tada je i -ti stupac od AD jednak i -tom stupcu od A pomnoženom sa α_i .

To odmah slijedi iz činjenice da je i -ti redak od D jednak $\alpha_i e_i^\top$, dok je i -ti stupac od D jednak $\alpha_i e_i$. Tada su i -ti redak od DA i i -ti stupac od AD jednaki

$$e_i^\top (DA) = (e_i^\top D)A = (\alpha_i e_i^\top)A = \alpha_i (e_i^\top A)$$

$$(AD)e_i = A(De_i) = A(\alpha_i e_i) = \alpha_i (Ae_i).$$

Ako su svi dijagonalni elementi od D različiti od nule, operacija DA (AD) se naziva *skaliranje redaka* (stupaca).

Primjer 1.3.13. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad i \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$DA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix},$$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 9 \\ -8 & 5 & 18 \\ -14 & 8 & 27 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Dijagonalne matrice koje dobivamo množenjem jedinične matrice skalarom (tj. one oblika αI) nazivamo *skalarne* matrice. Ako je $D = \alpha I$, onda je $DA = \alpha A$, a također i $AD = \alpha A$, čim su dimenzije matrica takve da su produkti definirani.

Matrični polinom

Ako je A kvadratna matrica, tada su definirane potencije

$$A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA = A^2A = AA^2, \quad \dots$$

Općenito,

$$A^r = \underbrace{AA \cdots A}_{r \text{ faktora}}.$$

Zbog zakona asocijativnosti za množenje matrica, vrijedit će za proizvoljne cijele nenegativne brojeve p i q za koje je $p + q = k$ relacija $A^k = A^p A^q$. Pritom se dodatno definira $A^0 = I$.

Ako je

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$$

bilo koji polinom stupnja k , tada se za proizvoljnu kvadratnu matricu A definira matrični polinom

$$p(A) = a_k A^k + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Primjer 1.3.14. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $p(x) = x^3 - 2x + 5$. Tada je

$$p(A) = A^3 - 2A + 5I = \cdots = \begin{bmatrix} -20 & 2 \\ -3 & -21 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Zadaci

1. Izračunajte umnoške

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Rješenje je: } \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (\text{Rješenje je: } \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

2. Uvjerite se neposrednim množenjem da vrijedi $(ABC)^T = C^T B^T A^T$ ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunati

(a) AB . (Rješenje je: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$).

(b) $A^T B^T$. (Rješenje je: $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -7 & 6 & -5 \end{bmatrix}$).

(c) $B^T A^T$. (Rješenje je: $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$).

(d) BA . (Rješenje je: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$).

4. Svaka kvadratna matrica može se rastaviti na zbroj simetrične i antisimetrične matrice. Lako se pokaže da su to matrice

$$A_s = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_a = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Odredite te matrice za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 7 \\ -2 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Očigledno je $A = A_s + A_a$ i vrijedi

$$(A_s)^T = \left(\frac{1}{2}(A + A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_s,$$

$$(A_a)^T = \left(\frac{1}{2}(A - A^T) \right)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_a,$$

Za matricu A , rastav je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Pokazali smo da je $[Ab_1, \dots, Ab_p]$ stupčana particija matrice AB pri čemu je $B = [b_1, \dots, b_p]$ stupčana particija matrice B . Pokažite, koristeći produkt $e_i^\top(AB)$, da slični rezultat vrijedi za retčanu particiju matrice AB .

Rješenje. Neka su $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$. Tada za retčanu particiju od AB vrijedi

$$AB = \begin{bmatrix} e_1^\top(AB) \\ e_2^\top(AB) \\ \vdots \\ e_m^\top(AB) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_1^\top A)B \\ (e_2^\top A)B \\ \vdots \\ (e_m^\top A)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 B \\ \tilde{a}_2 B \\ \vdots \\ \tilde{a}_m B \end{bmatrix}, \quad \text{gdje je } A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \vdots \\ \tilde{a}_m \end{bmatrix}$$

retčana particija od A . Uočimo da se taj rezultat nalazi i u relaciji (1.8).

6. Neka su $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$. Ako je $A = [a_1, \dots, a_n]$ stupčana particija od A i ako je retčana particija od B ,

$$B = \begin{bmatrix} b_1^\top \\ \vdots \\ b_n^\top \end{bmatrix}, \quad \text{tada je } AB = a_1 b_1^\top + \dots + a_n b_n^\top.$$

Pritom je $a_i b_i^\top \in \mathbf{R}^{m \times p}$ za sve $1 \leq i \leq n$.

Rješenje. Neka je $I_n = [e_1, \dots, e_n]$ stupčana particija, tako da su kanonski vektori e_i duljine n . Uočite da se kvadratna matrica reda n , $e_i e_i^\top$ razlikuje od nulmatrice reda n tek u i -tom dijagonalnom elementu koji je jedinica. Stoga vrijedi $I_n = e_1 e_1^\top + e_2 e_2^\top + \dots + e_n e_n^\top$. Sada imamo

$$AB = AI_n B = A(e_1 e_1^\top + e_2 e_2^\top + \dots + e_n e_n^\top)B = a_1 b_1^\top + \dots + a_n b_n^\top,$$

jer je

$$A e_i e_i^\top B = (A e_i)(e_i^\top B) = a_i b_i^\top, \quad 1 \leq i \leq n.$$

7. Pretpostavimo da trebamo izračunati vektore a i b koji se dobiju pomoću sljedećih formula

$$a = (AC)c \quad \text{i} \quad b = (BAC)c,$$

pri čemu su A , B i C matrice reda n , a vektor c ima n komponenata.

- (i) Koliko običnih (skalarnih) operacija množenja i zbrajanja zahtijeva računanje vektora a i b po gornjim formulama?
- (ii) Koliko običnih operacija zahtijeva računanje vektora a i b , ako iskoristimo asocijativnost množenja matrica, pa vektore a i b računamo po formulama $a = A(Cc)$ i $b = Ba$?
- (iii) Neka je $n = 10, 100, 1000, 10000$, pa usporedite te brojeve. Kad bismo koristili računalo koje izvrši operaciju množenja za jednu milijarditinku sekunde (10^{-9} sek) koliko bi vremena trajalo računanje vektora a i b po prvim odnosno drugim formulama?

Konačno, uzmite $n = 3$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i uvjerite se “na ruke” koliko je lakše računati po drugim formulama.

Rješenje. Dat ćemo samo broj množenja (zbrajanje je na računalu nekoliko puta brže, pa će na vrijeme računanja daleko više utjecati množenje od zbrajanja), a ako nas baš zanima i broj zbrajanja on se lako odredi na sličan način kao i broj množenja.

- (i) Kad bismo računali vektore a i b po prvim formulama, tako da prvo računamo produkt $X = AC$, zatim $a = Xc$, pa $Y = BX$ i konačno $b = Yc$, trebali bismo n^3 množenja za računanje matrice X , n^3 množenja za računanje matrice Y , te n^2 množenja za računanje vektora a i n^2 množenja za računanje vektora b . To ukupno zahtijeva $2n^3 + 2n^2$ množenja.
- (ii) Kad bismo računali po drugim formulama, trebali bismo: n^2 množenja za računanje vektora $x = Cc$, n^2 množenja za računanje vektora $a = Ax$ i n^2 množenja za računanje vektora $b = Ba$. Dakle ukupno $3n^2$ množenja.
- (iii) Odnosi brojeva operacija su dani u prvoj tabeli, a odnosi vremena (u sekundama) u drugoj tabeli

n	prve formule $2n^3 + 2n^2$	druge formule $3n^2$
10	2200	300
100	2020000	30000
1000	2002000000	3000000
10000	200020000000	300000000

n	prve formule $2n^3 + 2n^2$	druge formule $3n^2$
10	0.0000022	0.0000003
100	0.00202	0.00003
1000	2.002	0.003
10000	2000.2	0.3

Konkretni primjer riješite kao zadatak za vježbu iz matričnog množenja. ■

1.3.5 Primjena matrica u gospodarstvu

Navedimo sada kroz primjere, najjednostavnije primjene matrica u gospodarstvu.

Primjer 1.3.15. Ako je $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ vektor proizvodnje poduzeća (gdje je q_i količina i -tog proizvoda), $c = [c_1, c_2, c_3]^T$ vektor jediničnih troškova i $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ vektor prodajnih cijena, izračunajte i interpretirajte umnoške

- $q^T c$,
- $q^T p$,
- $q^T (p - c)$.

Zatim izračunajte s konkretnim vektorima

$$q = \begin{bmatrix} 53 \\ 38 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 3000 \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 10000 \\ 6000 \\ 14000 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

- $q^T c = q_1 c_1 + q_2 c_2 + q_3 c_3$ su ukupni troškovi.
- $q^T p = q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3$ je ukupni prihod.
- $q^T (p - c) = q_1 (p_1 - c_1) + q_2 (p_2 - c_2) + q_3 (p_3 - c_3)$ je ukupna dobit.

Specijalno, vrijedi

$$\begin{aligned} q^T c &= 53 \cdot 2000 + 38 \cdot 1000 + 34 \cdot 3000 = 246000 \text{ kn}, \\ q^T p &= 53 \cdot 10000 + 38 \cdot 6000 + 34 \cdot 14000 = 1234000 \text{ kn}, \\ q^T (p - c) &= 53 \cdot (10000 - 2000) + 38 \cdot (6000 - 1000) + 34 \cdot (14000 - 3000) \\ &= 988000 \text{ kn}. \end{aligned}$$

Zbog $q^T (p - c) = q^T p - q^T c$ do zadnjeg rezultata smo mogli doći oduzimanjem $1234000 - 246000 = 988000 \text{ kn}$. ■

Primjer 1.3.16. Zadan je vektor proizvodnje nekog poduzeća $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ gdje je q_i količina i -tog proizvoda u kilogramima. Izračunajte i interpretirajte $q^T e$, gdje je $e = [1, 1, 1, 1]^T$.

Rješenje.

$$q^T e = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \quad \text{je ukupna proizvodnja u kilogramima.} \quad \blacksquare$$

Primjer 1.3.17. Zadan je vektor dnevne proizvodnje $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ nekog poduzeća koja se ostvaruje na jednom stroju čiji je dnevni kapacitet 16 sati. Ako je $c = [0.10, 0.09, 0.25]^T$ vektor kapaciteta (u satima) po jedinici proizvoda, čemu je jednak umnožak $q^T c$ da bi se dnevni kapacitet stroja u potpunosti iskoristio?

Rješenje.

$$q^T c = 0.1q_1 + 0.09q_2 + 0.25q_3 = 16. \quad \blacksquare$$

Primjer 1.3.18. U tabeli je dan prikaz cijena (u kunama) za četiri vrste prehrambenih proizvoda P_1, P_2, P_3, P_4 u trgovini br. 1, u trgovini br. 2, kao i cijene koje su službeno objavljene nakon sniženja. Kupac kupuje od tih četiri vrsta proizvoda redom 3 kg, 16kg, 12kg i 4kg. Usporedite ukupnu masu novca kojeg je izdao kupac kupujući u trgovini br. 1, trgovini br. 2 i ako kupuje prema sniženim cijenama.

$P \setminus T$	br. 1	br. 2	snižene cijene
P_1	20	23	17
P_2	40	48	32
P_3	15	18	10
P_4	5	3	4

Izrazite koliko posto je kupac platio više u trgovinama nego da je kupovao po sniženim cijenama.

Rješenje. Bitni dio tabele smjestimo u matricu

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 17 \\ 40 & 48 & 32 \\ 15 & 18 & 10 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Kupac kupuje po vrstama proizvoda u kg, $X = [3, 16, 12, 4]$. Izračunamo

$$XA = [3, 16, 12, 4] \begin{bmatrix} 20 & 23 & 17 \\ 40 & 48 & 32 \\ 15 & 18 & 10 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [900, 1065, 699].$$

Za kupljene proizvode u trgovini br. 1 platit će 900 kn, dok će u trgovini br. 2 platit će 1065 kn. Ako će kupovati po sniženim cijenama platit će 699 kn.

Kupujući u trgovini br. 1 kupac je izdao 28.75% više novca nego bi izdao kupujući po sniženim cijenama. U trgovini br. 2 kupac je izdao 52.36% više novca nego bi izdao kupujući po sniženim cijenama. ■

Primjer 1.3.19. Jedno poduzeće proizvodi tri različita proizvoda P_1, P_2, P_3 . Svaki proizvod prolazi u procesu proizvodnje kroz četiri odjela O_1, O_2, O_3, O_4 . Za svaki proizvod troši se 5 sastojaka S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 u različitim količinama. U matrici A dana je količina sastojaka potrebnih za proizvodnju jedne jedinice svakog proizvoda. Svaki odjel ima plan proizvodnje tih triju proizvoda za mjesec dana. Ti podaci nalaze se u matrici B .

$$A = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ S_1 & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ P_1 & \left[\begin{array}{cccc} 10 & 50 & 70 & 100 \\ 0 & 30 & 60 & 120 \\ 90 & 5 & 0 & 85 \end{array} \right] \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix}$$

Odredite ukupne količine svakog od sastojka S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 u kg potrebne za planiranu mjesečnu proizvodnju.

Rješenje.

$$AB = \begin{matrix} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 \\ S_1 & \left[\begin{array}{cccc} 290 & 145 & 200 & 575 \\ 490 & 225 & 280 & 825 \\ 280 & 155 & 250 & 715 \\ 650 & 375 & 620 & 1755 \\ 120 & 185 & 270 & 505 \end{array} \right] \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix}$$

Za planiranu mjesečnu proizvodnju trebat će sastojaka

$$\begin{aligned} S_1 &= 290 + 145 + 200 + 575 = 1210 \text{ kg} \\ S_2 &= 490 + 225 + 280 + 825 = 1820 \text{ kg} \\ S_3 &= 280 + 155 + 250 + 715 = 1400 \text{ kg} \\ S_4 &= 650 + 375 + 620 + 1755 = 3400 \text{ kg} \\ S_5 &= 120 + 185 + 270 + 505 = 1080 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Uočite da se je rezultat mogao dobiti i u obliku vektora $K = [k_1, k_2, k_3, k_4, k_5]^T$

potrebnih mjesečnih količina proizvoda S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 , pomoću formule

$$\begin{aligned} K = (AB)e &= \begin{bmatrix} 290 & 145 & 200 & 575 \\ 490 & 225 & 280 & 825 \\ 280 & 155 & 250 & 715 \\ 650 & 375 & 620 & 1755 \\ 120 & 185 & 270 & 505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 290 + 145 + 200 + 575 \\ 490 + 225 + 280 + 825 \\ 280 + 155 + 250 + 715 \\ 650 + 375 + 620 + 1755 \\ 120 + 185 + 270 + 505 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1210 \\ 1820 \\ 1400 \\ 3400 \\ 1080 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada kad imamo formulu, možemo koristiti asocijativnost matričnog množenja i dobiti

$$\begin{aligned} K = (AB)e &= A(Be) = A \left(\begin{bmatrix} 10 & 50 & 70 & 100 \\ 0 & 30 & 60 & 120 \\ 90 & 5 & 0 & 85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 230 \\ 210 \\ 180 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 230 + 1 \cdot 210 + 3 \cdot 180 \\ 4 \cdot 230 + 0 \cdot 210 + 5 \cdot 180 \\ 1 \cdot 230 + 3 \cdot 210 + 3 \cdot 180 \\ 2 \cdot 230 + 8 \cdot 210 + 7 \cdot 180 \\ 3 \cdot 230 + 1 \cdot 210 + 1 \cdot 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1210 \\ 1820 \\ 1400 \\ 3400 \\ 1080 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Primjer 1.3.20. U proizvodnji dvaju proizvoda P_1 i P_2 koriste se dva međuproizvoda u količinama m_1 i m_2 . Nadalje, u njihovoj proizvodnji koriste se tri vrste pogonske energije u količinama u_1, u_2, u_3 . Neka su y_1 i y_2 količine finalnih proizvoda P_1 i P_2 , respektivno. Potražnja za međuproizvodima dana je jednadžbama

$$\begin{aligned} y_1 &= 2m_1 + m_2 \\ y_2 &= 3m_1 + 4m_2, \end{aligned}$$

dok je potražnja za pogonskom energijom određena jednadžbama

$$\begin{aligned} m_1 &= u_1 + 2u_3 \\ m_2 &= 3u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Odredite direktnu zavisnost količina proizvoda P_1 i P_2 i količine pogonske energije.

Rješenje. Neka je

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{vektor proizvodnje finalnih proizvoda,}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{vektor pogonske energije i}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad \text{vektor proizvodnje međuproizvoda.}$$

Iz veza između količina finalnih proizvoda y_i i međuproizvoda m_j slijedi

$$y = Am = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix},$$

a iz veze između količina međuproizvoda m_i i pogonskih energija u_j , slijedi

$$m = Bu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo,

$$y = Am = A(Bu) = (AB)u = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 15 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5u_1 + u_2 + 4u_3 \\ 15u_1 + 4u_2 + 6u_3 \end{bmatrix},$$

pa smo dobili veze

$$y_1 = 5u_1 + u_2 + 4u_3,$$

$$y_2 = 15u_1 + 4u_2 + 6u_3.$$

■

Načinimo kratak sažetak ovog dijela.

Za svaki par prirodnih brojeva m i n , skup $\mathbf{R}^{m \times n}$ sa operacijama zbrajanja matrica i množenja matrica skalarima ima lijepa svojstva. Skup je zatvoren u

odnosu na te operacije, pa korištenjem tih dviju operacija ne izlazimo iz skupa matrica. Pritom vrijede svojstva 1–4 za zbrajanje i svojstva 1–4 za množenje skalarom, pa se struktura $(\mathbf{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ zove vektorski prostor.

Množenje matrica iz $\mathbf{R}^{m \times n}$ je definirano tek ako je $m = n$. Ovdje je također je važno da je skup $\mathbf{R}^{n \times n}$ zatvoren u odnosu na matricno množenje. Označimo li privremeno operaciju množenja matrica sa \times , možemo pisati $(\mathbf{R}^{n \times n}, +, \cdot, \times)$, pri čemu je $(\mathbf{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ vektorski prostor, a množenje \times zadovoljava svojstva 1–4 za množenje matrica. Takva struktura se zove *algebra*. Kako u $\mathbf{R}^{n \times n}$ postoji i neutralni element I za množenje \times , kaže se da je $(\mathbf{R}^{n \times n}, +, \cdot, \times)$ algebra s jedinicom. Dakle, *skup matrica reda n čini algebru s jedinicom*. Ona općenito nije komutativna. Na njoj je definirana i unarna operacija transponiranja koja zadovoljava svojstva 1–4 za transponiranje.

Promotrimo još skup M_R svih realnih matrica,

$$M_R = \bigcup_{m,n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}^{m \times n}.$$

Neka \times označava operaciju množenja matrica, a \top operaciju transponiranja matrica. Skup M_R je sigurno zatvoren u odnosu na operaciju množenja matrice sa skalarom. Isto tako je zatvoren u odnosu na operaciju transponiranja. Međutim, ostale dvije operacije nisu definirane za svaki par matrica iz M_R . Ipak, postoji lijepo svojstvo skupa M_R , da je zatvoren s obzirom na te dvije operacije uvijek kad je rezultat tih dviju matrica definiran.

Zadaci

1. U servisnoj stanici za izvršenje jednog posla potrebno je prethodno izvršiti 4 različitih operacija u 5 odjela s različitim utrošcima radnih sati, kako pokazuje naredna tabela

Operacija \ odjel	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
I	0	2.0	0	3.0	1.0
II	5.0	0	6.0	0	3.0
III	7.5	0	2.0	0	1.0
IV	1.0	0.5	2.5	1.0	1.0

Cijena radnog sata (u kunama) pojedinih operacija varira po vremenskim razdobljima, kako je to naznačeno u sljedećoj tabeli

Razd. \ operacija	I	II	III	IV
T_1	4	8	6	7
T_2	5	8	7	8
T_3	5	7	6	9
T_4	4	10	6	8
T_5	4	9	8	8
T_6	5	10	7	9

Izračunajte učešće u troškovima svih pet odjela za navedenih 6 vremenskih razdoblja.

Rješenje. Neka je A matrica radnih sati po operacijama i odjelima, a B matrica troškova (cijena radnih sati) po vremenskim razdobljima i po operacijama

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2.0 & 0 & 3.0 & 1.0 \\ 5.0 & 0 & 6.0 & 0 & 3.0 \\ 7.5 & 0 & 2.0 & 0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.5 & 2.5 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Neka su retčana particija matrice B i stupčana particija matrice A ,

$$B = \begin{bmatrix} b_1^\top \\ b_2^\top \\ b_3^\top \\ b_4^\top \\ b_5^\top \\ b_6^\top \end{bmatrix}, \quad A = [a_1, a_2, a_3, a_4].$$

Za razdoblje T_2 npr. učešće trećeg odjela u_{23} je

$$u_{23} = b_2^\top a_3 = [5 \ 8 \ 7 \ 8] \begin{bmatrix} 0 \\ 6.0 \\ 2.0 \\ 2.5 \end{bmatrix} = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2.5 = 82.$$

Općenito, učešće j -tog odjela u i -tom vremenskom razdoblju je $u_{ij} = b_i^\top a_j$. Učešće svih odjela za svih 6 razdoblja dobiva se kao umnožak matrica $B \cdot A$,

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b_1^\top \\ b_2^\top \\ b_3^\top \\ b_4^\top \\ b_5^\top \\ b_6^\top \end{bmatrix} [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 92.0 & 11.5 & 77.5 & 19.0 & 41.0 \\ 100.5 & 14.0 & 82.0 & 23.0 & 44.0 \\ 89.0 & 14.5 & 76.5 & 24.0 & 41.0 \\ 103.0 & 12.0 & 92.0 & 20.0 & 48.0 \\ 113.0 & 12.0 & 90.0 & 20.0 & 47.0 \\ 111.5 & 14.5 & 96.5 & 24.0 & 51.0 \end{bmatrix}.$$

■

1.4 Reducirani oblik matrice

U ovom odjeljku opisat ćemo *reducirani oblik matrice* i metodu za nalaženje reduciranog oblika matrice. Reducirani oblik matrice ima veliku teoretsku i praktičnu važnost. On će nam omogućiti definiranje nekih bitnih pojmova kao što je rang matrice, a koristit će se za rješavanje sustava linearnih jednadžbi ili računanje inverzne matrice.

1.4.1 Metoda za dobivanje reduciranog oblika matrice

Metoda za svodjenje proizvoljne matrice na reducirani oblik koristi *elementarne transformacije* nad retcima. Još se koristi naziv *elementarne retčane transformacije*. Postoje i analogne stupčane transformacije, ali se one rijetko koriste, pa ćemo elementarne retčane transformacije kraće nazivati elementarnim transformacijama. To su sljedeće transformacije:

1. zamjena redaka,
2. množenje nekog retka skalarom različitim od nule,
3. dodavanje nekog retka pomnoženog skalarom nekom drugom retku.

Primjenom elementarnih transformacija svodimo matricu na reducirani oblik.

Neka je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Opisat ćemo algoritam svodenja matrice A na reducirani oblik. Pritom ćemo kao primjer koristiti matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 4}.$$

1. Gledajući s lijeva na desno, izaberimo prvi stupac koji nije nul-stupac, tj. koji ima bar jedan element različit od nule. Izaberimo u tom stupcu neki element različit od nule. Primjenjujući prvu elementarnu transformaciju, možemo ga dovesti na poziciju *stožernog elementa*, a to je u prvom retku tog stupca (ako je npr. na početku $a_{11} \neq 0$, prvi korak je nepotreban). Time smo osigurali da je stožerni element netrivialan. Odabrani stupac se naziva stožerni ili pivotni stupac.

Kod matrice \mathbf{A} , prvi stupac je stožerni, a da bi na stožernu poziciju $(1, 1)$ doveli netrivialni element, zamijenimo npr. prvi i treći redak:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 6 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stožerni (pivotni) element je stavljen u kvadratić.

2. Podijelimo elemente prvog retka sa stožernim elementom (druga elementarna transformacija). Stožerni element postaje 1,

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Pomoću stožernog elementa poništimo sve preostale elemente u prvom stupcu, primjenjujući treću elementarnu transformaciju.

U zadanom primjeru trebamo poništiti $a_{21} = -2$. To postizemo množenjem prvog retka s 2 i dodavanjem drugom retku. Matrica postaje

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & \boxed{9} & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Postupak nastavljamo s koracima 1 do 3 na podmatrici matrice A koja uključuje retke od 2. do m -tog i stupce od prvog desno prema stožernom do zadnjeg, n -tog stupca. Međutim, u 3. koraku pravimo nule u stožernom stupcu ne samo “ispod” već i “iznad” stožernog elementa.

U primjeru stožerni element postaje $a_{22} = 9$. Pomnožimo drugi redak s $\frac{1}{9}$ kako bi stožerni element postao 1. Sada je

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elemente drugog retka množimo s (-3) i dodajemo prvom da poništimo $a_{12} = 3$, pa je

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elemente drugog retka pomnožimo opet s (-3) i dodajemo trećem da poništimo $a_{32} = 3$; u našoj matrici se time poništava cijeli treći redak,

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobiven je reducirani oblik matrice $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_R$.

U općem slučaju, nastavljamo s postupkom sve dok svi preostali retci, ispod stožernog elementa (stožerne jedinice) ne postanu nul-retci ili ako se stožerna jedinica nalazi u zadnjem retku.

Ako se matrica A_{i+1} dobiva primjenom neke elementarne transformacije iz matrice A_i , to zapisujemo oznakom: $A_i \sim A_{i+1}$. Dakle je u gornjem primjeru:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_3 \sim \mathbf{A}_4 \sim \mathbf{A}_5 \sim \mathbf{A}_R.$$

1.4.2 Svojstva reduciranog oblika matrice

Reducirani oblik matrice, u gruboj skici izgleda ovako

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ & & & & & & & 1 & x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ & & & & & & & & 1 & x & \dots & x & & & \\ & & & & & & & & & 0 & \dots & \dots & \vdots & & \\ & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & & \end{bmatrix},$$

gdje x označava element matrice koji ne mora nužno biti nula. Taj oblik se još spominje i kao retčana ešalonska forma. Sljedeći uvjeti potpuno opisuju reduciranu matricu

- Svi retci koji sadrže samo nule (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan netrivialan element.
- Gledajući s lijeva na desno u retku koji nije nul-redak, prvi od nule različit element ima vrijednost 1. To je stožerni element ili stožerna jedinica. Svi ostali elementi u stupcu toga stožernog elementa jednaki su nuli.

- Svaki naredni stožerni element (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožerernog elementa. Preciznije, ako se stožerni elementi nalaze na pozicijama (i_1, j_1) i (i_2, j_2) , tada $i_2 > i_1$ povlači $j_2 > j_1$.

Primjer 1.4.1. *Evo nekoliko primjera matrica koje su u reduciranom obliku*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diskutirajte zašto ove matrice nisu u reduciranoj formi,

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Može se pokazati da je reducirani oblik matrice jednoznačno određen. Izbor elementarnih transformacija nije jednoznačan, no krajni rezultat ne ovisi o izabranom poretku.

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označava se s $\text{rang}(a)$ ili kraće s $r(A)$. Ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, tada je $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

U literaturi se mogu naći i druge definicije ranga, koje ne navodimo jer bismo morali uvesti cijeli niz novih pojmova.

Primjer 1.4.2. *Odredimo reducirani oblik i rang matrice*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -6 & 2 & 6 \end{bmatrix} && \begin{array}{l} \text{prvi redak} \times (-2) \text{ dodajemo drugom} \\ \text{prvi redak} \times (-1) \text{ dodajemo trećem} \end{array} \\
 A &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{drugi redak dijelimo s } -5 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix} && \text{poništavamo elemente u drugom stupcu} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_R.
 \end{aligned}$$

Vidimo $r(A) = 2$. ■

Primjer 1.4.3. *Odredimo reducirani oblik i rang kvadratne matrice*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} && \text{poništimo elemente prvog stupca} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} && \text{poništimo elemente drugog stupca} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} && \text{treći redak dijelimo s } -2 \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} && \text{poništimo elemente trećeg stupca} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ovdje je $A_R = I$ i $r(A) = 3$. ■

Kvadratna matrica A reda n ima puni rang, ako vrijedi $r(A) = n$. Kvadratna matrica ima puni rang ako i samo ako je $A_R = I$.

Zadaci

1. Svedite matricu na reducirani oblik i odredite njen rang.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 13 & 13 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{rang}(A) = 2).$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 10 & 18 & -7 & 10 & 15 \end{bmatrix}. \quad (\text{rang}(B) = 4).$$

■

1.4.3 Inverzna matrica

U ovoj ćemo točki promatrati samo kvadratne matrice reda n tj. samo matrice iz skupa \mathcal{M}_n .

Kako dvije matrice reda n uvijek možemo množiti i dobivamo rezultat koji je opet reda n , čitatelj bi mogao pomisliti, da se matrice možda mogu i dijeliti. Ponekad se matrice zaista mogu dijeliti (npr. matrice reda 1 koje su realni brojevi ili skalarne matrice), ali to nikako nije opći slučaj. Promotrimo zato matričnu jednadžbu

$$AX = C$$

gdje su A i C zadane. Pitanje je možemo li “dijeliti” C sa A kako bismo dobili X ? Da bismo to postigli treba nam matrica B sa svojstvom

$$BA = I.$$

Naime, onda imamo

$$X = IX = (BA)X = B(AX) = BC.$$

Pritom smo iskoristili svojstvo asocijativnosti produkta matrica i svojstvo $BA = I$. Zapravo, načinili smo ono što radimo i sa skalarnom jednadžbom $\alpha x = \gamma$. Množimo ju s $\omega = 1/\alpha$.

Da smo pošli od jednadžbe $XA = C$, trebali bi naći matricu B sa svojstvom $AB = I$, pa bi dobili $X = CB$. Zaključujemo da bi za rješavanje oba problema $AX = C$ i $XA = C$ trebali matricu B sa svojstvom $AB = BA = I$.

Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Matrica $B \in \mathcal{M}_n$ za koju vrijedi

$$AB = BA = I \quad (1.11)$$

naziva se inverzna matrica matrice A ili kraće, inverz od A .

Pokažimo da je inverzna matrica, ako postoji, jednoznačno određena. Pretpostavimo da postoje dvije matrice B_1 i B_2 koje zadovoljavaju (1.11). Množeći s desna lijevu i desnu stranu jednakosti $I = B_1A$ matricom B_2 , dobivamo $IB_2 = (B_1A)B_2$. Koristeći svojstvo jedinične matrice, vrijedi $IB_2 = B_2$. Koristeći asocijativnost množenja matrica, imamo $(B_1A)B_2 = B_1(AB_2)$. Kako za B_2 vrijedi $AB_2 = I$, dobivamo $B_2 = B_1(AB_2) = B_1I = B_1$. Dobili smo $B_1 = B_2$, pa ne mogu postojati dvije različite matrice B_1 i B_2 koje zadovoljavaju relaciju (1.11).

Dakle je inverzna matrica (ako postoji) jednoznačno određena, pa se označava s A^{-1} . Sjetimo se, inverzni broj od broja α označava se s α^{-1} i zadovoljava $\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha$. Kod brojeva, jer je množenje komutativno, dovoljno je zahtijevati tek jedan od uvjeta: $\alpha\alpha^{-1} = 1$ ili $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Da li je matrica A^{-1} jednoznačno određena samo jednim od uvjeta $AB = I$ ili $BA = I$? Odgovor je potvrđan samo ako je A kvadratna matrica punog ranga, a jedino takve matrice imaju inverz.

Za matricu A kažemo da je *regularna* ukoliko postoji njezina inverzna matrica A^{-1} . U protivnom kažemo da je *singularna*. Regularna matrica se još naziva *nesingularna* matrica. Pokazuje se da je kvadratna matrica regularna ako i samo ako ima puni rang.

Ako su A i B regularne matrice, tada je i AB regularna i vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Neka je A regularna matrica. Operacija invertiranja (uzimanja inverza) ima sljedeća svojstva:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$, za sve regularne matrice A ,
2. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ za sve skalare $\alpha \neq 0$,
3. $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$, pa ima smisla pisati $A^{-\top} = (A^{\top})^{-1}$,
4. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, pa ima smisla pisati $A^{-k} = (A^k)^{-1}$.

Inverz matrice se ponaša s potencijama matrice slično kao i inverz broja s potencijama tog broja: npr. $A^{-3}A^5 = A^2$ ili općenitije, $A^{-k}A^l = A^{l-k}$, pri čemu su l i k nenegativni. Kako je prije pokazano da za nenegativne cijele brojeve l i k vrijedi $A^kA^l = A^{l+k}$, zaključujemo da

$$A^kA^l = A^{l+k}$$

vrijedi za proizvoljne cijele brojeve l i k . Pritom je $A^0 = I$.

Algoritam za računanje inverzne matrice

Algoritam ćemo podijeliti u tri glavna koraka.

1. Napišimo matricu tipa $n \times 2n$ u kojoj je desno od matrice A napisana jedinična matrica I :

$$[A | I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right].$$

Tu matricu nazivamo matrica A proširena matricom I , ili kraće proširena matrica.

2. Svedimo pomoću elementarnih transformacija proširenu matricu $[A | I]$ na reducirani oblik. Rezultat je matrica $[A | I]_R = [A_R | B]$.
3. Ako je $A_R = I$, tada je matrica A regularna i $A^{-1} = B$. Ako je $A_R \neq I$, matrica nije regularna i ne postoji inverzna matrica.

Koraci 2. i 3. traže dodatna objašnjenje. Zašto je $[A | I]_R = [A_R | B]$? Odgovor leži u naravi algoritma koji svađa matricu na reducirani oblik. Taj algoritam ima smjer određivanja stožernih elemenata s lijeva na desno i odozgo prema dolje. Tako, ako je matrica A punog ranga, zadnja stožerna jedinica će biti na poziciji (n, n) , pa će biti $A_R = I$. Ako matrica A nije punog ranga, stožerni stupci mogu biti i u matrici B . Kad se prave nule u stožernom stupcu u matrici (koja je na poziciji matrice) B pripadne elementarne transformacije ne mogu promijeniti niti jedan element u matrici A_R jer se u tom dijelu proširene matrice one svađaju na dodavanje nul-redaka (pomnoženih nekim brojevima) drugim retcima.

Primjer 1.4.4. *Odredimo inverznu matricu matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Načinimo proširenu matricu i započnimo s elementarnim transformacijama

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{pomnožimo 1. redak s } \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{dodajmo 1. redak} \times (-3) \text{ trećem} \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{pomnožimo 2. redak s } \frac{1}{2} \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{dodajmo 2. redak} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ prvom} \\ \text{dodajmo 2. redak} \times \left(\frac{5}{2}\right) \text{ trećem} \end{array} \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 1 \end{array} \right] \quad \text{pomnožimo 3. redak s } -\frac{4}{15} \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{dodajmo 3. redak} \times \left(-\frac{7}{4}\right) \text{ prvom} \\ \text{dodajmo 3. redak} \times \left(\frac{1}{2}\right) \text{ drugom} \end{array} \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{array} \right] \\
& = [I | B].
\end{aligned}$$

A je regularna i

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Primjer 1.4.5. Odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -11 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

U sljedećem koraku svađanja proširene matrice na reducirani oblik, zadnji redak se množi s -1 i zatim se prave nule u 4. stupcu proširene matrice. Uočite da time ne bismo promijenili niti jedan element matrice A_R koja je već dobivena. Te zadnje elementarne transformacije zapravo nisu potrebne za naš krajnji zaključak. Iz zadnje matrice vidimo da vrijedi $A_R \neq I$ pa matrica A nije regularna i zato nema inverz. Rang polazne matrice A (kao i matrice A_R) je dva. ■

Primjer 1.4.6. U rijetkim slučajevima i polazna matrica A i njen inverz imaju kao elemente cijele brojeve. Evo jednog takvog primjera.

Treba naći inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Na ovom primjeru ćemo pokazati da za dobivanje inverzne matrice možemo koristiti i drugačiji niz elementarnih retčanih transformacije nego onaj iz opisa algoritma za svađanje matrice na reducirani oblik. Jedino je važno da u proširenoj matrici, na mjestu matrice A nastane identiteta.

Na mjestu prvog stožernog elementa je nula. Da bi tu dobili broj koji nije nula obično se zamjenjuju retci, ali možemo ih npr. zbrajati (treća elementarna transformacija).

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -3 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Trokutaste matrice

Trokutaste matrice imaju zanimljiva svojstva. Ako zbrojimo dvije gornje-trokutaste matrice dobit ćemo opet gornju trokutastu matricu. Ako gornje-trokutastu matricu pomnožimo skalarom opet ćemo dobiti gornje-trokutastu. Ako pomnožimo dvije gornje-trokutaste matrice opet ćemo dobiti gornje-trokutastu matricu, pri čemu će svaki dijagonalni element biti produkt odgovarajućih dijagonalnih elemenata u matricama koje množimo. Konačno, inverz gornje-trokutaste matrice je opet gornje-trokutasta matrica čiji dijagonalni elementi su recipročne vrijednosti od odgovarajućih dijagonalnih elemenata matrice A .

Sve što je rečeno za gornje-trokutaste matrice vrijedi i za donje-trokutaste.

Primjer 1.4.7. *Odredimo inverznu matricu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. *Korištenjem elementarnih transformacija, imamo*

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{dodajmo 2. redak} \times (-2) \text{ prvom} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{dodajmo 3. redak prvom retku} \\ \text{dodajmo 3. redak} \times (-2) \text{ drugom} \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{dodajmo 4. redak drugom retku} \\ \text{dodajmo 4. redak} \times (-2) \text{ trećem} \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= [I | B]. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Inverz matrice reda dva

Za matrice reda dva postoji jednostavna formula za inverznu matricu. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{tada je} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{uz uvjet } ad \neq bc.$$

Uvjet $ad - bc$ garantira da matrica ima puni rang, tj. da postoji inverz. Provjerite tu formulu množenjem matrice A sa matricom $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Primjer 1.4.8. Odredimo inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje. Prema gornjoj formuli, vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Riješimo sada taj zadatak pomoću algoritma za određivanje inverzne matrice. Sami zaključujte koje su elementarne transformacije korištene.

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

■

Već za matrice reda tri, opća formula za inverz je prilično komplicirana, pa je najzgodnije koristiti algoritam za računanje inverza.

Zadaci

1. Pomnožite matrice AA^{-1} i $A^{-1}A$ iz primjera 1.4.4. kako biste provjerili da je A^{-1} doista inverz. Isto načinite i za matrice iz primjera 1.4.5.. Što bi trebali promijeniti u zadnjem koraku metode u primjeru 1.4.5. da je polazna matrica imala $(4, 4)$ -element 2, a ne 1? Odredite A^{-1} u tom slučaju.

2. Koristeći formulu za inverz opće matrice reda dva, odredite formulu za inverz (a) gornje-trokutaste (b) donje-trokutaste matrica.
3. Odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Koristimo elementarne transformacije.

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -5/2 & -3/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/8 & -1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -5/3 & 8/3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/8 & -1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -5/3 & 8/3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -5/3 & 8/3 \end{array} \right], \end{aligned}$$

pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 5/3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2/3 & -5/3 & 8/3 \end{bmatrix}.$$

4. Izračunajte $X = AB^{-1}C$, ako je

$$(a) \quad A = [1 \ 1 \ 2], \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(X = [2] \in \mathbf{R}^{1 \times 1}).$$

$$(b) \quad A = [1 \ 0 \ 2], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(X = [4 \ -9]).$$

5. Izračunajte

$$(a) \quad A^{-2}b \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(A^{-2}b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}).$$

$$(b) \quad (AB)^{-1}, \text{ ako je } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{Rješenje: } (AB)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

6. Zadan je polinom $f(x) = 16x^2 - 8x + 15$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Izračunati $f(A^{-1})$.

Rješenje. $f(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 43 & 4 & -26 \\ 10 & 17 & -13 \\ 6 & -2 & 16 \end{bmatrix}.$

7. Zadan je polinom $f(x) = 8x^3 + 4x - 7$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.
Izračunati $f(A^{-1})$.

Rješenje. $f(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -18 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}.$

8. Odrediti inverznu matricu za svaku od sljedećih matrica

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & (A^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}). \\
 \text{(b)} \quad B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & (B^{-1} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}).
 \end{aligned}$$

■

1.4.4 Primjeri iz gospodarstva

Evo jednog primjera iz gospodarstva.

Primjer 1.4.9. Jedno poduzeće proizvodi dva tipa proizvoda T_1 i T_2 . Obrađuju se u dva odjela O_1 i O_2 . Odjel O_1 je odjel strojne obrade, a O_2 je odjel montaže i opreme. Broj sati potrebnih za svaki proizvod (po odjelima) dan je u matrici A ,

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} T_1 & T_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 270 & 120 \\ 50 & 40 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \end{array} \end{array} .$$

Označimo sa x_1 i x_2 količine (stotine komada) proizvoda T_1 i T_2 . Tada je vektor $x = [x_1 \ x_2]^T$ vektor proizvodnje. Izračunamo

$$Ax = \begin{bmatrix} 270 & 120 \\ 50 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270x_1 + 120x_2 \\ 50x_1 + 40x_2 \end{bmatrix} .$$

Dobiveni rezultat ovako interpretiramo: $270x_1 + 120x_2$ je ukupan broj sati potrebnih za proizvodnju u odjelu O_1 strojne obrade, a $50x_1 + 40x_2$ je ukupan broj sati potrebnih za proizvodnju u odjelu O_2 montaže i opreme.

Treba odrediti količinu proizvoda T_1 i T_2 koje se mogu dnevno proizvesti u sljedećim slučajevima:

- u odjelu strojne obrade O_1 utroši se 400 čovjek-sati dnevno (ukupan broj radnih sati svih zaposlenih u odjelu), a u odjelu montaže O_2 utroši se 100 čovjek-sati;
- zbog godišnjih odmora tijekom ljeta u odjelu O_1 ostvareno je samo 300 čovjek-sati dnevno dok je u odjelu O_2 ostvareno je samo 80 čovjek-sati dnevno;

(c) zbog obaveza za izvoz u odjelu O_1 ostvareno je 500 čovjek-sati dnevno dok je u odjelu O_2 ostvareno 120 čovjek-sati dnevno.

Rješenje. Označimo sa B_a , B_b , B_c vektore stupce koji će sadržavati sate rada odjela O_1 i O_2 u slučajevima (a), (b) i (c),

$$B_a = \begin{bmatrix} 400 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} 300 \\ 80 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 500 \\ 120 \end{bmatrix}.$$

Da bi odredili količine proizvoda T_1 i T_2 , moramo riješiti sljedeće probleme:

(a) $Ax = B_a$,

(b) $Ax = B_b$,

(c) $Ax = B_c$.

Matričnu jednadžbu oblika $Ax = b$, pri čemu je A kvadratna matrica reda dva, x je tipa 2×1 i b također tipa 2×1 , možemo riješiti množenjem s inverznom matricom A^{-1} s lijeve strane

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

To ima smisla jer imamo istu matricu A i više desnih strana: B_1 , B_2 i B_3 , a sav račun radimo "na ruke". Jer je $A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = Ix = x$, dobivamo

$$x = A^{-1}b.$$

Stoga su rješenja

(a) $x = A^{-1}B_a$

(b) $x = A^{-1}B_b$

(c) $x = A^{-1}B_c$.

Izračunajmo A^{-1} . Koristimo elementarne transformacije. Prvo ćemo pomnožiti prvi redak s $1/270$, a drugi s $1/50$, tako da dobijemo manje brojeve u lijevoj marici (to je jedan od načina da si olakšamo računanje kad radimo ručno).

$$\begin{aligned} [A | I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 270 & 120 & 1 & 0 \\ 50 & 40 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/9 & 1/270 & 0 \\ 1 & 4/5 & 0 & 1/50 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/9 & 1/270 & 0 \\ 0 & 16/45 & -1/270 & 1/50 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/9 & 1/270 & 0 \\ 0 & 1 & -1/96 & 9/160 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/120 & -1/40 \\ 0 & 1 & -1/96 & 9/160 \end{array} \right] = [I | A^{-1}], \end{aligned}$$

pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/120 & -1/40 \\ -1/96 & 9/160 \end{bmatrix}.$$

Sada koristimo A^{-1} u svakom pojedinom slučaju.

$$(a) \quad x = A^{-1}B_a = \begin{bmatrix} 1/120 & -1/40 \\ -1/96 & 9/160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 35/24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8\dot{3} \\ 1.458\dot{3} \end{bmatrix}.$$

Sjetimo se da x_1 i x_2 mjere količine u stotinama. Stoga se u ovom slučaju dnevno proizvodi 83 proizvoda T_1 i 146 proizvoda T_2 .

$$(b) \quad x = A^{-1}B_b = \begin{bmatrix} 1/120 & -1/40 \\ -1/96 & 9/160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 11/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.375 \end{bmatrix}.$$

Zbog godišnjih odmora dnevno se proizvodi samo 50 proizvoda T_1 i 137 proizvoda T_2 .

$$(c) \quad x = A^{-1}B_c = \begin{bmatrix} 1/120 & -1/40 \\ -1/96 & 9/160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 37/24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1\dot{6} \\ 1.541\dot{6} \end{bmatrix}.$$

Zbog pojačanog radnog učinka dnevno se proizvodi 5117 proizvoda T_1 i 154 proizvoda T_2 .

Matricu A^{-1} možemo odrediti i danom formulom jer je A reda dva. ■

1.5 Linearni sustavi

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi najvažniji je problem linearne algebre. Sustav može imati jednoznačno određeno rješenje, može biti bez ijednoga rješenja, ali može imati i beskonačno mnogo rješenja. Pokažimo to na primjerima sustava od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, kod kojih je uobičajeno nepoznanice označiti s x i y .

a) Sustav

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1, \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

ima jednoznačno određeno rješenje $(x, y) = (1, -2)$.

b) Sustav

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1, \\ 6x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

nema rješenja.

c) Sustav

$$\begin{aligned} 3x + y &= 1, \\ 6x + 2y &= 2. \end{aligned}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Jednu nepoznanicu, recimo y , možemo odrediti po volji, dok se druga računa iz $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y$.

Primjer 1.5.1. *Jedan savjetnik za investicije ima na raspolaganju dvije vrste investicija:*

- niskorizične koje godišnje vraćaju 10% polazne vrijednosti i
- visokorizične koje godišnje vraćaju 20% polazne vrijednosti.

Ako investitor ima na raspolaganju 500000 kn i želi da mu se godišnje vrati

- (a) *15% od te investicije,*
 (b) *18% od te investicije,*

kako treba investirati?

Rješenje. *Označimo sa x dio novca uloženog u niskorizične, a sa y dio novca uloženog u visokorizične investicije.*

(a) *Sustav glasi*

$$\begin{aligned} x + y &= 500000 \\ 0.1x + 0.2y &= 0.15 \cdot 500000. \end{aligned}$$

Prva jednadžba opisuje kako je sav novac uložen (raspodijeljen) na investicije, dok druga jednadžba opisuje povrat kamata odnosno novca zarađenog od investicija.

Pomnožimo drugu jednadžbu s 10. Zatim dodajmo prvu jednadžbu pomnoženu s -1 drugoj jednadžbi. Dobivamo $y = 250000$, pa je $x = 250000$.

(b) *Sustav glasi*

$$\begin{aligned} x + y &= 500000 \\ 0.1x + 0.2y &= 0.18 \cdot 500000. \end{aligned}$$

Na slični način dobivamo rješenje $y = 400000$, $x = 100000$.

Osnovna pouka u ovom primjeru glasi: što je veći željeni postotak zarade, veći je i rizik. ■

Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Rješenje ovoga sustava je svaka n -torka (x_1, x_2, \dots, x_n) koja uvrštena u (1.12) identički zadovoljava sve jednadžbe. I u općem slučaju, sustav može imati jednoznačno određeno rješenje, može biti bez ijednoga rješenja, ali može imati i beskonačno mnogo rješenja.

Ako koeficijente a_{ij} organiziramo u oblik matrice, skalare b_i u vektor-stupac, a isto i nepoznanice x_j , tada sustav linearnih jednadžbi (1.12) prelazi u matricnu jednadžbu

$$Ax = b, \quad (1.13)$$

gdje smo označili

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matrica $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ naziva se *matrica koeficijenata sustava*, vektor $x \in \mathbf{R}^n$ je *vektor nepoznanica*, a $b \in \mathbf{R}^m$ je *vektor desne strane* sustava ili vektor slobodnih članova. Vidimo da smo uz pomoć matrice sustav jednadžbi (1.12) uspjeli zapisati u kompaktnom obliku (1.13), koji nam omogućuje da primijenimo matricne transformacije i riješimo problem.

Spomenimo još jednu važnu interpretaciju rješavanja sustava (1.13). Neka je $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ stupčana particija matrice A . Dakle, stupce od A smo označili s a_1, a_2, \dots, a_n . Kao što znamo iz primjera 1.3.9., umnožak Ax možemo napisati u obliku linearne kombinacije stupaca matrice A ,

$$Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n,$$

a sustav (1.13) u obliku

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b. \quad (1.14)$$

Odrediti rješenje sustava (1.13) isto je što i odrediti koeficijente x_1, x_2, \dots, x_n tako da vektor b bude linearna kombinacija stupaca matrice A .

Sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako se vektor b može na beskonačno mnogo načina napisati u obliku linearne kombinacije stupaca matrice A .

Sustav ima jednoznačno određeno rješenje ako i samo ako se vektor b može na jednoznačan način napisati u obliku linearne kombinacije stupaca matrice A .

Sustav nema rješenje ako i samo ako ne postoji linearna kombinacija stupaca matrice A jednaka vektoru b .

1.5.1 Gauss-Jordanova metoda eliminacije

Opišimo *Gauss-Jordanovu metodu eliminacije* za rješavanje sustava $Ax = b$. Ona se sastoji u tome da se sustav (1.13) elementarnim transformacijama svede na ekvivalentan, iz kojeg ćemo moći na jednostavan način direktno odrediti rješenje. Dva su sustava *ekvivalentna* ako je svako rješenje jednog ujedno rješenje drugog i obratno. To znači da prelaskom na ekvivalentni sustav niti gubimo niti dobivamo nova rješenja.

Iz sustava jednačbi (1.12) dobivamo ekvivalentan sustav ako

- zamijenimo dvije jednačbe međusobno,
- pomnožimo neku jednačbu brojem različitim od nule,
- dodamo nekoj jednačbi drugu jednačbu pomnoženu brojem.

Za sustav (1.13) matrica

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (1.15)$$

naziva se *proširena matrica* sustava. Ona je "skraćeni prikaz" tog sustava. Zato, ako nam je dana matrica kao u relaciji (1.15) njoj je jednoznačno pridružen sustav oblika (1.13) koji se zapisuje i kao sustav linearnih jednačbi (1.12).

Transformacijama kojima iz zadanog sustava dobivamo ekvivalentan sustav odgovaraju sljedeće transformacije na proširenoj matrici sustava (1.15):

- zamjena redaka,
- množenje retka brojem različitim od nule,
- dodavanje nekom retku drugog retka pomnoženog brojem.

Primijetimo da su to iste elementarne transformacije kao i pri određivanju reduciranog oblika matrice.

Metoda koristi elementarne transformacije na proširenoj matrici (1.15) i svodi ju (skoro) na reducirani oblik. Pritom se matrica A svodi na reducirani oblik A_R ,

dok se vektor b transformira u neki vektor b' . Naime, u slučaju kad i zadnji stupac proširene matrice, pri kraju procesa redukcije proširene matrice na reduciranu formu, treba postati stožerni stupac, metoda se zaustavlja, tako da se b' ne pretvara u kanonski vektor e_n (kako bi zahtijevala reducirana forma proširene matrice) već ostaje b' . Kad zadnji stupac ne postaje stožerni, Gauss-Jordanova metoda se svodi na svađanje proširene matrice na reducirani oblik.

Time dobivamo ekvivalentni sustav čija je proširena matrica $[A_R|b']$. Može se pokazati da elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice. Stoga sve matrice koje metoda generira imaju isti rang. Zato polazna i završna proširena matrica imaju isti rang: $r([A|b]) = r([A_R|b'])$.

Primjer 1.5.2. *Svedimo proširenu matricu sustava*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2, \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0, \end{aligned}$$

na traženi (skoro) reducirani oblik $[A_R, b']$.

Rješenje. *Napišimo proširenu matricu sustava i elementarnim transformacijama svedimo matricu sustava A na oblik A_R .*

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo prvi redak } \times 4 \text{ drugom retku} \\ \text{dodajmo prvi redak } \times (-3) \text{ trećem retku} \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{array} \right] && \text{pomnožimo drugi redak s } \frac{1}{5} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{array} \right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo drugi redak } \times (-2) \text{ prvom retku} \\ \text{dodajmo drugi redak } \times 2 \text{ trećem retku} \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right] = [A_R | b']. \end{aligned}$$

Iz trećeg retka reducirane matrice čitamo jednadžbu

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$$

koja nema rješenja. Stoga nema rješenja niti početni sustav. ■

Ovaj primjer daje naslutiti kada sustav nema rješenja. Sustav nema rješenja ako nakon svođenja na reducirani oblik matrica A_R ima redak ispunjen nulama, ali

takav da se u istom retku vektora b' proširene matrice nalazi element koji nije nula. U primjeru 1.5.2. iz reduciranog oblika čitamo $r(A) = 2$, $r([A | b]) = 3$, tj. $r(A) < r([A | b])$.

Ako je $r(A) < r([A | b])$, sustav nema rješenja. Dakle, ako je rang matrice sustava A manji od ranga proširene matrice $[A | b]$, sustav nema rješenja.

To se odmah vidi i u općem slučaju. Naime, zbog $r(A_R) = r(A) < r([A | b]) = r([A_R | b'])$, zaključujemo da vektor b' ima između zadnjih $m - r(A_R)$ komponenti, komponentu koja nije nula. Ako je to l -ta komponenta, tada je l -ti redak od A_R nul-redak, a $b'_l \neq 0$. Sada u ekvivalentnom sustavu $A_R x = b'$ pogledajmo l -tu jednadžbu. Ona je oblika $0x_1 + \dots + 0x_n = b_l \neq 0$, tj. oblika $0 = b_l \neq 0$ što je nemoguće. Dakle, kad bi sustav $Ax = b$ imao rješenje, njegove komponente bi zadovoljavale “nemoguću jednadžbu”, pa zato sustav nema rješenje.

Ako je $r(A) < r([A | b])$, tada je zapravo $r([A | b]) = r(A) + 1$ jer se dodavanjem stupca (kod nas vektora b) rang matrice ne može povećati za više od jedan. U tom slučaju sustav nema rješenja, pa b ne može biti jednak nekoj linearnoj kombinaciji vektora-stupaca matrice A .

Postavlja se pitanje da li u protivnom, kad je $r(A) = r([A | b])$, sustav ima rješenje?

Primjer 1.5.3. Treba riješiti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 2, \\ x_1 - 8x_2 - 9x_3 &= -8, \\ 5x_1 + 5x_2 &= 14. \end{aligned}$$

Rješenje. Odredimo reducirani oblik proširene matrice

$$\begin{aligned} [A | b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -8 & -9 & -8 \\ 5 & 5 & 0 & 14 \end{array} \right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo prvi redak} \times (-2) \text{ drugom retku} \\ \text{dodajmo prvi redak} \times (-1) \text{ trećem retku} \\ \text{dodajmo prvi redak} \times (-5) \text{ četvrtom retku} \end{array} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{array} \right] && \text{pomnožimo drugi redak s } -\frac{1}{5} \\ \sim & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6/5 \\ 0 & -10 & -10 & -12 \\ 0 & -5 & -5 & -6 \end{array} \right] && \begin{array}{l} \text{dodajmo drugi redak} \times (-2) \text{ prvom retku} \\ \text{dodajmo drugi redak} \times 10 \text{ trećem retku} \\ \text{dodajmo drugi redak} \times 5 \text{ četvrtom retku} \end{array} \end{aligned}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8/5 \\ 0 & 1 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Dobili smo ekvivalentni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 &= 8/5, \\ x_2 + x_3 &= 6/5. \end{aligned}$$

Iz prvog retka dobivamo $x_1 - x_3 = 8/5$, pa je $x_1 = 8/5 + x_3$.

Iz drugog retka dobivamo $x_2 + x_3 = 6/5$, te je $x_2 = 6/5 - x_3$.

Treću nepoznanicu x_3 biramo po volji. Stavimo $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Slijedi $x_1 = 8/5 + \alpha$, $x_2 = 6/5 - \alpha$.

Rješenje sustava možemo zapisati u vektorskom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 + \alpha \\ 6/5 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $\alpha \in \mathbf{R}$ proizvoljan, vidimo da sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Vidimo i da je $r(A) = r([A | b]) = 2$. ■

U matrici A_R stožerne stupce (stupce sa stožernm jedinicom i svim ostalim elementima nula) još nazivamo *vezanim stupcima*, a pripadne nepoznanice (koje imaju isti indeks kao i taj stožerni stupac) *vezanim nepoznanicama*. Stupce koji nisu stožerni nazivamo *slobodnim stupcima*, a pripadne nepoznanice *slobodnim nepoznanicama*. Vezane nepoznanice određujemo preko slobodnih, iz redaka reducirane matrice. U primjeru 1.5.3. su prvi i drugi stupac vezani, pa su x_1 i x_2 vezane nepoznanice. Nepoznanica x_3 je slobodna.

Može se pokazati da vrijedi sljedeći važan teorem

Teorem 1.5.1. (Kronecker-Capelli) *Sustav $Ax = b$ ima rješenje ako i samo ako je rang matrice A jednak rangu proširene matrice $[A | b]$.*

Logički ekvivalentna izreka Kronecker-Capellijevu teoremu je: **Sustav $Ax = b$ nema rješenje ako i samo ako je rang matrice A manji od ranga proširene matrice $[A | b]$.**

Promotrimo prvo jednostavniji slučaj sustava $Ax = b$, kad je vektor b nulvektor.

1.5.2 Homogeni sustav

Homogeni sustav linearnih jednadžbi je sustav kod kojeg je desna strana jednaka nuli:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Takav sustav matricno zapisujemo $Ax = 0$ i on uvijek ima trivijalno rješenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, odnosno u vektorskom zapisu $x = 0$. I Kronecker-Capellijev teorem također garantira postojanje rješenja jer je $r(A) = r([A | 0])$. Postavlja se pitanje je li to jedino rješenje homogenog sustava?

Sustav $Ax = 0$ možemo kompaktno zapisati u obliku proširene matrice $[A | 0]$ koju elementarnim transformacijama možemo svesti na oblik $[A_R | 0]$ i onda naći rješenje. Međutim, kako transformacije nad retcima ne mijenjaju zadnji nultupac, dovoljno je na reducirani oblik svesti tek matricu A .

Ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ i ako A_R ima n stožernih stupaca, pa je oblika

$$A_R = \begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}, \quad O \in \mathbf{R}^{(m-n) \times n},$$

tada sustav $Ax = 0$ ima samo trivijalno rješenje $x = 0$.

To se lako zaključi. Sustav $Ax = 0$ je ekvivalentan sustavu $A_R x = 0$ pa ima ista rješenja. No, sustav $A_R x = 0$ se zapisuje kao (nećemo pisati zadnjih $m - n$ jednadžbi oblika $0 = 0$)

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ &\vdots \\ x_n &= 0, \end{aligned}$$

pa je $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ i nemamo drugih izbora za nepoznanice.

Primjer 1.5.4. Riješimo homogeni sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 - 8x_2 - 9x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 5x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Kako je matrica sustava A ista kao u prethodnom primjeru, za redukciju će se koristiti isti niz elementarnih transformacija, koji će ju transformirati u A_R ,

$$[A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -8 & -9 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow [A_R|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Iz matrice A_R čitamo da su vezane nepoznanice x_1 i x_2 , a slobodna je x_3 .

Iz prvog retka dobivamo $x_1 - x_3 = 0$ pa je $x_1 = x_3$.

Iz drugog retka dobivamo $x_2 + x_3 = 0$ pa je $x_2 = -x_3$.

Slobodnu nepoznanicu biramo po volji: $x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$.

Sada je $x_1 = x_3 = \alpha$ i $x_2 = -x_3 = -\alpha$, pa je rješenje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Opisani postupak u zadnjem primjeru možemo poopćiti na proizvoljnu matricu A .

Koraci pri rješavanju homogenog sustava

1. Sustav $Ax = 0$ napišemo u obliku $[A|0]$.
2. Elementarnim transformacijama svodimo $[A|0]$ na reduciranu matricu $[A_R|0]$.
3. Vrijednost slobodnih nepoznanica određujemo po volji, svaku nezavisno od ostalih. Vezane nepoznanice određujemo preko slobodnih, iz redaka reducirane matrice.
4. Rješenje zapisujemo u vektorskom obliku kao linearnu kombinaciju od $n - r$ vektora gdje je $r = r(A)$ je rang matrice A , odnosno broj vezanih nepoznanica.

Napomena 1.5.1. Neka je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, tako da A_R ima m redaka, n stupaca, r vezanih i $n - r$ slobodnih stupaca. Naznačimo indekse vezanih (stožernih) stupaca s j_1, j_2, \dots, j_r pri čemu je $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$. Elemente od A_R označimo s (a'_{ij}) . Svaki od spomenutih $n - r$ vektora može se i direktno očitati iz matrice A_R na sljedeći način.

Odaberimo jedan slobodan stupac. Neka je to k -ti stupac od A_R i neka su njegovi elementi a'_{1k}, a'_{2k}, \dots . Jedno rješenje homogenog sustava, označimo ga s f_k , dobivamo iz tog slobodnog stupca na sljedeći način:

1. svi elementi od f_k (ima ih n) definiraju se nulama,
2. na poziciju k stavi se 1,
3. na pozicije j_1, j_2, \dots stave se redom skalari $-a'_{1k}, -a'_{2k}, \dots$

Tada je opće rješenje homogenog sustava $A_R x = 0$, a time i sustava $Ax = 0$ proizvoljna linearna kombinacija tako dobivenih $n - r$ vektora f_k . ■

Evo kako postupak opisan u napomeni 1.5.1. izgleda na matrici A_R iz zadnjeg primjera. U matrici A_R je samo treći stupac slobodan, pa je opće rješenje homogenog sustava

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.5.5. Neka je

$$[A_R | 0] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Indeksi vezanah stupaca su $j_1 = 1, j_2 = 3, j_3 = 6$, dok su slobodni stupci 2., 4. i 5. Opće rješenje ima oblik

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Provjerite množenjem da je $A_R x = 0$ i $Ax = 0$. Za to je dovoljno provjeriti da je $A_R f_k = 0$. Pritom koristite množenje kao u primjeru 1.3.9. ■

Primjer 1.5.6. *Neka je*

$$[A_R | 0] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Vezani stupci imaju indekse $j_1 = 2$, $j_2 = 3$ i $j_3 = 5$, dok su slobodni stupci 1., 4. i 6. Opće rješenje ima oblik

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Provjerite množenjem da je $A_R x = 0$ i $Ax = 0$. ■

1.5.3 Nehomogeni sustav

U primjeru 1.5.3. riješili smo nehomogeni sustav, a u primjeru 1.5.4. pripadni homogeni sustav. Vidimo da se rješenje nehomogenog sustava u primjeru 1.5.3. može zapisati u obliku:

$$x = x_h + x_p,$$

gdje je

$$x_h = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{opće rješenje pripadnog homogenog sustava,}$$

a

$$x_p = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{jedno odabrano rješenje nehomogenog sustava.}$$

To rješenje x_p se naziva *partikularno* rješenje nehomogenog sustava.

Može se pokazati da vrijedi sljedeći generalni teorem

Teorem 1.5.2. *Opće rješenje sustava $Ax = b$ ima oblik $x = x_h + x_p$, gdje je x_h opće rješenje pripadnoga homogenog sustava $Ax = 0$, a x_p jedno partikularno rješenje nehomogenog sustava.*

Teorem kaže da se sva rješenja sustava $Ax = b$ dobiju tako da na bilo koje rješenje x_p nehomogenog sustava (npr. koje znamo ili koje možemo izračunati) dodamo sva rješenja homogenog sustava $Ax = 0$.

Određivanje partikularnog rješenja

Možemo li iz reducirane matrice $[A_R | b']$ očitati neko partikularno rješenje?

Doista možemo. Da bismo opisali postupak, pretpostavimo kao i prije da je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ranga r . Dakle, A_R ima m redaka i n stupaca, također ima r vezanih i $n-r$ slobodnih stupaca. Pritom $b' \in \mathbf{R}^m$ ima samo prvih r komponenta različitih od nule, jer je $r(A) = r([A | b])$.

Svaki od r vezanih stupaca ima jednu jedinicu dok su ostale komponente nula. Istaknimo u A_R sve vezane stupce,

$$A_R = [\dots, \tilde{a}_{j_1}, \dots, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_2}, \dots, \tilde{a}_{j_r}, \dots]$$

Sada slijedi konstrukcija:

$$\text{Ako je } b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{tada je } x_p = \begin{bmatrix} \vdots \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_r \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_r \end{matrix}$$

pri čemu su sve komponente od x_p , osim onih na pozicijama j_1, j_2, \dots, j_r nule.

Primjer 1.5.7. *Neka je proširena matrica $[A | b]$ svedena na reducirani oblik*

$$[A_R | b'] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Partikularno rješenje ćemo odrediti prema navedenom pravilu. Prvo odredimo indekse vezanih (stožernih) stupaca. To su $j_1 = 2$, $j_2 = 4$, $j_3 = 6$. Vektor x_p ima $n = 6$ komponenta. Prvo stavimo nule kao vrijednosti svih komponenta. Zatim na pozicije j_1 , j_2 i j_3 stavimo komponente od b , 4 , 2 i -2 , respektivno. Tako smo dobili $x_p = [0 \ 4 \ 0 \ 2 \ 0 \ -2]^\top$. ■

Sada možemo dati upute kako naći opće rješenje sustava $Ax = b$.

Koraci za nalaženje općeg rješenja nehomogenoga sustava.

1. Sustav $Ax = b$ napišemo u obliku proširene matrice $[A \mid b]$.
2. Elementarnim transformacijama svodimo sustav na njemu ekvivalentan $[A_R \mid b']$. Ako je $r(A) < r([A \mid b])$, sustav nema rješenja. U protivnom označimo slobodne i vezane nepoznanice.
3. Odredimo vrijednosti slobodnih nepoznanica po volji i pročitamo iz redaka proširene matrice vrijednosti vezanih nepoznanica.
4. Napišemo rješenje u vektorskom obliku.

Točke 3. i 4. možemo zamijeniti s

3'. Iz matrice $[A_R \mid b']$ odredimo partikularno rješenje x_p i zatim, kao u napomeni 1.5.1., odredimo vektore f_k gdje k prolazi svim indeksima slobodnih stupaca matrice A_R . Tada je opće rješenje sustava $Ax = b$,

$$x = x_p + \sum_k \alpha_k f_k.$$

Primjer 1.5.8. Riješimo sustav

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5, \\ x + y - z &= 0, \\ 4x - y + 5z &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje. Napišimo proširenu matricu i pokrenimo Gauss-Jordanov algoritam. Dobivamo sljedeće matrice,

$$\begin{aligned} [A \mid b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dobili smo $A_R = I$. Čim je $A_R = I$ odmah zaključujemo da je rang matrice A jednak je rangu proširene matrice. Ovdje je on 3. Jer je $r = n$, pripadni homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje, pa je rješenje sustava jednoznačno određeno, što znači $x = x_p$. Rješenje x čitamo iz reduciranog oblika (to je ujedno i partikularno rješenje)

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

U vektorskom obliku,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Do istog zaključka možemo doći i koristeći napomenu 1.5.1. jer vrijedi $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ i $j_3 = 3$. ■

Primjer 1.5.9. Riješimo sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 - 5x_5 &= -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 10x_4 - 9x_5 &= -3. \end{aligned}$$

Rješenje. Primjenom Gauss-Jordanove metode na proširenu matricu, dobivamo

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & -10 & -9 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & -8 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & -8 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Rang matrice sustava jednak je rangu proširene matrice (iznosi 3), pa rješenje postoji. Vezane nepoznanice su x_1, x_2, x_3 , a slobodne su x_4, x_5 (isto vrijedi za stupce). Stavimo $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Iz redaka proširene matrice čitamo

$$\begin{aligned}x_1 - \alpha + 2\beta &= 1, \\x_2 + 3\alpha + \beta &= 1, \\x_3 - \alpha - \beta &= 0.\end{aligned}$$

pa lako dobivamo

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + \alpha - 2\beta, \\x_2 &= 1 - 3\alpha - \beta, \\x_3 &= \alpha + \beta, \\x_4 &= \alpha, \\x_5 &= \beta.\end{aligned}$$

U vektorskom obliku rješenje glasi

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdje su α i β proizvoljni skalari. Ovdje je opće rješenje pripadnoga homogenog sustava

$$x_h = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

(Provjerite to rješenje upotrebom napomene 1.5.1.) Partikularno rješenje nehomogenoga sustava je

$$x_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Partikularno rješenje možete lako dobiti i korištenjem točke 3' u uputama za rješavanje općeg rješenja sustava. ■

Opisali smo Gauss-Jordanovu metodu eliminacije koja je jedna inačica originalne Gaussove metode eliminacija. Kod Gaussove metode se elementarnim

transformacijama postižu nule samo ispod stožernih elemenata, a ne i iznad njih kao kod Gauss-Jordanove metode. Čak se ni stožerni elementi ne svađaju na jedinice, već ostaju takvi kakvi jesu. Na taj način se dobije ekvivalentan sustav, kod kojeg se prvo odredi zadnja nepoznanica x_n , pa predzadnja x_{n-1} i tako redom do prve nepoznanice x_1 . Taj dio algoritma se zato zove *povratna supstitucija*.

Kad se Gaussov algoritam implementira na računalu, tada je potrebno voditi računa o tzv. greškama zaokruživanja koje prate svaku računsku operaciju. Stoga se koristi i tzv. pivotiranje koje osigurava da su stožerni elementi što veći u svakom glavnom koraku. Pokazuje se da je Gaussova metoda s tzv. parcijalnim pivotiranjem dovoljno točna i brza za većinu primjena na računalu. Za razliku od nje, Gauss-Jordanova metoda (makar i ona koristila parcijalno pivotiranje) može biti osjetljiva na greške zaokruživanja, pa može na računalu dati netočne rezultate.

Dokazano je da se opći sustav linearnih jednadžbi ne može riješiti korištenjem elementarnih transformacija s manje aritmetičkih operacija nego što ih je potrebno za Gaussovu metodu eliminacije.¹ Postoji veliki broj varijanti Gaussove metode eliminacije, pod raznim nazivima. Sve te metode su algebarski istovjetne Gaussovom postupku, a razlikuju se od njega najčešće po tome kako se pamte međurezultati, po redosljedu eliminacija ili po mjerama koje se poduzimaju radi smanjenja utjecaja grešaka zaokruživanja. Postoje i varijante prilagođene specijalnim tipovima matrica, kod kojih se do rješenja dolazi jednostavnije nego u općem slučaju.

Opisana Gauss-Jordanova metoda eliminacije zahtjeva oko 50 % više aritmetičkih operacija od Gaussove metode. Međutim, kod rješavanja nekih drugih problema, na primjer kod određivanja inverzne matrice (vidi točku 2.4.1), Gauss-Jordanova metoda eliminacije je po broju operacija ravnopravna Gaussovoj metodi. Ipak, kad se radi na računalu, zbog osjetljivosti na greške zaokruživanja, Gaussova metoda i njene varijacije imaju prednost pred Gauss-Jordanovom metodom.

Međutim, kad radimo “na ruke”, male sustave i inverze matrica rješavamo lakše Gauss-Jordanovom metodom eliminacije.

1.5.4 Primjeri iz gospodarstva

Primjer 1.5.10. *Neka tvornica proizvodi tri tipa štednjaka: super, compact i deluxe. Svaki tip mora proći kroz tri različita odjela: O_1 (proizvodnja dijelova), O_2 (sklapanje dijelova) i O_3 (poliranje). Trajanje obrada u tim odjelima (u satima) po jedinici proizvoda, dani su u tabeli.*

¹To su dokazali 1965. V. V. Kljuev i Kohovkin-Ščerbak N. I.

	super	compact	deluxe
O_1	0.4	0.5	0.5
O_2	0.25	0.3	0.4
O_3	0.2	0.2	0.2

Odjeli O_1, O_2, O_3 raspolažu tjednim kapacitetom od redom

(a) 37, 25, 16

(b) 40, 27.25, 17

sati. Koliko se štednjaka svakog tipa mora tjedno proizvoditi da bi tvornica radila punim kapacitetom?

Rješenje. Označimo sa x_1 broj komada štednjaka super, sa x_2 broj komada štednjaka compact i sa x_3 broj komada štednjaka deluxe.

(a) Da bi tvornica radila punim kapacitetom, mora biti zadovoljen sljedeći sustav jednačbi

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 &= 37 \\ 0.25x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 &= 25 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Riješimo sustav Gaussovom metodom eliminacija. Kako ne radimo na računalu, prvo malo preuredimo sustav, množeći prvu jednačbu sa 20, drugu sa 10 i treću sa 5. Zatim zamijenimo prvu i treću jednačbu, da bi dobili jedinice u prvoj jednačbi. Dakle, polazimo od proširene matrice

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 25 & 30 & 40 & 2500 \\ 8 & 10 & 10 & 740 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 5 & 15 & 500 \\ 0 & 2 & 2 & 100 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 5 & 15 & 500 \\ 0 & 0 & -4 & -100 \end{array} \right].$$

Na kraju eliminacija smo dobili trokutasti sustav

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 80 \\ 5x_2 + 15x_3 &= 500 \\ -4x_3 &= -100 \end{aligned}$$

Iz treće jednačbe slijedi $x_3 = 25$, a iz druge dobivamo $x_2 = (500 - 15 \cdot 25)/5 = 25$. Uvrštavanjem vrijednosti za x_2 i x_3 u prvu jednačbu, dobivamo $x_1 = 80 - 25 - 25 = 30$.

Da bi tvornica radila punim kapacitetom, tjedno mora proizvesti 30 štednjaka tipa super i po 25 štednjaka tipa compact i deluxe.

(b) U ovom slučaju polazni sustav ima desnu stranu $[40 \ 27.25 \ 17]^T$, a rješenje se dobije na sličan način. Potrebno je proizvesti po 25 štednjaka tipa super i po 30 štednjaka tipa compact i deluxe. ■

Primjer 1.5.11. Poduzeće plaća godišnji porez na (oporezivi) dohodak koji iznosi 1 664 000 kn. Državni porez iznosi 25% od dohotka koji ostane nakon što se plati porez gradu i županiji. Županijski porez iznosi 10% od dohotka koji ostane nakon što se plati porez državi i gradu, te gradski porez koji iznosi 5% od dohotka koji ostane nakon što se plati državni i županijski porez. Izračunajmo iznos državnog, županijskog i gradskog poreza koje poduzeće mora platiti.

Rješenje. Neka je a iznos ukupnog godišnjeg dohotka koji podliježe porezu (u konkretnom primjeru je $a = 1\,664\,000$). Neka je x_1 iznos državnog poreza, x_2 iznos županijskog, a x_3 iznos gradskog poreza. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.25(a - x_2 - x_3) \\x_2 &= 0.10(a - x_1 - x_3) \\x_3 &= 0.05(a - x_1 - x_2)\end{aligned}$$

Množeći prvu jednadžbu sa 4, drugu sa 10 i treću sa 20, te separiranjem varijabli na lijevu, a slobodnih članova na desnu stranu svake jednadžbe, dobivamo sustav

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 20x_3 &= a \\x_1 + 10x_2 + x_3 &= a \\4x_1 + x_2 + x_3 &= a\end{aligned}$$

koji rješavamo Gaussovom metodom.

$$\begin{aligned}[A|b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 20 & a \\ 1 & 10 & 1 & a \\ 4 & 1 & 1 & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 20 & a \\ 0 & \boxed{9} & -19 & 0 \\ 0 & -3 & -79 & -3a \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 20 & a \\ 0 & 9 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{256}{3} & -3a \end{array} \right].\end{aligned}$$

Dobiveni trokutasti sustav

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 20x_3 &= a \\9x_2 - 19x_3 &= 0 \\-\frac{256}{3}x_3 &= -3a\end{aligned}$$

rješavamo povratnim postupkom,

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{9}{256}a \\x_2 &= \frac{19}{9}x_3 = \frac{19}{256}a \\x_1 &= a - \frac{19}{256}a - \frac{180}{256}a = \frac{57}{256}a.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za a , dobivamo vrijednosti u kunama

$$x_1 = 370500,$$

$$x_2 = 123500,$$

$$x_3 = 58500.$$

■

Zadaci

1. Riješite sustav Gauss-Jordanovom metodom eliminacije

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + -6x_4 &= -10. \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

(c)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2, \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5, \\ x_1 - x_2 &- x_4 + 2x_5 = 1. \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

1.6 Međusektorski model Leontiefa

Međusektorska analiza bavi se pitanjem na kojoj bi razini proizvodnje svaka od n industrija trebala proizvoditi da bi se zadovoljila ukupna potražnja za njihovim proizvodima.

Proizvodnja svake industrije, npr. automobila, potrebna je za normalnu proizvodnju u mnogim drugim industrijama, a također i u samoj sebi (industriji automobila). Prema tome razina proizvodnje automobila ovisi o zahtjevima svih n industrija za automobilima. Obrnuto, proizvodnje drugih industrija ući će u proizvodnju automobila kao komponente u finalnom proizvodu, pa će razine proizvodnje drugih industrija ovisiti i o zahtjevima industrije automobila za njihovim proizvodima.

Da bi se pojednostavila analiza, obično se koriste sljedeće pretpostavke:

1. svaka industrija proizvodi samo jedan proizvod.
2. svaka industrija koristi za proizvodnju svog proizvoda fiksnu količinu proizvoda drugih industrija.
3. svaka k -struka promjena (k -struko povećanje ili smanjenje) potražnje ulaznih proizvoda rezultira s k -strukom promjenom (povećanjem ili smanjenjem) proizvodnje.

Većina tih pretpostavki neće posve odgovarati onome što se realno događa. Kadkad je ipak moguće načiniti prilagodbe modelu, npr. ako neka industrija proizvodi dva proizvoda, onda se ona može razdijeliti u dvije industrije.

Iz ovih pretpostavki slijedi da je za proizvodnju svake jedinice j -tog proizvoda (proizvoda j -te industrije) potrebna fiksna količina i -tog proizvoda. Označit ćemo ju sa a_{ij} . Tako će proizvodnja jedinice j -tog proizvoda zahtijevati količinu a_{1j} prvog proizvoda, količinu a_{2j} drugog proizvoda, itd. količinu a_{nj} n -tog proizvoda. Uočimo da se kod elementa a_{ij} prvi indeks odnosi na utrošak, a drugi na proizvodnju jer a_{ij} pokazuje koliko se i -tog proizvoda koristi za jedinicu j -tog proizvoda. Realni broj a_{ij} se naziva *input-output koeficijent* ili *tehnički koeficijent*. Pomoću tih koeficijenata je definirana matrica input-output koeficijenata (ili matrica tehničkih koeficijenata)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

koju ćemo zvati i *input-output matrica*. U matrici A , j -ti stupac određuje zahtjeve za proizvodima drugih industrija u svrhu proizvodnje jedinice (npr. vrijednosti \$1) proizvoda j -te industrije.

Pored spomenutih n industrija, model može sadržavati i jedan otvoreni sektor (recimo kućanstva) koji egzogeno određuje finalnu potražnju za proizvodom svake industrije (potražnja koja nije utrošak ni za jednu industriju) i koji daje *primarni faktor* (recimo rad) koji nije proizveden ni u jednoj od n industrija. Takav se model zove *otvoreni model*.

S obzirom da postoji otvoreni sektor, zbroj elemenata svakog stupca input-output matrice A mora biti manji od 1. To je zato jer zbroj elemenata j -tog stupca pokazuje tek djelomične troškove faktora, troškove bez troškova primarnog faktora, u proizvodnji jednog dolara vrijednosti j -tog proizvoda. Kad bi ta suma bila ≥ 1 , tada ta proizvodnja ne bi bila ekonomski opravdana. Uvjet možemo zapisati kao

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nadalje, budući da vrijednost proizvodnje mora biti raspodjeljena na sve faktore proizvodnje, mora $1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}$ biti isplata primarnom faktoru otvorenog sektora.

Input-output matrica ima sve elemente nenegativne ($a_{ij} \geq 0$ za sve i, j). Takvu matricu nazivamo *nenegativna matrica*. Također, vektor finalne potražnje y ima sve elemente nenegativne ($y_i \geq 0$ za sve i) pa je y nenegativan vektor.

Traženi vektor proizvodnje x , također treba biti nenegativan. Vektor x zadovoljava jednadžbu

$$x = Ax + y \quad \text{ili ekvivalentno} \quad (I - A)x = y.$$

$I - A$ se naziva *matrica tehnologije*. Napišimo relaciju $x = Ax + y$ koristeći particiju po stupcima $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ matrice A ,

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n + y.$$

Vektor x sadrži kao komponente količine proizvoda svih industrija. Stupac a_j pokazuje raspodjelu zahtjeva za svim proizvodima da se načini jedinična količina j -tog proizvoda. Tada komponente vektora $x_j a_j$ pokazuju raspodjelu zahtjeva za proizvodima svih industrija koju potražuje j -ta industrija. Kad se sumiraju svi ti vektori imamo ukupnu raspodjelu potreba svih industrija od strane svih industrija. Pritom je i -ta komponenta vektora $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ ukupni zahtjev svih industrija za proizvodom i -te industrije. Dodajući toj komponenti još komponentu finalne potražnje y_i , dobivamo vektor ukupnih zahtjeva za proizvodom i -te industrije. Gledajući sve komponente od $Ax + y$, dobivamo raspodjelu ukupne potražnje svih industrija koja mora biti i vektor ukupne proizvodnje, dakle x .

Kada sustav $(I - A)x = y$ ima nenegativno rješenje? Odgovor na to pitanje daje

Teorem 1.6.1. *Neka je A nenegativna kvadratna matrica reda n sa svojstvom da je zbroj elemenata svakog stupca manji od jedan. Tada $(I - A)^{-1}$ postoji i ima sve elemente nenegativne. Stoga je i $(I - A)^{-1}y$ nenegativan vektor čim je y nenegativan.*

Kod otvorenog modela je $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$ i $a_{ij} \geq 0$ za sve i, j , pa po teoremu $(I - A)^{-1}$ postoji. Ako pomnožimo obje strane jednadžbe $(I - A)x = y$ s lijeva sa $(I - A)^{-1}$, dobivamo $(I - A)^{-1}[(I - A)x] = (I - A)^{-1}y$. Kako je zbog asocijativnosti matičnog množenja

$$(I - A)^{-1}[(I - A)x] = [(I - A)^{-1}(I - A)]x = Ix = x,$$

vrijedi

$$x = (I - A)^{-1}y$$

i to je jedinstveno rješenje sustava $x = Ax + y$. Pritom su i matrica $(I - A)^{-1}$ i vektor y nenegativni, pa mora i x kao produkt nenegativne matrice i nenegativnog vektora biti nenegativan.

Primjer 1.6.1. *Pretpostavimo da jedna ekonomija ima tri sektora: poljoprivredu, stočarstvo i obrt. Označimo ih sa 1, 2 i 3. Pretpostavimo da je matrica input-output koeficijenata*

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo vektor ukupne proizvodnje x koji će dovesti do vektora finalne potražnje $y = [4 \ 3 \ 1]^T$.

Rješenje. Traženi vektor x zadovoljava jednažbu

$$x = (I - A)^{-1}y.$$

Izračunajmo prvo $I - A$,

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 & -0.5 \\ -0.1 & -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

i zatim $(I - A)^{-1}$. Na početku postupka za računanje inverzne matrice pomnožimo retke proširene matrice redom skalarima 10/8, 10 i 10. Dobivamo

$$\begin{aligned} [I - A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.8 & -0.1 & -0.3 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.6 & -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 0.9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.125 & -0.375 & 1.25 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -5 & 0 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 9 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.125 & -0.375 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 5.875 & -5.375 & 1.25 & 10 & 0 \\ 0 & -2.125 & 8.625 & 1.25 & 0 & 10 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0.125 & -0.375 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.915 & 0.213 & 1.702 & 0 \\ 0 & -2.125 & 8.625 & 1.25 & 0 & 10 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0.489 & 1.277 & 0.213 & 0 \\ 0 & 1 & -0.915 & 0.213 & 1.702 & 0 \\ 0 & 0 & 6.681 & 1.703 & 3.617 & 10 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1.40 & 0.48 & 0.73 \\ 0 & 1 & 0 & 0.45 & 2.20 & 1.37 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 & 0.54 & 1.50 \end{array} \right], \end{aligned}$$

pa je

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.40 & 0.48 & 0.73 \\ 0.45 & 2.20 & 1.37 \\ 0.25 & 0.54 & 1.50 \end{bmatrix}.$$

Množenjem te matrice s vektorom y , dobivamo

$$x = \begin{bmatrix} 1.40 & 0.48 & 0.73 \\ 0.45 & 2.20 & 1.37 \\ 0.25 & 0.54 & 1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.77 \\ 9.77 \\ 4.12 \end{bmatrix}$$

Odavde, $x_1 = 7.77$, $x_2 = 9.77$ i $x_3 = 4.12$ su količine dobara koje treba proizvesti u sektorima 1, 2 i 3, respektivno da bi ostao višak proizvedenih dobara u odnosu na potrošenim dobrima u navedenim sektorima. Višak u sektoru 1. je 4, u sektoru 2. je 3, a u sektoru 3. je 1. ■

Napomena 1.6.1. Zadamo li neki drugi vektor finalne potražnje \bar{y} , a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, vektor ukupne proizvodnje \bar{x} dobivamo koristeći već izračunatu inverznu matricu $(I - A)^{-1}$, tj. $\bar{x} = (I - A)^{-1}\bar{y}$. ■

Neka je privreda podijeljena na sektore ili grane ili industrije. Podaci o privredi mogu biti prikazani u tablici. Npr. ako imamo tri grane

ukupna proizvodnja totalni output	Interindustrijska potražnja ili reprodukcijaska potražnja x_{ij}			finalna potražnja y_i
x_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1
x_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2
x_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3

Ovu tabelu nazivamo *input-output tabela*. Tri su privredne grane. Sve tri grane proizvode za potrebe tog privrednog sustava i to za potrebe svoje grane i za potrebe ostalih dviju grana. Takvu proizvodnju namijenjenu proizvodnoj potražnji nazivamo *intermedijarna reprodukcijaska potražnja*. U tabeli y_i predstavlja finalnu potražnju svake grane i y_i je razlika između proizvedenih dobara x_i i dobara potrošenih u sustavu $y_i = x_i - x_{i1} - x_{i2} - x_{i3}$ za $i = 1, 2, 3$. Veličine u tabeli mogu biti izražene u vrijednosnim jedinicama ili u naturalnim pokazateljima. Ako su u input-output tabeli veličine izražene u naturalnim pokazateljima, formirat ćemo matricu tehničkih koeficijenata odnosno matricu input-output koeficijenata A danu u (1.16). Pritom input-output koeficijent $a_{ij} = x_{ij}/x_j$, $a_{ij} \geq 0$ označava dio proizvoda (output) grane i koji se koristi za jedinicu proizvoda j -te grane.

Primjer 1.6.2. Zadana je input-output tabela jedne ekonomije

	x_{ij}			y_i
	30	40	10	20
	20	40	0	140
	30	50	60	40

Ako se planiraju novi outputi $[200 \ 400 \ 360]^\top$, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, sastavimo novu input-output tabelu.

Rješenje. Vektor ukupne proizvodnje x određujemo iz zadane tabele

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 30 + 40 + 10 + 20 = 100,$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 20 + 40 + 0 + 140 = 200,$$

$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 30 + 50 + 60 + 40 = 180.$$

Dakle je $x = [100 \ 200 \ 180]^\top$. Sada možemo napisati cijelu input-output tabelu

x_i	x_{ij}			y_i
100	30	40	10	20
200	20	40	0	140
180	30	50	60	40

Matrica input-output koeficijenata A ima elemente $a_{ij} = x_{ij}/x_j$, pa su elementi

- prvog stupca matrice A : $\frac{1}{100} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix},$
- drugog stupca matrice A : $\frac{1}{200} \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.20 \\ 0.25 \end{bmatrix},$
- trećeg stupca matrice A : $\frac{1}{180} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/18 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$

Dobivamo

$$A = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.05 \\ 0.20 & 0.20 & 0 \\ 0.30 & 0.25 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

Sjetimo se da općenito vrijedi $y = (I - A)x$. Mi imamo novi vektor outputa $x = [200 \ 400 \ 360]^\top$ i znamo da se tehnološki uvjeti nisu promijenili pa je matrica A ista. Stoga je

$$\bar{y} = (I - A)\bar{x},$$

ili s konkretnim podacima

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0.70 & -0.20 & -0.05 \\ -0.20 & 0.80 & 0 \\ -0.30 & -0.25 & 0.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 280 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

U novoj tabeli elementi \bar{x}_{ij} dobivaju se iz jednadžbi

$$a_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij}}{\bar{x}_j} \quad \text{pa je} \quad \bar{x}_{ij} = a_{ij}\bar{x}_j.$$

Odavde slijedi da za dobivanje dijela tabele ispod naznake x_{ij} , prvi stupac matrice A moramo pomnožiti s 200, drugi stupac sa 400, a treći sa 360. Nova input-output tabela ima oblik

x_i	x_{ij}			y_i
200	60	80	20	40
400	40	80	0	280
360	60	100	120	80

Lako se provjeri da je za svako i ispunjeno $\bar{y}_i = \bar{x}_i - (\bar{x}_{i1} + \bar{x}_{i2} + \bar{x}_{i3})$. ■

Primjer 1.6.3. Zadana je input-output tabela jedne ekonomije

x_i	x_{ij}		y_i
180	45	60	
240	90	40	

Odredimo

- vektor finalne potražnje,
- matricu input-output koeficijenata i matricu tehnologije,
- ako se planiraju nove finalne potražnje $[60 \ 120]^T$ i $[30 \ 100]^T$, a tehnološki uvjeti se ne mijenjaju, napišite novu input-output tabelu.

Rješenje. (a) Komponente vektora finalne potražnje dobivamo danih podataka

$$\begin{aligned} y_1 &= 180 - (45 + 60) = 75 \\ y_2 &= 240 - (90 + 40) = 110, \end{aligned}$$

pa tabela ima oblik

x_i	x_{ij}		y_i
180	45	60	75
240	90	40	110

(b) Matrica input-output koeficijenata je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{45}{180} & \frac{60}{240} \\ \frac{90}{180} & \frac{40}{240} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

dok je matrica tehnologije

$$I - A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

Provjerimo,

$$y = (I - A)x = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

(c) Kako se tehnološki uvjeti ne mijenjaju, matrica input-output koeficijenata je A , a matrica tehnologije je $I - A$. Za vektor finalne potražnje $\bar{y} = [60 \ 120]^T$, vektor ukupne proizvodnje \bar{x} dobivamo iz jednadžbe

$$\bar{x} = (I - A)^{-1}\bar{y}.$$

Matrica $(I - A)^{-1}$ se može izračunati npr. pomoću algoritma koji smo upoznali (provjerite sami) i dobije se

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 240 \end{bmatrix}.$$

Slično kao u prethodnom primjeru, dobivamo input-output tabelu

x_i	$x_{ij} = a_{ij}x_j$		y_i
160	$\frac{1}{4} \cdot 160$	$\frac{1}{4} \cdot 240$	60
240	$\frac{1}{2} \cdot 160$	$\frac{1}{6} \cdot 240$	120

odnosno

x_i	x_{ij}		y_i
160	40	60	60
240	80	40	120

Ako je vektor finalne potražnje $[30 \ 100]^T$ dobivamo na slični način input-output tabelu

x_i	x_{ij}		y_i
100	25	45	30
180	50	30	100

Primjer 1.6.4. Zadana je matrica tehnologije

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Neka je

- (a) ukupni output prvog sektora 10, ukupni output trećeg sektora 30 i finalna potražnja prvog sektora 1.
- (b) ukupni output prvog sektora 100, finalna potražnja drugog sektora 50 i finalna potražnja trećeg sektora 100.

Sastavimo pripadne input-output tabele.

Rješenje. Zadana je matrica tehnologije

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

(a) U vektoru ukupnih outputa znamo $x_1 = 10$, $x_3 = 30$, pa je

$$x = \begin{bmatrix} 10 \\ x_2 \\ 30 \end{bmatrix},$$

a u vektoru finalne potražnje je $y_1 = 1$, pa je

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Nepoznanice x_2 , y_2 i y_3 određujemo iz relacije

$$y = (I - A)x.$$

Imamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ x_2 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 0.1x_2 - 6 \\ -3 + 0.8x_2 - 12 \\ -2 - 0.3x_2 + 27 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 0.1x_2 \\ y_2 &= -15 + 0.8x_2 \\ y_3 &= 25 - 0.3x_2. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $x_2 = 30$ i to uvrstimo u drugu i treću jednadžbu. Dobivamo $y_2 = 9$ i $y_3 = 16$. Dakle, dobili smo

$$x = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix} \quad i \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Iz matrice input-output koeficijenata, dobit ćemo, kao u prethodnom primjeru, input-output tabelu.

Iz $A = I - (I - A)$, slijedi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

pa je input-output tabela

x_i	x_{ij}			y_i
10	$0 \cdot 10$	$0.1 \cdot 30$	$0.2 \cdot 30$	1
30	$0.3 \cdot 10$	$0.2 \cdot 30$	$0.4 \cdot 30$	9
30	$0.2 \cdot 10$	$0.3 \cdot 30$	$0.1 \cdot 30$	16

odnosno

x_i	x_{ij}			y_i
10	0	3	6	1
30	3	6	12	9
30	2	9	3	16

(b) Ovdje je zadano

$$x_1 = 100, \quad y_2 = 50, \quad y_3 = 100.$$

Koristeći matricu input-output koeficijenata A koja je izračunata u (a), možemo input-output tabelu pisati u obliku

x_i	x_{ij}			y_i
100	$0 \cdot 100$	$0.1 \cdot x_2$	$0.2 \cdot x_3$	y_1
x_2	$0.3 \cdot 100$	$0.2 \cdot x_2$	$0.4 \cdot x_3$	50
x_3	$0.2 \cdot 100$	$0.3 \cdot x_2$	$0.1 \cdot x_3$	100

Odavde dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 100 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= y_1 \\ x_2 - 30 - 0.2x_2 - 0.4x_3 &= 50 \\ x_3 - 20 - 0.3x_2 - 0.1x_3 &= 100. \end{aligned}$$

Napišimo sustav u obliku

$$\begin{aligned} y_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 &= 100 \\ 0.8x_2 - 0.4x_3 &= 80 \\ -0.3x_2 + 0.9x_3 &= 120. \end{aligned}$$

Sustav riješimo Gaussovom metodom, pri čemu pivotne elemente svedimo na 1,

$$\begin{aligned} [A | b] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.1 & 0.2 & 100 \\ 0 & 0.8 & -0.4 & 80 \\ 0 & -0.3 & 0.9 & 120 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.1 & 0.2 & 100 \\ 0 & 1 & -0.5 & 100 \\ 0 & -0.3 & 0.9 & 120 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.1 & 0.2 & 100 \\ 0 & 1 & -0.5 & 100 \\ 0 & 0 & 0.75 & 150 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.1 & 0.2 & 100 \\ 0 & 1 & -0.5 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dobivamo,

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_3 &= 200, & \text{pa je } x_3 &= 200 \\ 1 \cdot x_2 - 0.5 \cdot x_3 &= 100, & \text{pa je } x_2 &= 200 \\ y_1 + 0.1 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_3 &= 100, & \text{pa je } y_1 &= 40. \end{aligned}$$

Tražena input-output tabela ima oblik

x_i	x_{ij}			y_i
100	$0 \cdot 10$	20	40	40
200	30	40	80	50
200	20	60	20	100

Primjer 1.6.5. Zadana je matrica tehnologije jedne ekonomije

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Neka je količina outputa koja iz drugog sektora prelazi u prvi 50, i neka je finalna potražnja prvog sektora 50. Treba sastaviti pripadnu input-output tabelu.

$$(b) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Neka je količina outputa koja se koristi u istom prvom sektoru 100 i neka je finalna potražnja drugog sektora 130. Treba sastaviti pripadnu input-output tabelu.

Rješenje. (a) Zadana je matrica tehnologije $I - A$, pa je matrica input-output koeficijentata $A = I - (I - A)$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Zadano je $x_{21} = 50$ i $y_1 = 50$.

$$\text{Iz } a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} \text{ dobivamo } x_1 = \frac{x_{21}}{a_{21}} = \frac{50}{\frac{1}{4}} = 200.$$

Iz $y = (I - A)x$, ili po elementima

$$\begin{bmatrix} 50 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} 50 &= 100 - \frac{1}{6}x_2 \\ y_2 &= -50 + \frac{1}{3}x_2. \end{aligned}$$

Dobivamo $x_2 = 300$ i $y_2 = 50$, pa input-output tablica ima oblik

x_i	x_{ij}		y_i
200	$\frac{1}{2} \cdot 200$	$\frac{1}{6} \cdot 300$	50
300	$\frac{1}{4} \cdot 200$	$\frac{2}{3} \cdot 300$	50

odnosno

x_i	x_{ij}		y_i
200	100	50	50
300	50	200	50

(b) Sada imamo $x_{11} = 100$, $y_2 = 130$ i slično kao u zadatku (a),

$$A = I - (I - A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Iz relacije $a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1}$ slijedi $x_1 = \frac{x_{11}}{a_{11}} = 200$. O input-output tabeli znamo

x_i	x_{ij}		y_i
200	$\frac{1}{2} \cdot 200$	$\frac{1}{6} \cdot x_2$	y_1
x_2	$\frac{1}{10} \cdot 200$	$\frac{1}{2} \cdot x_2$	130

Iz tabele slijedi

$$\begin{aligned} 200 - 100 - \frac{1}{6}x_2 &= y_1 \\ x_2 - 20 - \frac{1}{2}x_2 &= 130. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe dobivamo $x_2 = 300$. Uvrštavajući to u prvu jednadžbu, dobivamo $y_1 = 50$. Input-output tablica glasi

x_i	x_{ij}		y_i
200	100	50	50
300	20	150	130

Primjer 1.6.6. Zadana je input-output tabela jedne ekonomije

x_i	x_{ij}			y_i
100	0	40	50	
200	20	40	30	
300	50	40	60	

(a) Odredimo vektor finalne potražnje y .

Sastavimo nove input-output tabele, ako se tehnološki uvjeti ne mijenjaju, a planira se:

(b) povećanje ukupnih outputa prvog i drugog sektora za 50%.

(c) povećanje ukupnog outputa drugog sektora za 50% i smanjenje ukupnog outputa trećeg sektora za 20%.

(d) povećanje ukupnih outputa prvog i drugog sektora za 20% i smanjenje finalne potražnje trećeg sektora za 20%.

(e) povećanje svih ukupnih outputa za 20%.

Rješenje. (a) Iz tabele odmah slijedi $y_1 = 100 - 40 - 50 = 10$, $y_2 = 110$ i $y_3 = 150$, pa je $y = [10 \ 110 \ 150]^T$. Kako se tehnološki uvjeti ne mijenjaju niti u jednom od slučajeva (b) – (e), matrica input-output koeficijenata je u svim slučajevima ista:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{40}{200} & \frac{50}{300} \\ \frac{20}{100} & \frac{40}{200} & \frac{30}{300} \\ \frac{60}{100} & \frac{40}{200} & \frac{60}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1\bar{6} \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

(b) Novi vektor ukupnih outputa je $x = [150 \ 300 \ 300]^T$ pa odmah dobivamo lijevi dio input-output tabele

x_i	x_{ij}		
150	$0 \cdot 150$	$0.2 \cdot 300$	$0.1\bar{6} \cdot 300$
300	$0.2 \cdot 150$	$0.2 \cdot 300$	$0.1 \cdot 300$
300	$0.5 \cdot 150$	$0.2 \cdot 300$	$0.2 \cdot 300$

Odavde odmah slijedi

x_i	x_{ij}			y_i
150	0	60	50	40
300	30	60	30	180
300	75	60	60	105

Novi vektor finalne potražnje nakon povećanja outputa prvog i drugog sektora za 50% je $y = [40 \ 180 \ 105]^T$.

(c) Uvjeti daju vektor ukupnog outputa $x = [100 \ 300 \ 240]^T$. Slično kao i u prethodnom slučaju, dobivamo input-output tabelu

x_i	x_{ij}			y_i
100	0	60	40	10
300	20	60	24	196
240	50	60	48	82

(d) U ovom slučaju je $x = [120 \ 240 \ x_3]^\top$ i $y = [y_1 \ y_2 \ 120]^\top$. Nova input-output tabela je

x_i	x_{ij}			y_i
120	$0 \cdot 120$	$0.2 \cdot 240$	$0.16 \cdot x_3$	y_1
240	$0.2 \cdot 120$	$0.2 \cdot 240$	$0.1 \cdot x_3$	y_2
x_3	$0.5 \cdot 120$	$0.2 \cdot 240$	$0.2 \cdot x_3$	120

Iz tabele dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 120 - 48 - 0.16x_3 &= y_1 \\ 240 - 24 - 48 - 0.1x_3 &= y_2 \\ x_3 - 60 - 48 - 0.2x_3 &= 120. \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 &= 72 - 0.16x_3 \\ y_2 &= 168 - 0.1x_3 \\ 0.8x_3 &= 228, \end{aligned}$$

odakle slijedi $x_3 = 285$, $y_2 = 139.5$, $y_1 = 24.5$. Time smo popunili input-output tabelu svim potrebnim brojevima, pa tabela poprima oblik

x_i	x_{ij}			y_i
120	0	48	47.5	24.5
240	24	48	28.5	139.5
285	60	48	57	120

(e) Sada je $x = [120 \ 240 \ 360]^\top$ i nova input-output tabela ima izgled

x_i	x_{ij}			y_i
120	0	48	60	12
240	24	48	36	240
360	60	48	72	360

Povećanjem svih outputa za 20%, novi vektor finalne potražnje je $y = [120 \ 240 \ 360]^\top$.



Zadaci

1. U ekonomiji s dvije industrije znamo da industrija I upotrebljava 10 centi svoga vlastitog proizvoda i 60 centi proizvoda industrije II da bi proizvela jedan dolar vrijednosti proizvoda industrije I. Industrija II ne upotrebljava svoj vlastiti proizvod, ali zato upotrebljava 50 centi proizvoda industrije I za proizvodnju jednog dolara proizvoda industrije II. Finalna potražnja sektora je \$1 milijarda dolara proizvoda industrije I i \$2 milijarde dolara proizvoda industrije II.
- (a) Napisati input-output matricu tehničkih koeficijenata i matricu tehnologije.
- (b) Odrediti vektor ukupne proizvodnje (u milijardama dolara).

Rješenje. (a) To su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.50 \\ 0.60 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad I - A = \begin{bmatrix} 0.90 & -0.50 \\ -0.60 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Imamo $(I - A)^{-1}y$ i $y = [1 \ 2]^T$. Dobije se $x = [3.\dot{3} \ 4]^T$. Ukupna vrijednost proizvodnje industrije I je 3.333333, a industrije II je 4 milijarde dolara.

2. Zadana je matrica input output koeficijenata

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.25 & 0 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \\ 0.4 & 0.25 & 0.2 \end{bmatrix}$$

i vektor

- (a) ukupnih outputa $[100 \ 200 \ 120]^T$,
- (b) finalne potražnje $[60 \ 140 \ 12]^T$,
- (c) finalne potražnje $[45 \ 105 \ 9]^T$.

Treba sastaviti pripadne input-output tabele.

Rješenje. (a) Dobije se

x_i	x_{ij}			y_i
100	20	50	0	30
200	20	50	60	70
120	40	50	24	6

(b) Vrijedi $x = (I - A)^{-1}y$. Prvo se izračuna $(I - A)^{-1}$, zatim x i onda se sastavi input-output tabela:

x_i	x_{ij}			y_i
200	40	100	0	60
400	40	100	120	140
240	80	100	48	12

(c) Na isti način se dobije

x_i	x_{ij}			y_i
150	30	75	0	45
300	30	75	90	105
180	60	75	36	9

3. Zadana je matrica input output koeficijenata

$$A = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.50 & 0.25 \\ 0.30 & 0.10 & 0.40 \\ 0.15 & 0.30 & 0.20 \end{bmatrix}$$

i vektor finalne potražnje

(a) $[20 \ 20 \ 120]^T$,

(b) $[10 \ 20 \ 20]^T$.

Odredite odgovarajuće vektore ukupne proizvodnje (ukupnih outputa).

Rješenje. Imamo

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.50 & -0.25 \\ -0.30 & 0.90 & -0.40 \\ -0.15 & -0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$$

pa se izračuna

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.975 & 1.564 & 1.399 \\ 0.988 & 2.115 & 1.366 \\ 0.741 & 1.086 & 2.025 \end{bmatrix}.$$

(a) Jer je $x = (I - A)^{-1}y$ i imamo $y = [20 \ 20 \ 10]^T$, dobije se

$$x = \begin{bmatrix} 84.77 \\ 75.72 \\ 56.79 \end{bmatrix}.$$

(b) Jer je $y = [10 \ 20 \ 20]^\top$, dobije se

$$x = \begin{bmatrix} 79.01 \\ 79.51 \\ 69.63 \end{bmatrix} .$$

Poglavlje 2

Uvod u optimizaciju

U ovom poglavlju opisat ćemo jednostavnije metode optimizacije i ukazati na mogućnost primjene u gospodarstvu.

2.1 Uvod kroz primjere

Često se u praksi pojavljuju problemi izbora najpovoljnijeg rješenja u odnosu na neki cilj. Npr. u tvornici se proizvodi nekoliko vrsta proizvoda. Tvornica se sastoji od određenog broja odjela, svaki odjel ima svoj dnevni kapacitet, i kroz odjele prolaze proizvodi u raznim fazama dovršenosti. Poznata je dobit po svakom finalnom proizvodu. Treba odrediti količine proizvoda koje bi tvornica trebala proizvesti da bi se maksimizirala ukupna dobit. Problemi ovakvog tipa mogu se matematički formulirati (matematički modelirati) i zatim riješiti matematičkim metodama. Problemi u praksi obično su tako velikih dimenzija da se klasičnim metodama diferencijalnog računa za određivanje ekstremnih vrijednosti funkcija uz ograničenja na varijable (koja su najčešće opisana jednadžbama) pokazuju neefikasima u rješavanju. Ako su pak ograničenja u obliku nejednadžbi tada se ne mogu koristiti metode diferencijalnog računa. Za takve probleme razvijene su posebne metode, od kojih ćemo mi ukratko upoznati one za rješavanje najjednostavnijeg i najčešćeg problema – *linearnog programiranja*. Prije nego što formuliramo opći problem linearnog programiranja opisat ćemo i riješiti neke motivacijske probleme.

2.1.1 Problem prehrane

Problem prehrane je jedan od prvih linearnih problema, a sastoji se u sljedećem:

Sastaviti program dnevne prehrane nekog čovjeka ili grupe ljudi (npr. vojske) tako da odabrana hrana sadrži u dovoljnoj količini određene hranjive sastojke, a da izdaci na hranu budu minimalni.

Jednostavnosti radi pretpostavimo da treba promatrati samo tri vrste hranjivih tvari: kalcij, bjelančevine i vitamin A¹. Pretpostavimo također da se prehrana sastoji od namirnica I i II za koje su cijene i hranjivi sastojci navedeni u Tablici 1² u kojoj su navedene i minimalne dnevne potrebe za svaku hranjivu tvar.

	Namirnica I	Namirnica II	
Cijena (jedinice)	\$0.60	\$1.00	Minimalne dnevne potrebe
Kalcij (jedinica)	10	4	20
Bjelančevine (jedinica)	5	5	20
Vitamin A (jedinica)	2	6	12

Tablica 1

Ovaj konkretni problem sastoji se u sljedećem: odrediti količine namirnica I i II tako da se zadovolje dnevne potrebe za trima navedenim hranjivim tvarima i da izdaci na hranu budu minimalni.

Označimo sa x_1 količinu jedinica namirnice I, a sa x_2 količinu jedinica namirnice II koju treba kupiti svaki dan.

Zadani problem prehrane matematički iskazujemo u sljedećem obliku (matematički model). Minimizirati funkciju troškova prehrane.

$$C = 0.6 \cdot x_1 + x_2$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} 10x_1 + 4x_2 &\geq 20 && \text{(ograničenje za kalcij)} \\ 5x_1 + 5x_2 &\geq 20 && \text{(ograničenje za bjelančevine)} \\ 2x_1 + 6x_2 &\geq 12 && \text{(ograničenje za vitamin A)} \end{aligned}$$

i

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Funkcija C troškova prehrane naziva se *funkcijom cilja* linearnog programa (ili problema linearnog programiranja). U ovom primjeru funkciju C treba minimizirati.

¹Primjer iz A. C. Chiang: Osnovne metode matematičke ekonomije, str 652

²Uzete su hipotetske jedinice da bi se omogućila upotreba pogodnih cijelih brojeva u ovom primjeru. Količina namirnica se mjeri u funtama.

Tri ograničenja uvjetovana su dnevnim potrebama za navedenim hranjivim tvarima, a dobivaju se iz tri posljednja retka tablice 1. Zapazimo, iako je zabranjeno doći ispod dnevnih potreba, dopušteno je nadmašiti navedene minimalne dnevne količine.

Uvjeti $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ (koje kraće zapisujemo $x_1, x_2 \geq 0$) nazivaju se *uvjetima nenegativnosti*. Primijetimo da ovaj konkretni problem ima više ograničenja nego varijabli.

Problem linearnog programiranja (linearni program) sastoji se od tri dijela: *funkcije cilja*, *skupa ograničenja* i *skupa uvjeta nenegativnosti*. Pritom je funkcija cilja linearna, a i ograničenja su linearne nejednadžbe, pa odatle i naziv linearno programiranje. Mi smo problem prehrane izrazili kao problem linearnog programiranja.

Pitanje je da li smo problem pojednostavili? Jesmo, ali ta pojednostavljenja nisu značajna. Npr. funkciju cilja (ovdje je to funkcija troškova) definirali smo kao linearnu funkciju količina x_1 i x_2 , tj. troškovi zavise samo o količinama kupljenih namirnica, pri čemu se po istoj cijeni nabavlja mala kao i velika količina namirnica. Druga pretpostavka koja nije sasvim realistična je konstantnost, npr. količine kalcija u namirnici I. Model prehrane je realističniji što je veći broj namirnica (dakle, što je mogući veći izbor menija), a naročito što je veći broj ograničenja (tada su obroci raznovrsniji).

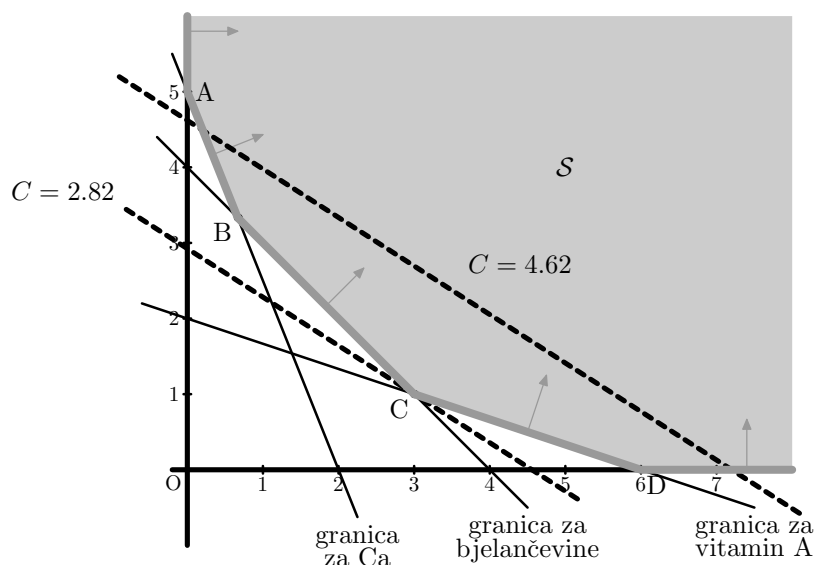
Ovaj problem postavio je 1945. godine G. J. Stigler i to je prvi veći problem koji je riješen *simpleks metodom*, koju ćemo kasnije opisati. Taj linearni model prehrane obuhvaćao je 77 namirnica i 9 hranjivih elemenata. Problem je riješen 1947. pod nadzorom G. Dantziga u istraživačkom centru korporacije RAND u Santa Monici, California. Rad je ostao neobjavljen, ali su neki detalji poznati iz drugih publikacija. Rješavanje je trajalo 120 radnih dana na stolnom električnom stroju. Taj posao današnja računala obavljaju gotovo trenutno.

Kako naš primjer sadrži samo dvije varijable, x_1 i x_2 , možemo ga riješiti grafički. U koordinatnom sustavu x_1Ox_2 , zbog nenegativnosti vrijednosti od x_1 i x_2 , trebamo promatrati samo prvi (nenegativni) kvadrant. Da bismo u tom kvadrantu označili područje određeno ograničenjima, uzimamo prvo da su ograničenja dana kao jednadžbe. Nacrtajmo pravce određene tim jednadžbama. U tu svrhu napišimo jednadžbe pravaca u segmentnom obliku

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{5} &= 1 \quad (\text{granica za kalcij}) \\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} &= 1 \quad (\text{granica za bjelančevine}) \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{2} &= 1 \quad (\text{granica za vitamin A}) \end{aligned}$$

Svaki od ovih pravaca dijeli (prvi) kvadrant na dva dijela. Uvrštavanjem jedne točke iz tog kvadranta, koja nije na pravcu, provjeravamo da li koordinate te dočke

zadovoljavaju odgovarajuće ograničenje. Npr. ishodište ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) ne zadovoljava ograničenje za kalcij pa dio kvadranta koji sadržava ishodište nije dio koji zadovoljava nejednadžbu za kalcij. Time je određen dio kvadranta (nasuprot ishodišta obzirom na pravac $x_1/2 + x_2/5 = 1$ – granice za kalcij) čije sve točke zadovoljavaju ograničenja za kalcij.



Slično određujemo dio kvadranta koji sadrži točke čije koordinate zadovoljavaju ograničenje za bjelančevine odnosno za vitamin A. Kako sva ograničenja (nejednadžbe) moraju biti zadovoljena, *skup mogućih rješenja* S dobivamo kao presjek svih onih djelova prvog kvadranta koje smo dobili opisanim postupkom. Koordinate točaka skupa S

$$S = \{(x_1, x_2); 10x_1 + 4x_2 \geq 20, 5x_1 + 5x_2 \geq 20, 2x_1 + 6x_2 \geq 12, x_1, x_2 \geq 0\}$$

zadovoljavaju sva ograničenja. Svaka točka (p, q) iz skupa mogućih rješenja naziva se *moguće rješenje*. Kako skup mogućih rješenja sadrži i sve točke na rubu područja, kažemo da je skup mogućih rješenja *zatvoren*.

Sjecišta graničnih pravaca označenog područja, npr. točke $(2/3, 10/3)$ i $(3, 1)$ (dobivamo ih rješavanjem odgovarajućeg sustava od dviju jednadžbi) ili sjecišta graničnog pravca i jedne koordinatne osi, npr. točke $(0, 5)$, $(6, 0)$, nazivaju se *ekstremnim točkama*.

Točke u skupu mogućih rješenja daju sve kombinacije namirnica I i II koje zadovoljavaju sva ograničenja (uključujući i uvjete nenegativnosti), ali za neke od njih su troškovi kupnje manji nego za druge. Da bi se minimalizirali troškovi C moramo uzeti u obzir i funkciju cilja.

Napišimo funkciju cilja u obliku

$$x_2 = C - 0.6x_1$$

i uzmimo da je C parametar.

Grafički je to familija paralelnih pravaca sa koeficijentom smjera -0.6 . Svaki od tih pravaca odgovara određenoj vrijednosti parametra C . Npr. za $C = 4.62$, pravac $x_2 = 4.62 - 0.6x_1$ nacrtan je na slici iscrtkanom linijom. Za sve točke na toj iscrtkanoj liniji, troškovi su jednaki i iznose \$4.62. Prema tome, da bismo minimalizirali troškove, mora se odabrati “najniža” moguća linija jednakih troškova, koja siječe skup mogućih rješenja. Na slici vidimo da nas takav izbor dovodi do ekstremne točke $(3, 1)$. Stoga je optimalno moguće rješenje (kraće, *optimalno rješenje*) $(x_1^*, x_2^*) = (3, 1)$. Slijedi da će minimalni troškovi po danu biti

$$\min C = \min (0.6x_1 + x_2) = 0.6x_1^* + x_2^* = 0.6 \cdot 3 + 1 = 2.80 \text{ dolara.}$$

S tom stalnom dnevnom prehranom od 3 funte namirnice I i 1 funte namirnice II zadovoljene su potrebe za tri navedena sastojka, a troškovi su minimalni i iznose \$2.8.

Može se dokazati da se optimalna rješenja linearnih programa nalaze u ekstremnim točkama. Ekstremne točke su sjecišta granica dvaju ograničenja (koja omeđuju skup mogućih rješenja ili sjecište granice ograničenja i jedne koordinatne osi). Nakon identifikacije optimalnog vrha (ekstremne točke) optimalno rješenje (x_1^*, x_2^*) dobivamo rješavanjem odgovarajućeg sustava (ovdje od dviju) linearnih jednadžbi. U promatranom primjeru optimalni vrh je u sjecištu granice za bjelančevine i granice za vitamin A. Primijetimo da rješenje $x_1^* = 3, x_2^* = 1$ minimalno zadovoljava zahtjeve za bjelančevine i za vitamin A, dok zahtjev za kalcijem nije minimalno zadovoljen.

Možemo postaviti pitanje što će se dogoditi s optimalnim rješenjem ako se cijene p_1 i p_2 namirnica I i II promijene. Funkcija cilja je

$$C = p_1x_1 + p_2x_2$$

i

$$x_2 = \frac{C}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

je jednadžba “pravca jednakih troškova” koji iznose C . Neposredni učinak promjena cijena odrazit će se na pravce jednakih troškova.

Promotrimo prvo slučaj kad se cijene promijene u jednakom omjeru. Tada koeficijent pravca jednakih troškova ostaje nepromijenjen i prvobitno optimalno rješenje (x_1^*, x_2^*) i dalje ostaje optimalno iako će se iznos minimalnih troškova povećati ili smanjiti u skladu s promjenama cijena p_1 i p_2 .

Promotrimo drugi slučaj kada se cijene mijenjaju u različitim omjerima, ali tako da je razlika relativno mala. Tada će koeficijent smjera pretrpjeti male promjene (npr. od -0.6 na -0.5 ili -0.7). Promjena koeficijenta smjera još će ostaviti nepromijenjenim prvotno optimalno rješenje (to se može crtanjem pravca jednakih

troškova provjeriti). Dakle optimalni vrh (ekstremna točka) neosjetljiva je na male promjene cijena.

Pretpostavimo sada da su obje cijene jednake, npr $p_1 = p_2 = 1$, tada je

$$x_2 = C - x_1$$

i koeficijent smjera pravca jednakih troškova je -1 . Ako pogledamo granicu za bjelančevine

$$x_2 = 4 - x_1$$

vidimo da je pravac jednakih troškova paralelan sa granicom za bjelančevine. Najniži mogući pravac jednakih troškova doticat će skup mogućih rješenja duž cijelog brida njegove granice $5x_1 + 5x_2 = 20$. Dakle svaka točka na segmentu tog pravca između točaka $(2/3, 10/3)$ i $(3, 1)$ je optimalna. Ovo rješenje omogućuje varijacije u jelovniku.

Pitamo se što je sa tvrdnjom da se optimalno rješenje nalazi u ekstremnoj točki. Ovdje se optimalno rješenje nalazi i u dva vrha (dvije ekstremne točke).

U ovom slučaju je rješenje problema vrlo osjetljivo na male promjene u cijenama. Naime, mala promjena koeficijenta pravca jednakih troškova u jednom smjeru dati će jedinstveno rješenje u točki $(2/3, 10/3)$ dok će mala promjena u drugom smjeru dati rješenje u $(3, 1)$.

Napomena 2.1.1. *Moguće je riješiti linearni problem i tako da se odrede sve ekstremne točke i uvrste u funkciju cilja. Traži se ona ekstremna točka (odnosno one ekstremne točke) koja daje minimalnu vrijednost funkcije cilja. Poznata simplex metoda za rješavanje problema linearnog programiranja koju ćemo opisati kasnije temelji se, grubo govoreći na toj ideji.* ■

2.1.2 Klasičan problem transporta

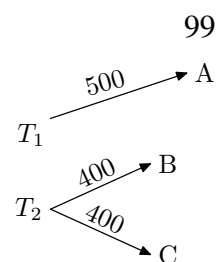
Iz dvije tvornice T_1 i T_2 koje proizvode proizvod P snabdijevaju se gradovi A, B i C. Jedinični troškovi (u nekim novčanim jedinicama) prijevoza proizvoda P od tvornica do gradova dani su u sljedećoj tablici.

ISHODIŠTA	ODREDIŠTA			PONUDA
	A	B	C	
T_1	8	5	5	500
T_2	4	6	8	800
POTRAŽNJA	500	400	400	1300

Pitanje je: Odakle, kuda i koliko proizvoda prevesti da ukupni troškovi budu minimalni. Jedno moguće rješenje je

2.1. UVOD KROZ PRIMJERE

ISHODIŠTA	A	B	C	PONUĐA
T_1	500			500
T_2		400	400	800
POTRAŽNJA	500	400	400	1300



Ukupni troškovi prijevoza su

$$T = 500 \cdot 8 + 400 \cdot 6 + 400 \cdot 8 = 9600 \quad \text{novčanih jedinica.}$$

Postavlja se pitanje: Postoji li drugi plan koji daje manje troškova. Imamo npr.

ISHODIŠTA	A	B	C	PONUĐA
T_1	100	100	300	500
T_2	400	300	100	800
POTRAŽNJA	500	400	400	1300

U ovom slučaju su troškovi prijevoza

$$T = 100 \cdot 8 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 5 + 400 \cdot 4 + 300 \cdot 6 + 100 \cdot 8 = 7000 \quad \text{novčanih jedinica.}$$

Ponovo se postavlja pitanje postoji li plan prijevoza sa još manjim troškovima.

Izgradnja matematičkog modela.

Neka je

x količina proizvoda koja se iz T_1 upućuje u A

y količina proizvoda koja se iz T_1 upućuje u B

tada je

$500 - x - y$ količina proizvoda koja se iz T_1 upućuje u C

$500 - x$ količina proizvoda koja se iz T_2 upućuje u A

$400 - y$ količina proizvoda koja se iz T_2 upućuje u B

$800 - (500 - x) - (400 - y) = x + y - 100$ količina proizvoda koja se iz T_2 upućuje u C

Možemo ove količine zapisati u tablici.

	A	B	C	
T_1	x	y	$500 - x - y$	500
T_2	$500 - x$	$400 - y$	$x + y - 100$	800
POTRAŽNJA	500	400	400	

Sve količine navedene u tablici su nenegativne pa dobivamo *ograničenja*

$$\begin{aligned}x + y &\leq 500 \\x + y &\geq 100 \\x &\leq 500 \\y &\leq 400 \\x, y &\geq 0.\end{aligned}$$

Ukupni troškovi prijevoza koje treba minimalizirati su

$$\begin{aligned}T &= 8x + 5y + 5(500 - x - y) + 4(500 - x) + 6(400 - y) \\&\quad + 8(x + y - 100) = 7x + 2y + 6100.\end{aligned}$$

Funkcija T je funkcija cilja. Problem zapisujemo u obliku

$$\min T = \min(7x + 2y + 6100)$$

$$\begin{aligned}x + y &\leq 500 \\x + y &\geq 100 \\x &\leq 500 \\y &\leq 400 \\x, y &\geq 0.\end{aligned}$$

Ograničenja definiraju *skup mogućih rješenja* \mathcal{S} . Svaki par (x_0, y_0) koji zadovoljava ograničenja [dakle, $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$] naziva se *moguće rješenje*. Zadatak je odrediti ono moguće rješenje (x^*, y^*) za koje funkcija cilja poprima minimalnu vrijednost. To moguće rješenje (x^*, y^*) naziva se *optimalno rješenje*.

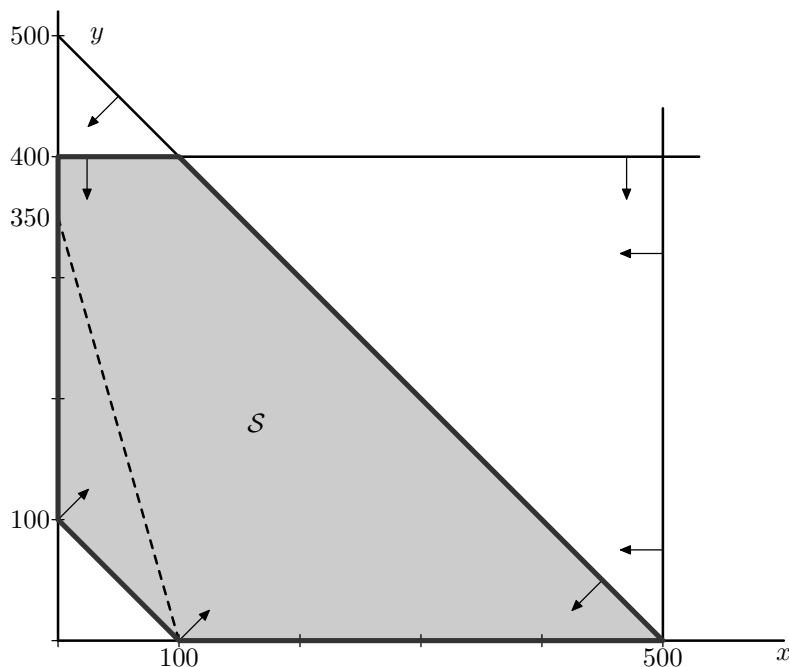
Grafičko rješavanje.

Nacrtajmo u prvom kvadrantu xOy ravnine pravac $x+y = 500$. Iz segmentnog oblika

$$\frac{x}{500} + \frac{y}{500} = 1$$

vidimo da su odsječci na osi x i na osi y jednaki 500. Ovaj pravac djeli prvi kvadrant na dva dijela. Ograničenje $x + y \leq 500$ zadovoljavaju točke u onom djelu prvog kvadranta u kojem se nalazi ishodište. Slično odredimo i djelove prvog kvadranta čije točke zadovoljavaju nejednadžbe $x + y \geq 100$, $x \leq 500$,

$y \leq 400$. Presjek svih tih dijelova je skup mogućih rješenja S .



Funkcija ukupnih troškova je

$$T = 7x + 2y + 6100.$$

Označimo, $z = 7x + 2y$. Kada odredimo minimum z_0 ove funkcije, tada su minimalni troškovi prijevoza

$$\min(7x + 2y + 6100) = z_0 + 6100.$$

Za zadani z , npr. $z = 700$ ukupni troškovi su $700 + 6100 = 6800$. U svim točkama pravca $7x + 2y = 700$ ukupni troškovi su 6800. Nacrtajmo taj pravac. Imamo,

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{350} = 1.$$

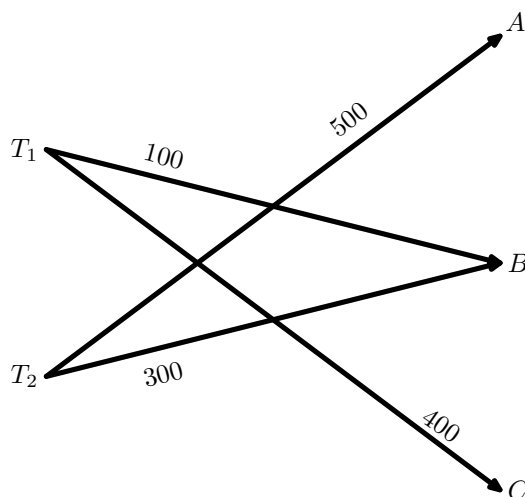
Paralelnim pomicanjem tog pravca (od ishodišta) troškovi rastu. Sa slike vidimo da bi u točki $(500, 0)$ bili maksimalni. Paralelnim pomicanjem prema ishodištu troškovi padaju. Posljednja zajednička točka paralele sa pravcem $7x + 2y = 700$ i skupa mogućih rješenja je točka $(0, 100)$. U toj točki su troškovi prijevoza minimalni. Dakle, $x^* = 0$, $y^* = 100$ je optimalno rješenje i

$$\min T = \min(7x + 2y + 6100) = 7x^* + 2y^* + 6100 = 6300.$$

(Funkcija cilja T u točki $x_0 = 500$, $y_0 = 0$ poprima maksimalnu vrijednost 9600.)
Optimalan plan je

	A	B	C	
T_1		100	400	500
T_2	500	300		800
POTRAŽNJA	500	400	400	

tj.



2.1.3 Problem proizvodnje.

Poduzeće proizvodi dvije vrste proizvoda I i II u tvornici koja se sastoji od tri proizvodna odjela: odjela rezanja, odjela miješanja i odjela poliranja. Pretpostavit ćemo da svi odjeli dnevno rade 8 sati. Proces proizvodnje ima nekoliko faza:

- 1) Proizvod I prvo se reže i zatim polira. Za svaku tonu tog proizvoda utroši se pola sata za rezanje i trećinu sata za poliranje.
- 2) Proizvod II se prvo miješa, a zatim polira. Za svaku tonu tog proizvoda utroši se jedan sat za miješanje i dvije trećine sata za poliranje.

Proizvodi I i II mogu se prodati po cijenama od \$80 i \$60 po toni, ali nakon odbijanja varijabilnih troškova, oni daju neto \$40 i \$30 po toni. Posljednje svote mogu se promatrati kao iznosi neto dohotka (s odbitkom varijabilnih troškova) ili kao kao iznosi bruto profita (bez odbitka fiksnih troškova). Zbog jednostavnosti razmatranja, mi ćemo ih shvaćati kao profite po toni. Matematički problem se sastoji u sljedećem: koju bi kombinaciju količina proizvoda poduzeće trebalo odabrati da bi se maksimizirao ukupni profit?

Prikažimo navedene podatke u tablici

Odjel	Potrebni sati obrade po toni		Dnevni kapacitet u satima
	Proizvod I	Proizvod II	
Rezanje	1/2	0	8
Miješanje	0	1	8
Poliranje	1/3	2/3	8
Profit po toni	\$40	\$30	

Neka su x_1, x_2 količine proizvoda I i II koje treba proizvesti na dan. Taj problem se prevodi u sljedeći linearni program:

$$\text{Maksimizirati funkciju } C = 40x_1 + 30x_2$$

uz uvjete

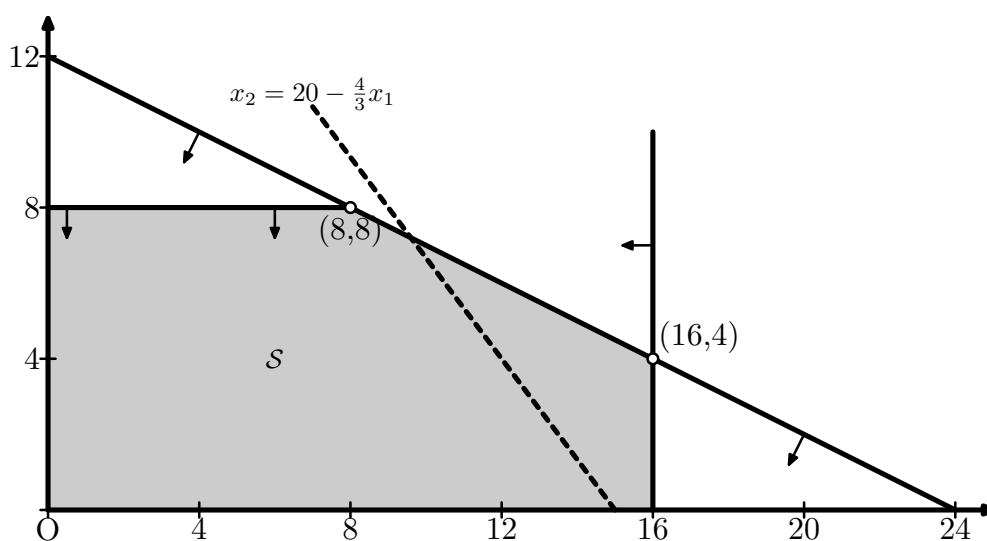
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 &\leq 8 && \text{(ograničenje rezanja)} \\ x_2 &\leq 8 && \text{(ograničenje miješanja)} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 8 && \text{(ograničenje poliranja)} \end{aligned}$$

i

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{(uvjeti nenegativnosti).}$$

Ovdje imamo problem maksimizacije funkcije cilja, uvjete oblika \leq (ne možemo premašiti kapacitete odjela, iako možemo ostaviti neki dio kapaciteta neiskorištenim) i uvjete nenegativnosti.

Ovaj linearni program rješavamo kao i prije – grafički. Nacrtamo dijelove pravaca koji predstavljaju granice za ograničenja u prvom kvadrantu i određujemo skup mogućih rješenja \mathcal{S} .



Vidimo da je skup mogućih rješenja zatvoren kao i u prethodnim primjerima. Skup mogućih rješenja je ovdje i omeđen. U prvom primjeru (problem prehrane) skup mogućih rješenja je bio “omeđen samo sa dvije strane” (jer je sadržan u prvom kvadrantu), ali ne i sa druge dvije strane kao u drugom primjeru (problem transporta). Kad je S “omeđen sa svih strana” kažemo da je *ograničen* ili jednostavno *omeđen*.

Funkciju cilja

$$C = 40x_1 + 30x_2$$

zapišemo u obliku

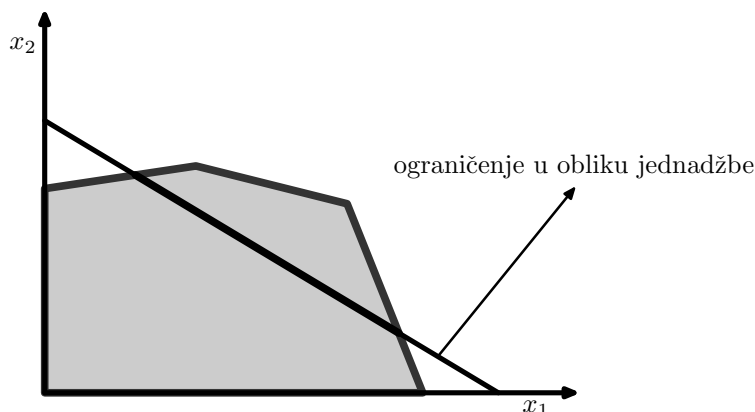
$$x_2 = \frac{1}{30}C - \frac{4}{3}x_1$$

gdje je C parametar. Grafovi svih tih funkcija čine familiju paralelnih pravaca sa koeficijentom smjera $-4/3$. Svakom pravcu pripada samo jedna vrijednost parametra C i svakoj vrijednosti od C pripada samo jedan pravac. Stoga pravac koji je određen s vrijednošću parametra C možemo zvati *pravcem jednakog profita* C . Npr. za $C = 600$, pripadni pravac je graf funkcije $x_2 = 20 - (4/3)x_1$. Dvije točke tog pravca su $(12, 4)$ i $(15, 0)$. Mi trebamo odrediti pravac koji odgovara najvećem mogućem profitu, ali tako da pravac ima zajedničku točku sa skupom mogućih rješenja. Paralelnim pomicanjem pravca jednakog profita (to odgovara mijenjanju parametra odnosno profita C) dolazimo do ekstremne točke $(16, 4)$ u kojoj će profit biti maksimalan. Dakle, optimalno rješenje je $x_1^* = 16$, $x_2^* = 4$, a maksimalni profit je $\max C = \max(40x_1 + 30x_2) = 40x_1^* + 30x_2^* = 760$.

Ako se proizvede 16 tona proizvoda I i 4 tone proizvoda II po danu, profit je maksimalan i iznosi \$760. Optimalnim rješenjem, ograničenja rezanja i poliranja točno su zadovoljena (jer je točka $(16, 4)$ sjecište granice za rezanje i granice za poliranje) dok ograničenje miješanja nije (vrijedi $x_2^* = 4 < 8$). Dakle, kod dnevne proizvodnje koja maksimizira profit, kapacitet odjela za miješanje ostaje dijelom neiskorišten.

Napomena 2.1.2. *Kod linearnih programa mogu se pojaviti ograničenja tipa \leq i tipa \geq . Ne moraju uvijek istovremeno biti samo ograničenja istog tipa. Također, program može sadržavati i ograničenja u obliku jednadžbe. Ako se npr. linearni program koji sadrži jedno ograničenje u obliku jednadžbe može riješiti grafički, skup mogućih rješenja će biti segment pravca koji je određen tom jednadžbom. To je stoga što će svako od ostalih ograničenja u obliku nejednakosti “odrezati” jednu polovicu tog pravca, odnosno “odrezati” jedan kraj već dobivenog segmenta pravca. Ili drukčije gledano, to je zato jer je skup mogućih rješenja presjek tog pravca sa poligonalnim skupom kojeg definiraju ostala ograničenja u obliku*

nejednakosti (vidi sliku).



Primjer 2.1.1. Riješimo grafičkom metodom probleme

$$\min (x_1 + 3x_2) \quad i \quad \max (x_1 + 3x_2)$$

uz ograničenja

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$-x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. Odredimo skup mogućih rješenja \mathcal{S} . Nacrtajmo prvo granice ograničenja tj. pravce

$$p_1 \equiv \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} = 1$$

$$p_2 \equiv \frac{x_1}{-20} + \frac{x_2}{20} = 1$$

$$p_3 \equiv \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{-10} = 1$$

$$p_4 \equiv \frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{30} = 1$$

i za svako ograničenje odredimo dio ravnine na kojemu je pripadna nejednakost zadovoljena. Za svaku granicu ograničenja (pravac) taj dio ravnine označen je strelicama. Presjek tih dijelova je skup mogućih rješenja \mathcal{S} . Promotrimo funkciju cilja

$$C = x_1 + 3x_2$$

i za vrijednost $C = 30$ nacrtajmo pripadni pravac $x_2 = C/3 - x_1/3$, odnosno u segmentnom obliku

$$\frac{x_1}{30} + \frac{x_2}{10} = 1.$$

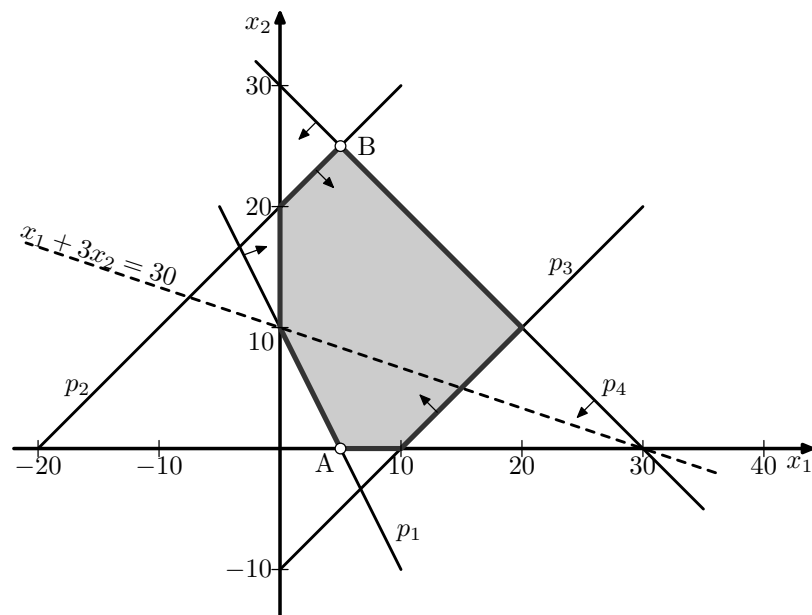
Sa slike vidimo da paralelnim pomicanjem ovog pravca dolazimo do minimalne vrijednosti funkcije cilja u točki A, dok je maksimalna vrijednost u točki B.

Točka A sjecište je pravca p_1 i osi x_1 koji su određeni jednadžbama

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{10} = 1 \quad i \quad x_2 = 0.$$

Rješavanjem tog sustava dobivamo $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, pa je $A \equiv (5, 0)$. Kraće to zapisujemo $A(5, 0)$. Dakle, optimalno rješenje problema minimuma je $x_1^* = 5$, $x_2^* = 0$ i vrijedi

$$\min (x_1 + 3x_2) = x_1^* + 3x_2^* = 5 + 3 \cdot 0 = 5.$$



Točka B je sjecište pravaca p_2 i p_4 pa se koordinate točke B dobivaju rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 &= 30. \end{aligned}$$

Dobivamo $x_1 = 5$, $x_2 = 25$ tj. $B(5, 25)$. Optimalno rješenje problema maksimuma je $x_1^{\circ} = 5$, $x_2^{\circ} = 25$ i vrijedi

$$\max (x_1 + 3x_2) = x_1^{\circ} + 3x_2^{\circ} = 5 + 3 \cdot 25 = 80.$$



Primjer 2.1.2. Riješimo grafičkom metodom probleme

$$\min (2x_1 + x_2) \quad i \quad \max (2x_1 + x_2)$$

uz ograničenja

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

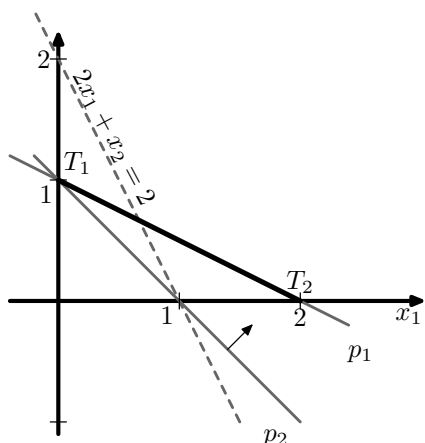
$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. Odredimo skup mogućih rješenja \mathcal{S} . Nacrtajmo prvo granice ograničenja tj. pravce

$$p_1 \equiv \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{1} = 1$$

$$p_2 \equiv \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{1} = 1.$$



Kako je prvo ograničenje jednačba, sa slike vidimo da je skup mogućih rješenja \mathcal{S} segment $\overline{T_1T_2}$. Funkcija cilja $C = 2x_1 + x_2$ za $C = 2$ je pravac $2 = 2x_1 + x_2$ tj. $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} = 1$. Paralelnim pomicanjem vidimo da C poprima minimalnu vrijednost kad pravac prolazi točkom T_1 , a maksimalnu kad prolazi kroz T_2 .

Sa slike vidimo da je $T_1(0, 1)$ i $T_2(2, 0)$. Optimalno rješenje problema minimuma je $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$ i $\min (2x_1 + x_2) = 2x_1^* + x_2^* = 1$, a optimalno rješenje problema maksimuma je $x_1^{\circ} = 2$, $x_2^{\circ} = 0$ i $\max (2x_1 + x_2) = 2x_1^{\circ} + x_2^{\circ} = 4$. ■

Primjer 2.1.3. Riješimo grafičkom metodom probleme

$$\min (x_1 + 2x_2) \quad i \quad \max (x_1 + 2x_2)$$

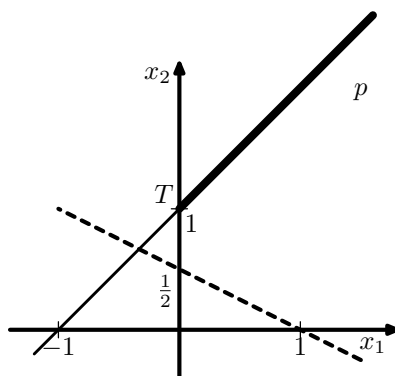
uz ograničenja

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. *Nacrtajmo pravac*

$$p \equiv \frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{1} = 1.$$



Skup mogućih rješenja \mathcal{S} su točke na pravcu p za koje vrijedi $x_1 \geq 0$.
Funkcija cilja je $C = x_1 + 2x_2$. Za $C = 1$, dobivamo pravac

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Sa slike vidimo da funkcija cilja poprima minimalnu vrijednost u točki $T(0, 1)$ tj. optimalno rješenje je $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$ i $\min(x_1 + 2x_2) = x_1^* + 2x_2^* = 2$ dok optimalno rješenje problema maksimuma ne postoji jer se vrijednost funkcije cilja povećava (prema ∞) kad se povećava udaljenost točke na pravcu p od ishodišta. ■

Primjer 2.1.4. *Grafičkom metodom riješiti problem*

$$\max(x_1 + 3x_2)$$

uz ograničenja

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. *Odredimo skup mogućih rješenja \mathcal{S} . Nacrtajmo pravce*

$$p_1 \equiv x_1 - x_2 = 0$$

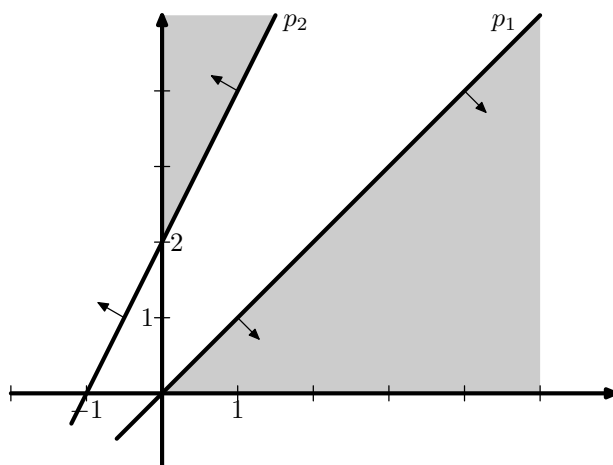
$$p_2 \equiv -2x_1 + x_2 = 2.$$

Pravac p_1 prolazi kroz ishodište (simetrala prvog kvadranta).

$$p_1 \equiv x_2 = x_1$$

$$p_2 \equiv \frac{x_1}{-1} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Nacrtamo pravce i označimo područja na kojima su odgovarajuće nejednadžbe zadovoljene.



Vidimo da je presjek tih područja prazan pa je $\mathcal{S} = \emptyset$. Dakle, ovaj problem nema skup mogućih rješenja pa nema ni optimalno rješenje. ■

Primjer 2.1.5. Grafičkom metodom riješiti problem

$$\max (12x_1 + 18x_2)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 33$$

$$x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

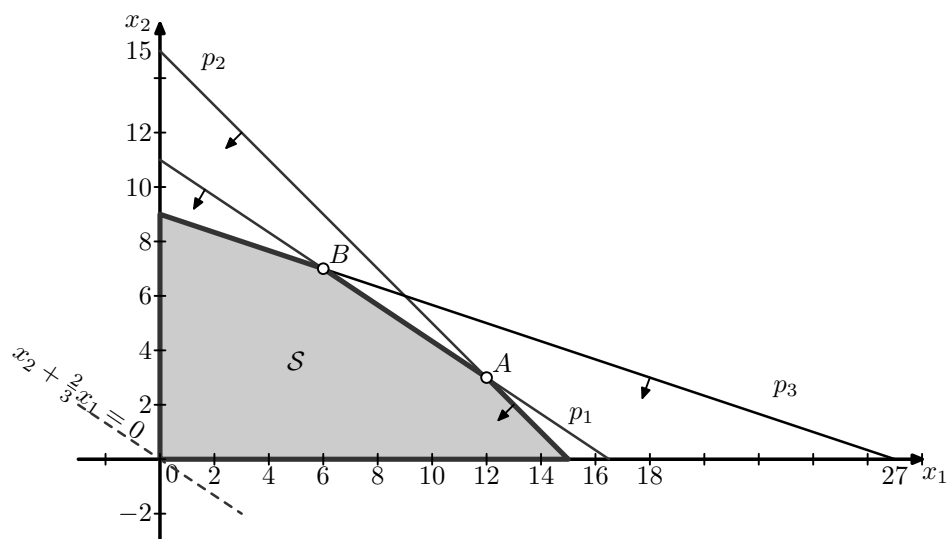
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. Do skupa mogućih rješenja \mathcal{S} dolazimo uzimajući presjek poluravnina čije točke zadovoljavaju gornje uvjete. Nacrtajmo pravce

$$p_1 \equiv \frac{x_1}{16.5} + \frac{x_2}{11} = 1$$

$$p_2 \equiv \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{15} = 1$$

$$p_3 \equiv \frac{x_1}{27} + \frac{x_2}{9} = 1.$$



Na slici je označen skup mogućih rješenja S . Funkcija cilja je

$$C = 12x_1 + 18x_2.$$

Oдавде je $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{C}{18}$ pri čemu C smatramo parametrom. Za svaki C dobivamo pravac sa koeficijentom $-2/3$. Za $C = 0$ dobivamo

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1$$

pravac kroz ishodište. Stavljajući $x_1 = 3$ u jednadžbu tog pravca, zaključujemo da je i točka $(3, -2)$ na tom pravcu. Nactajmo taj pravac. Vidimo da je on paralelan sa p_1 jer ima isti koeficijent smjera $-2/3$. Dakle funkcija cilja poprima maksimalnu vrijednost za svaku točku na segmentu pravca p_1 od točke A do točke B . Ekstremna točka A je sjecište pravaca p_1 i p_2 , dok je ekstremna točka B sjecište pravaca p_1 i p_3 . Da bi odredili koordinate točke A moramo riješiti sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 33 \\ x_1 + x_2 &= 15. \end{aligned}$$

Dobivamo rješenje $x_1 = 12$, $x_2 = 3$ pa je $A(12, 3)$. Slično, koordinate točke B dobivamo rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 33 \\ x_1 + 3x_2 &= 27. \end{aligned}$$

Dobivamo $x_1 = 6$, $x_2 = 7$ pa je $B(6, 7)$.

Uvrstimo u funkciju cilja koordinate optimalnog rješenja $x_1^* = 12$, $x_2^* = 3$ (ekstremna točka A). Dobivamo

$$\max (12x_1 + 18x_2) = 12x_1^* + 18x_2^* = 12 \cdot 12 + 18 \cdot 3 = 198.$$

Uvrstimo li u funkciju cilja koordinate optimalnog rješenja $x_1^\circ = 12$, $x_2^\circ = 3$ (ekstremna točka B), dobivamo

$$\max (12x_1 + 18x_2) = 12x_1^\circ + 18x_2^\circ = 12 \cdot 6 + 18 \cdot 7 = 198.$$

Proizvoljna točka segmenta pravca između točaka A i B ima koordinate (konveksna suma koordinata)

$$(x_t, y_t) = t \cdot (12, 3) + (1 - t) \cdot (6, 7), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Npr. za $t = 1/2$ imamo točku $(9, 5)$ koja je polovište segmenta \overline{AB} . Uvrstimo li koordinate $x_t = t \cdot 12 + (1 - t) \cdot 6 = 6t + 6$, $y_t = t \cdot 3 + (1 - t) \cdot 7 = 7 - 4t$ opće točke $T(x_t, y_t)$ segmenta \overline{AB} u funkciju cilja, dobivamo

$$12x_t + 18y_t = 12(6t + 6) + 18(7 - 4t) = (72t + 72) + (126 - 72t) = 198.$$

Zaključujemo da svaka točka (x_t, y_t) segmenta \overline{AB} daje optimalno rješenje $x_1^* = x_t$, $x_2^* = y_t$ (npr. za $t = 1/2$, $x_1^* = 9$, $x_2^* = 5$), pa problem ima beskonačno optimalnih rješenja. ■

Primjer 2.1.6. Neko poduzeće proizvodi dva tipa skija: skije za trčanje T_1 i skije za slalom T_2 . Sastavite linearni model dnevne proizvodnje koja će osigurati maksimalni profit.

(a) Neka su relevantni podaci sadržani u tabeli

Odjel	Broj radnih sati po skiji		Kapacitet u satima
	Skije T_1	Skije T_2	
Odjel za proizvodnju	12	8	216
Odjel za finalizaciju	2	2	48
Profit po skiji	\$40	\$30	

(b) Ako su relevantni podaci sljedeći

Odjel	Broj radnih sati po skiji		Kapacitet u satima
	Skije T_1	Skije T_2	
Odjel za proizvodnju	8	4	400
Odjel za finalizaciju	2	2	120
Profit po skiji	\$40	\$25	

i ako je poduzeće odlučilo da proizvodnja skija za slalom bude najmanje četiri puta veća od proizvodnje skija za trčanje.

Rješenje. (a) Model ima oblik

$$\begin{aligned} \max & (40x_1 + 30x_2) \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 54 \\ & x_1 + x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Crtamo

$$\begin{aligned} p_1 \equiv 3x_1 + 2x_2 &= 54 \quad \text{tj.} \quad \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{27} = 1 \\ p_2 \equiv x_1 + x_2 &= 24 \quad \text{tj.} \quad \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{24} = 1, \end{aligned}$$

i određujemo skup mogućih rješenja S (vidi sliku).

Funkcija cilja je

$$C = 40x_1 + 30x_2$$

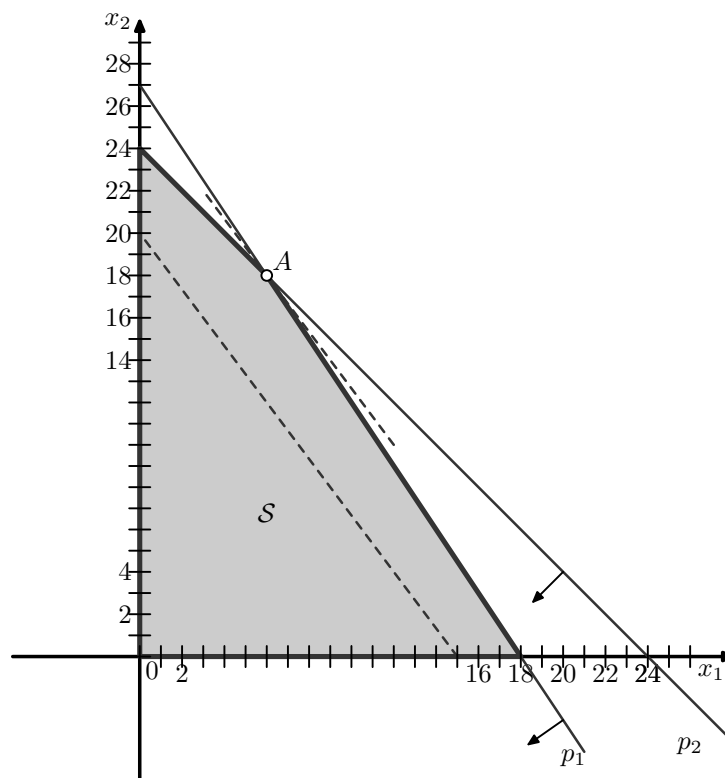
pa je

$$x_2 = \frac{C}{30} - \frac{4}{3}x_1.$$

Za $C = 600$ dobivamo pravac

$$x_2 = 20 - \frac{4}{3}x_1,$$

čije su dvije točke $(0, 20)$ i $(15, 0)$.



Sa slike vidimo da funkcija cilja poprima maksimalnu vrijednost u ekstremnoj točki A koja je sjecište pravaca p_1 i p_2 . Dobivamo optimalno rješenje $x_1^* = 6$, $x_2^* = 18$ i $\max(40x_1 + 30x_2) = 40x_1^* + 30x_2^* = 780$. Ako se proizvede 6 pari skija za trčanje i 18 pari skija za slalom, maksimalni profit će iznositi \$780.

(b) Model ima oblik

$$\max(40x_1 + 25x_2)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 60$$

$$x_2 \geq 4x_1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Funkcija cilja je

$$C = 40x_1 + 25x_2$$

pa je

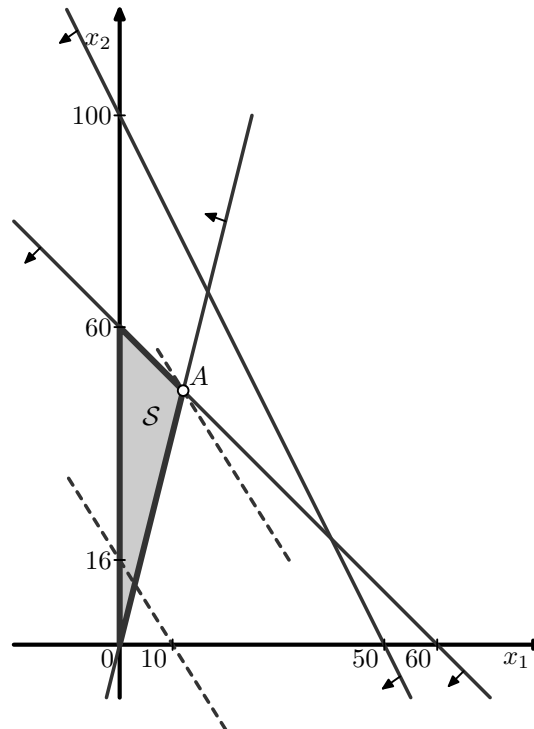
$$x_2 = \frac{C}{25} - \frac{8}{5}x_1.$$

Za $C = 400$ dobivamo

$$x_2 = 16 - \frac{8}{5}x_1,$$

ili

$$\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{16} = 1.$$



Dobiva se $x_1^* = 12, x_2^* = 48$ i $\max(40x_1 + 25x_2) = 1680$. ■

Zadaci (riješeni)

1. Grafičkom metodom riješite problem

$$\max(2x_1 + 5x_2)$$

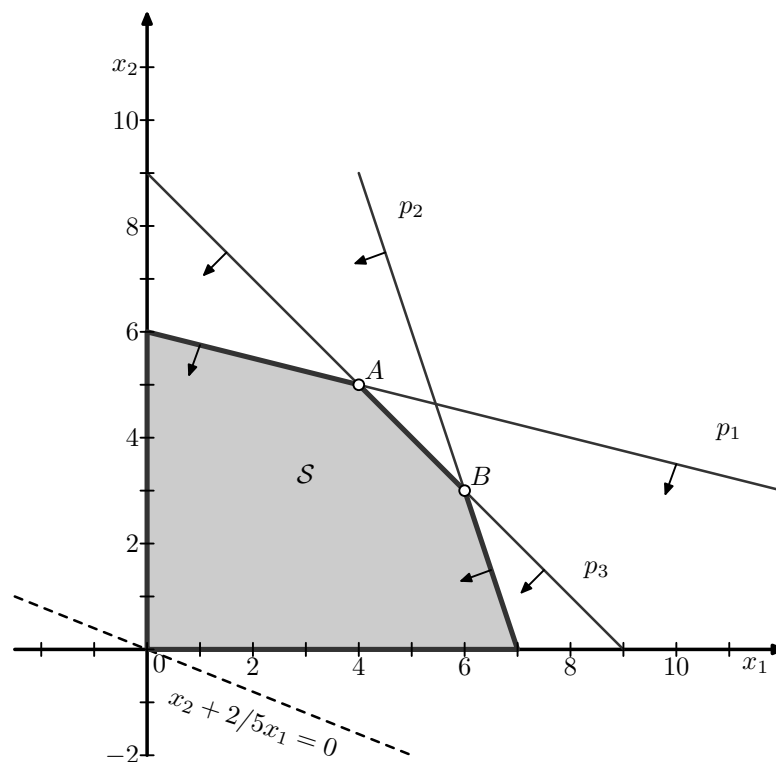
$$x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$3x_1 + x_2 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje.



-4

Funkcija cilja poprima maksimalnu vrijednost u točki A koja je sjecište pravaca p_1 i p_3 . Rješavanjem sustava

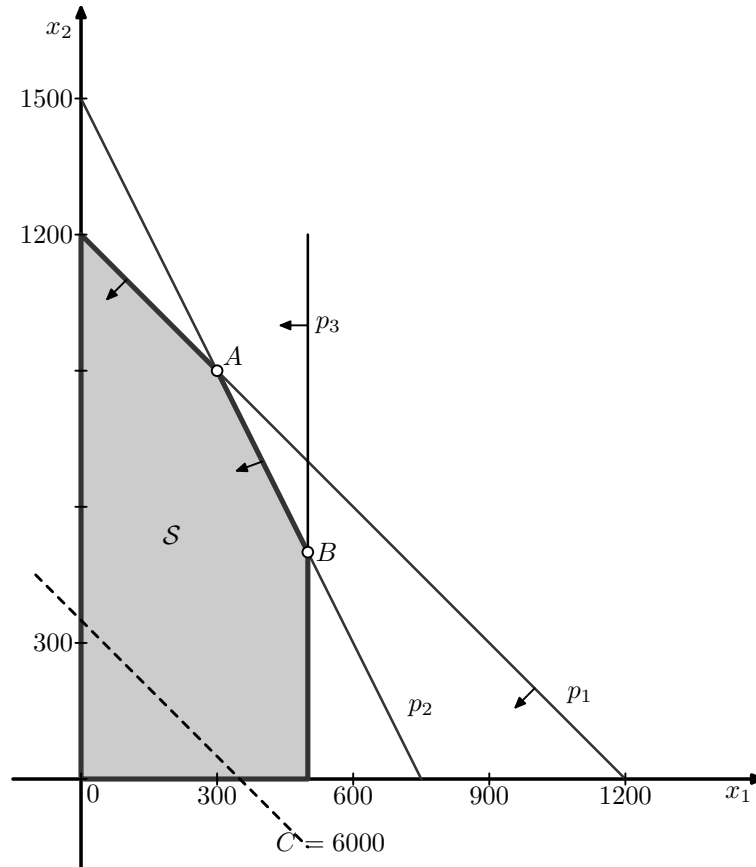
$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 &= 24 \\x_1 + x_2 &= 9\end{aligned}$$

dobivamo optimalno rješenje $x_1^* = 4$, $x_2^* = 5$ i $\max(2x_1 + 5x_2) = 33$.

2. Grafičkom metodom riješite problem

$$\max(15x_1 + 10x_2)$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 1200 \\2x_1 + x_2 &\leq 1500 \\x_1 &\leq 500 \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Rješenje.

Funkcija cilja ima oblik $C = 15x_1 + 10x_2$. Za $C = 6000$, dobivamo pravac

$$\frac{x_1}{400} + \frac{x_2}{600} = 1.$$

Funkcija cilja poprima maksimalnu vrijednost u točki A koja je sjecište pravaca p_1 i p_2 . Rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1200 \\ 2x_1 + x_2 &= 1500, \end{aligned}$$

dobivamo optimalno rješenje $x_1^* = 300$, $x_2^* = 900$ i

$$\max (15x_1 + 10x_2) = 13500.$$

3. Grafičkom metodom riješite problem maksimalnog korištenja kapaciteta. U nekom poduzeću koriste se dvije vrste proizvoda P_1 i P_2 , svaki od njih prolazi kroz tri grupe strojeva: s_1 , s_2 i s_3 . Vrijeme u satima po jedinici proizvoda i kapaciteti strojeva dani su u tabeli.

Grupa strojeva	vrijeme u satima po jedinici proizvoda		Kapacitet strojeva u satima
	P_1	P_2	
s_1	10	10	8000
s_2	10	30	18000
s_3	20	10	14000
Ukupno	40	50	40000

Odrediti plan proizvodnje kojim će se maksimalno iskoristiti proizvodni kapaciteti.

Rješenje. Neka je x_1 broj komada proizvoda P_1 , a x_2 broj komada proizvoda P_2 . Treba riješiti problem

$$\max (40x_1 + 50x_2)$$

$$10x_1 + 10x_2 \leq 8000$$

$$10x_1 + 30x_2 \leq 18000$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 14000$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

odnosno

$$\max (40x_1 + 50x_2)$$

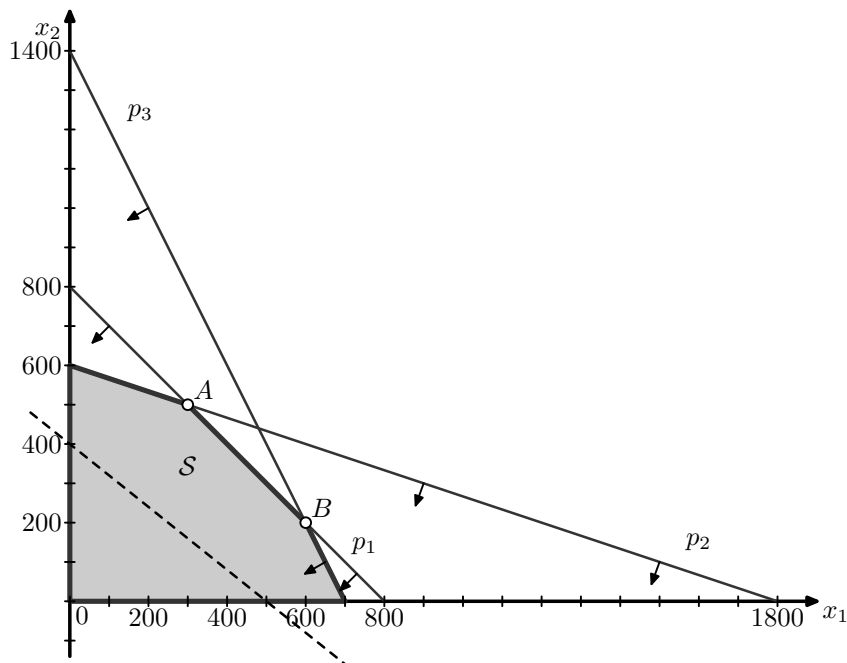
$$x_1 + x_2 \leq 800$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 1800$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1400$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Određimo skup mogućih rješenja \mathcal{S}



Funkcija cilja ima oblik $C = 40x_1 + 50x_2$. Ako stavimo $C = 2000$, dobivamo

$$\frac{x_1}{500} + \frac{x_2}{400} = 1.$$

Funkcija cilja poprima maksimalnu vrijednost u točki A koja je sjecište pravaca p_1 i p_2 . Rješavanjem sustava

$$x_1 + x_2 = 800$$

$$x_1 + 3x_2 = 1800$$

dobivamo $x_1^* = 300$, $x_2^* = 500$, $\max(40x_1 + 50x_2) = 37000$. Ako se proizvodi 300 komada proizvoda P_1 i 500 komada proizvoda P_2 kapaciteti su vremenski iskorišteni 92.5% (dokažite to!).

Kako je $10x_1^* + 10x_2^* = 8000$, grupa strojeva s_1 je potpuno iskorištena. Jer je $10x_1^* + 30x_2^* = 18000$ i grupa strojeva s_2 je potpuno iskorištena. Zbog $20x_1^* + 10x_2^* = 11000 < 14000$ kod grupe strojeva s_3 je ostalo 3000 sati neiskorištenog vremena.

4. Neko poduzeće proizvodi dvije vrste osobnih računala, standardne i portabilne. Proizvodnja standardnog modela zahtijeva \$400 troškova i 4 radna sata po jedinici proizvoda. Proizvodnja portabilnog modela zahtijeva \$250

troškova i 3 radna sata po jedinici proizvoda. Poduzeće ima na raspolaganju \$80 000 za troškove i 2160 radnih sati.

Sastavite linearni model proizvodnje koja će osigurati maksimalni prihod ako su tržišne cijene \$1500 za jedan standardni i \$2000 za jedan portabilni model.

Rješenje. Ako je

x_1 – količina standardnog modela

x_2 – količina portabilnog modela,

tada linearni program ima oblik

$$\begin{aligned} \max & (1500x_1 + 2000x_2) \\ 400x_1 + 250x_2 & \leq 80000 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leq 2160 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

5. Investitor ima na raspolaganju \$50 000 koje želi investirati u dionice tipa A i B. Dionice tipa A donose godišnji prinos od 6%, a dionice tipa B donose 10%. Njegova je strategija da mora uložiti najmanje tri puta više u dionice A nego u dionice B. Sastavite linearni model koji će osigurati maksimalni prihod (kamatu).

Rješenje. Ako je

x_1 – količina novca uložena u dionice A

x_2 – količina novca uložena u dionice B,

tada linearni program ima oblik

$$\max (0.06x_1 + 0.1x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & \leq 50000 \\ x_1 - 3x_2 & \geq 0 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

6. Lanac restorana želi proširiti svoju djelatnost otvarajući nove kapacitete. Poduzeće ima dva tipa restorana: fast food i klasični tip. Da bi se izgradio jedan novi restoran tipa fast food, potrebno je \$100 000 i pet novih radnika, a očekivani godišnji prihod je \$200 000. Da bi se izgradio jedan novi

restoran klasičnog tipa, potrebno je \$150 000 i 15 novih radnika, a očekivani godišnji prihod je \$500 000. Poduzeće ima na raspolaganju \$2 400 000 kapitala. Ugovor zahtijeva da se ne uzima više od 210 novih radnika. Također, određeni propisi zahtijevaju da broj novih restorana ne bude veći od 20.

Sastavite linearni program širenja poduzeća koje će osigurati maksimalni godišnji prihod.

Rješenje. Ako je

x_1 – broj novih restorana fast food

x_2 – broj novih restorana klasičnog tipa,

tada linearni program ima oblik

$$\begin{aligned} \max & (200\,000x_1 + 500\,000x_2) \\ 100\,000x_1 + 150\,000x_2 & \leq 2\,400\,000 \\ 5x_1 + 15x_2 & \leq 210 \\ x_1 + x_2 & \leq 20 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

7. Na raspolaganju su ljubičasta i crvena boja koje treba miješati tako da se postignu zadovoljavajuće karakteristike smjese. Podaci o relevantnim supstancama sadržanim u bojama, dani su u tabeli (podaci označuju postotke)

	Ljubičasta	Crvena
Sastojak A	1	2
Sastojak B	8	4
Cijena	2	6

Poznato je da jedinica smjese može sadržavati najviše 3% sastojka A i mora sadržavati barem 6% sastojka B.

Sastavite linearni program za optimalno rješenje boja u smislu minimalnih troškova za jedinicu smjese.

Rješenje. Ako je

x_1 – količina ljubičaste boje

x_2 – količina crvene boje,

tada linearni program ima oblik

$$\min (2x_1 + 6x_2)$$

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
 8x_1 + 4x_2 &\geq 6 \\
 x_1 + 2x_2 &= 1 \\
 x_1, x_2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

8. Trgovačko poduzeće ima na raspolaganju \$25 000 koje namjerava potrošiti na TV reklamu. Svi spotovi bi se emitirali na TV postaji gdje spot od 30 sekundi, u vremenu od 7,00–18,00 sati košta \$1100 i ima 15 000 potencijalnih gledatelja. U vremenu od 18,00–23,00 sati košta \$2200 i ima 25 000 potencijalnih gledatelja, dok u vremenu od 23,00–02,00 sati košta \$1400 i ima 18 000 potencijalnih gledatelja. TV postaja neće emitirati više od 15 spotova u svim terminima zajedno.

Sastavite linearni program optimalnog reklamiranja u svrhu maksimiziranja broja potencijalnih kupaca koji će vidjeti spotove. (Viđenja spotova od strane istog gledatelja u različita vremena smatramo različitim.)

Rješenje. Ako je

x_1 – broj spotova emitiranih u vremenu od 7,00 – 18,00

x_2 – broj spotova emitiranih u vremenu od 18,00 – 23,00

x_3 – broj spotova emitiranih u vremenu od 23,00 – 02,00,

tada linearni program ima oblik

$$\begin{aligned}
 \max (15\,000x_1 + 25\,000x_2 + 18\,000x_3) \\
 1100x_1 + 2200x_2 + 1400x_3 &\leq 25\,000 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

9. Grafičkom metodom riješite sljedeće probleme linearnog programiranja:

(a)

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + 3x_2) \\ 0.5x_1 + x_2 & \leq 4.5 \\ x_1 + x_2 & \leq 6 \\ x_1 & \leq 4 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Rj.: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4.5$
 $z^* = 13.5$.

(b)

$$\begin{aligned} \max & x_1 \\ -x_1 + x_2 & \geq 0 \\ -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Rj.: Maksimalna vrijednost funkcije cilja je u beskonačnosti.

(c)

$$\begin{aligned} \max & x_2 \\ x_1 - x_2 & \geq 2 \\ -3x_1 + 3x_2 & \geq 5 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Rj.: Nema rješenja.

(d)

$$\begin{aligned} \min & (0.5x_1 + x_2) \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 8 \\ x_1 + x_2 & \geq 2 \\ x_1 & \geq 1 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Rj.: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $z^* = 1$.

10. Na svaku kolonu od 100 vozila koja se kreće iz grada *A* dolazi 1 radionica, 2 vozila tehničke pomoći i 2 motocikla. Na isto takovu kolonu iz grada *B* dolaze 2 radionice i 1 vozilo tehničke pomoći. Jedna kolona iz grada *A* preveze 3000 tona tereta, a iz grada *B* 2500 tona tereta. Raspolaže se sa 1000 vozila, 16 radionica, 16 vozila tehničke pomoći i 14 motora. Koliki broj kolona iz grada *A* i grada *B* treba formirati da bi se osigurao maksimalni prijevoz tereta.

Rješenje. Zadane podatke prikazimo u tablici

	A	B	Raspoloživost
Broj vozila	100	100	1000
Radionice	1	2	16
Vozila tehničke pomoći	2	1	16
Motocikli	2	0	14
Jedna kolona preveze (tona)	3000	2500	
Broj kolona	x_1	x_2	

Treba riješiti problem

$$\max (3000x_1 + 2500x_2)$$

$$100x_1 + 100x_2 \leq 1000$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$2x_1 \leq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Grafičkom metodom dobivamo optimalno rješenje $x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$ i vrijedi $\max (3000x_1 + 2500x_2) = 2800$ tona tereta.

11. Grafičkom metodom riješite problem

$$\min (20x_1 + 40x_2)$$

$$6x_1 + x_2 \geq 18$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Rješenje. Optimalno rješenje je $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$ i $\min (20x_1 + 40x_2) = 160$.

Opći slučaj: n varijabli i m nejednadžbi

U prethodnim primjerima linearnog programa funkcija cilja je bila linearna funkcija dviju varijabli. Ograničenja su bila linearne nejednadžbe sa dvije varijable. Ako je funkcija cilja linearna funkcija od n varijabli, a skup ograničenja se sastoji od m linearnih nejednadžbi u varijablama koje se javljaju u funkciji cilja, imamo standardni problem linearnog programiranja, koji glasi

Maksimizirati funkciju

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

uz uvjete

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \text{-----} \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

i

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Svi uvjeti napisani su znakom \leq . Ako se pojavi ograničenje sa znakom \geq , tada množeći nejednadžbu sa -1 , dobivamo oblik nejednadžbe sa znakom \leq . Kod problema minimuma ograničenja se zapisuju sa znakom \geq . Uvedimo matrice

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Problem maksimuma zapisan u matričnom obliku glasi:

$$\text{maksimizirati } C = c^\top x$$

$$\text{uz } Ax \leq b$$

$$\text{i } x \geq 0.$$

Znak nejednakosti između vektora treba interpretirati kao nejednakost po komponentama.

Problem minimuma glasi

$$\begin{aligned} \text{minimizirati } C &= c^\top x \\ \text{uz } Ax &\geq b \\ \text{i } x &\geq 0. \end{aligned}$$

Primjer 2.1.7. *Napišite pomoću matrica problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} \max (40x_1 + 30x_2) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 54 \\ x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. *Uz oznake*

$$c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 54 \\ 24 \end{bmatrix}$$

imamo

$$\begin{aligned} \max (c^\top x) \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

■