OSNOVE MATEMATIČKE ANALIZE

Boris Guljaš

predavanja

Zagreb, 1.3.2019.

Posljednji ispravak: petak, 24. travnja 2020.

Sadržaj

1 Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^n$

1.1 Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbb{N}$, a njegovi članovi su $1, 2, 3, \ldots$, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Na skupu $\mathbb{N}$ možemo uspoređivati brojeve, tj. za svaka dva različita prirodna broja znamo koji je manji a koji je veći, tj. koji je prije kojega u prirodnom poretku. Za svaki prirodni broj znamo koji broj dolazi nakon njega, tj. tko mu je sljedbenik. Ako krenemo od prvog prirodnog broja, kojeg označavamo s 1, i od svakog broja pređemo na njegovog sljedbenika, proći ćemo svim prirodnim brojevima. Sada smo upravo opisali svojstva koja čine **Peanove**[1] **aksiome** skupa $\mathbb{N}$:

1. Svaki prirodni broj ima sljedbenika, tj. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! s(n) \in \mathbb{N}$ i ako je $s(n) = s(m)$ onda je $n = m$.

2. Postoji prvi element u skupu $\mathbb{N}$ i označavamo ga s 1, tj. $1 \in \mathbb{N}$. To je jedini element koji nije sljedbenik nekog prirodnog broja.

3. Vrijedi **aksiom matematičke indukcije**:

   Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

   1) $1 \in S$,

   2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \in S) \Rightarrow (s(n) \in S)$.

   Tada je $S = \mathbb{N}$.

Svaki skup za kojeg vrijede Peanovi aksiomi poistovjećujemo sa skupom prirodnih brojeva. Naravno, postoje različite realizacije skupa $\mathbb{N}$. Naprimjer, jednu možemo sagraditi od praznog skupa: $\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$, gdje je sljedbenik definiran sa $s(a) = \{a\}$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

[1] Giuseppe Peano (Cuneo [Piemonte], 27. kolovoz 1858. – Turin, 20. travanj 1932.) talijanski matematičar

Pomoću funkcije sljedbenik možemo na $\mathbb{N}$ definirati binarnu operaciju zbrajanja. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $s(n) = n + 1$. Sada stavimo

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad n + m = \underbrace{s(s(s(\ldots s}_{m}(n)\ldots))) = s^{[m]}(n).$$

Lako se provjeri da je ta operacija asocijativna $(\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}), n+(m+k) = (n + m) + k$, i komutativna $(\forall\, n, m \in \mathbb{N}), n + m = m + n$. Osim operacije zbrajanja, na $\mathbb{N}$ možemo definirati relaciju strogog uređaja $<$ tako da kažemo $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < s(n)$, tj. imamo $1 < 2 < 3 < \cdots < n < n + 1 < \cdots$.

Također, odmah imamo i uređaj $\leq$ ako stavimo

$$(n \leq m) \overset{def}{\Leftrightarrow} ((n < m) \vee (n = m)).$$

Taj uređaj je linearan ili jednostavan, tj. za svaka dva različita prirodna broja jedan je manji od drugoga, tj. oni su usporedivi.

Kažemo da je uređaj na skupu $\mathbb{N}$ dobar uređaj jer ima svojstvo da svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{N}$ ima prvi (najmanji) element.

Dakle, na $\mathbb{N}$ imamo zadanu algebarsku strukturu i uređaj. Pitanje je sada koliko nam je ta struktura korisna i dostatna. Već u prvim godinama školovanja iz matematike uči se kako razne probleme matematički formulirati i potom rješavati. Već najjednostavniji problemi vode na rješavanje jednadžbe oblika $a + x = b$, gdje su $a, b \in \mathbb{N}$. Možemo li tu jednadžbu riješiti u skupu $\mathbb{N}$ za svaki izbor brojeva $a, b \in \mathbb{N}$? Naravno, odgovor je negativan već za izbor $a = b = 1$. Naime, u skupu $\mathbb{N}$ ne postoji broj x sa svojstvom da je $x+1 = 1$. To slijedi iz 1. Peanovog aksioma. Kada bi takav broj postojao, onda je iz definicije zbrajanja jasno da bi vrijedilo $\forall n \in \mathbb{N}$, $x + n = n$. Što možemo sada učiniti? Uobičajen postupak kod rješavanja sličnih algebarskih problema je da proširimo (ako je moguće) skup tako da u tom većem skupu naša jednadžba ima rješenje. Dodajmo, dakle, skupu $\mathbb{N}$ element koji označavamo s 0 i stavimo ga ispred jedinice jer vrijedi $0+1 = 1$, tj. $1 = s(0)$. To je tzv. neutralni element za zbrajanje ili nula, jer pri zbrajanju s 0 svi elementi ostaju nepromijenjeni. Odmah je jasno da niti u skupu $\{0\} \cup \mathbb{N}$ nismo u mogućnosti riješiti našu jednadžbu za bilo koji izbor brojeva $a, b \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Naime, za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ jednadžba $n+x = 0$ nema rješenje u $\{0\} \cup \mathbb{N}$.Takav x zovemo suprotnim element od n i označavamo s $-n$. Dobro, dodajmo sada skupu suprotne elemente za sve $n \in \mathbb{N}$ i poredajmo ih u obratnom poretku od njihovih originala, tj. $(n, m \in \mathbb{N})$ $((n < m) \Rightarrow (-m < -n))$. Tako smo došli do skupa

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

kojeg nazivamo **skupom cijelih brojeva**. Na čitav skup $\mathbb{Z}$ možemo također proširiti i operaciju zbrajanja. Za $-m, -n \in -\mathbb{N}$ stavimo $-n + -m = -(n+m)$. Za $-m \in -\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ promatramo dva slučaja. Ako je $(n \geq m) \Rightarrow \exists\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $n = m + k$, pa stavljamo $-m + n = k$, a u slučaju $(m \geq n) \Rightarrow \exists\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $m = n + k$, pa stavljamo $-m + n = -k$. Skup $\mathbb{Z}$ sa operacijom $+$ je algebarska struktura sa svojstvima:

1. $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z},\ a + (b + c) = (a + b) + c$ (asocijativnost).

2. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z},\ \forall\ a \in \mathbb{Z},\ 0 + a = a + 0 = a$ (neutralni element).

3. $\forall\ a \in \mathbb{Z},\ \exists\ -a \in \mathbb{Z},\ a + -a = -a + a = 0$ (suprotni elementi).

4. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z},\ a + b = b + a$ (komutativnost).

Strukturu $(\mathbb{Z}, +)$ koja zadovoljava svojstva 1., 2. i 3. zovemo **grupa**, ako još vrijedi i svojstvo 4., zovemo je **komutativna (Abelova[1]) grupa** . To je osnovna algebarska struktura u kojoj je uvijek rješiva jednadžba $a + x = b$.

Na skupu $\mathbb{N}$ možemo definirati i drugu binarnu operaciju koju nazivamo množenje ako za $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ stavimo $n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m}$. Tu operaciju možemo lako proširiti i na skup $\mathbb{Z}$ stavljajući za $-n, -m \in -\mathbb{N}$, $(-n)\cdot(-m) = n \cdot m$, a za $-m \in -\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, $n \cdot (-m) = -(n \cdot m)$. Lako se pokaže da je i ta operacija asocijativna, komutativna i u skupu $\mathbb{Z}$ postoji neutralni element za množenje 1, tj. $\forall\ n \in \mathbb{Z},\ n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$. Promatrajmo sada rješivost jednadžbe $a \cdot x = b$ za $a, b \in \mathbb{Z}$. Već za $a = n \neq \pm 1$ i $b = 1$ ta jednadžba nema rješenje u $\mathbb{Z}$. Broj x za koji vrijedi $nx = 1$ nazivamo recipročni element od n ili inverz od n za operaciju množenje i označavamo s $n^{-1} = \frac{1}{n}$. Ako sada proširimo skup $\mathbb{Z}$ sa svim mogućim rješenjima jednadžbe $nx = m$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{Z}$ dobivamo skup

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}\}$$

koji zovemo **skupom racionalnih brojeva**. Napominjemo da je prikaz racionalnog broja u obliku $\frac{m}{n}$ jedinstven ako su brojevi m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djelitelja različitog od 1 ili -1.

Operaciju množenje na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo tako da za

$$\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q},\ \text{stavimo}\ \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'} \in \mathbb{Q}.$$

[1]Niels Henrik Abel (Nedstrand, 5. kolovoz 1802. - Froland, 6. travanj 1829.)norveški matematičar

Skup racionalnih brojeva bez nule, s operacijom množenja $(\mathbb{Q}, \cdot)$ je također komutativna grupa. Nula nema recipročnog elementa, tj. s nulom nije moguće dijeliti.

Operaciju zbrajanje je moguće proširiti sa skupa $\mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{Q}$ na slijedeći način:

$$\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q},\ \text{stavimo}\ \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'} \in \mathbb{Q}.$$

Međutim, operacije zbrajanja i množenja su povezane svojstvom distributivnosti množenja prema zbrajanju, tj. $\forall\, n, m, k \in \mathbb{Q}$, $n(m+k) = nm + nk$. Struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ s gore navedenim svojstvima naziva se **polje**.

Uređaj sa skupa $\mathbb{Z}$ možemo jednostavno proširiti na skup $\mathbb{Q}$ tako da $\forall\ \frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in \mathbb{Q}$, stavimo $\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' \leq m'n$. Ta relacija ima slijedeća svojstva:

1. $\forall\, a \in \mathbb{Q}$, $(a \leq a)$, (refleksivnost).
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$, (antisimetričnost).
3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$, (tranzitivnost).
4. $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $(a \leq b) \vee (b \leq a)$, (linearnost ili totalnost).

Ako uređaj zadovoljava samo svojstva 1., 2. i 3. zovemo ga **parcijalni uređaj**. Primijetimo da je linearan ili totalan uređaj moguće zadati samo sa svojstvima 2., 3. i 4. zato što 1. slijedi iz 4. za $a = b$.

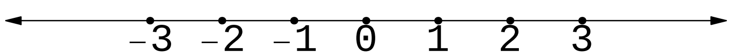
Taj uređaj je u suglasju s operacijama zbrajanja i množenja. Vrijedi

1. $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $(a \leq b) \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{Q}\ (a + c \leq b + c))$.
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $(a \leq b) \Rightarrow (\forall c \geq 0\ (ac \leq bc))$.

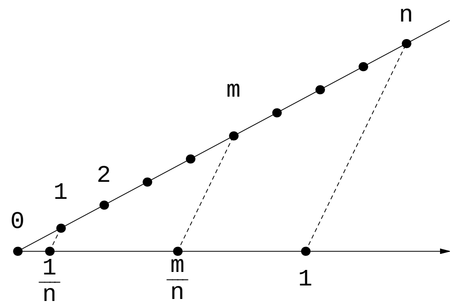
2.' $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $((a \geq 0) \wedge (b \geq 0)) \Rightarrow (ab \geq 0)$.

1.1.1 Prikaz skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ na pravcu

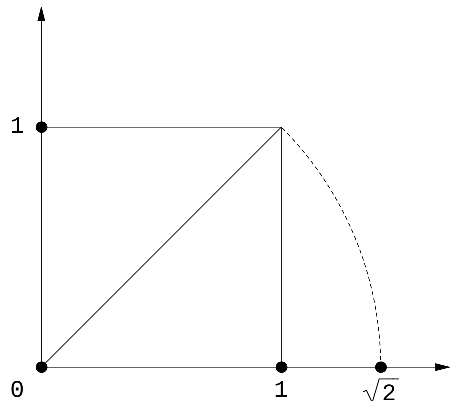
Skup cijelih brojeva prikazujemo na pravcu tako da izaberemo čvrstu točku za ishodište i njoj pridružimo cijeli broj 0. Zatim izaberemo jediničnu dužinu i nanosimo ju uzastopno na desnu stranu za pozitivne i na lijevu stranu za negativne cijele brojeve, kao što je prikazano na slijedećoj slici.



Da bismo prikazali racionalni broj $\frac{m}{n}$, $0 < m < n$, na pravcu poslužimo se Talesovim teoremom o sličnim trokutima. Kao što se vidi na slici desno, prvo na pomoćnom pravcu nanesemo n jednakih dužina, a zatim odredimo traženi broj. Na taj način je jasno da je ravnalom i šestarom moguće na pravcu konstruirati svaki racionalan broj.



Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je **gust u sebi**, tj. $\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < q_2$, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$, $q_1 < q < q_2$. Naravno, to je ispunjeno već za $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$. Prirodno pitanje je da li su na taj način dobivene sve točke na pravcu, tj. da li svaka točka na pravcu predstavlja neki racionalan broj. Konstruirajmo točku koja je od 0 udaljena za duljinu dijagonale kvadrata sa stranicama duljine 1. Iz Pitagorinog poučka slijedi da ta točka odgovara broju čiji kvadrat je jednak 2, tj. broju $\sqrt{2}$. Dokažimo da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Metoda kojom dokazujemo tu tvrdnju vrlo je česta u dokazivanju različitih matematičkih tvrdnji. Jedini način da logički točnim zaključivanjem dobijemo neistinitu tvrdnju je da je polazna pretpostavka neistinita.



Dakle, pretpostavimo da vrijedi $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Tada postoje relativno prosti brojevi $m, n \in \mathbb{N}$ (nemaju zajedničkih faktora različitih od 1) takvi da je $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, odnosno $\frac{m^2}{n^2} = 2$, a odatle dobijemo $m^2 = 2n^2$. Pošto je desna strana posljednje jednakosti prirodan broj djeljiv s 2, tada je i m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, tj. $m = 2m_0$ za neki $m_0 \in \mathbb{N}$. Naime, kada bi bilo $m = 2m_0 + 1$ slijedilo bi $m^2 = 4m_0^2 + 4m_0 + 1$. Sada imamo $4m_0^2 = 2n^2$, odnosno $2m_0^2 = n^2$. Odatle pak zaključujemo da je i $n = 2n_0$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$. Dakle, $m = 2m_0$ i $n = 2n_0$, tj. dobili smo neistinu, odnosno kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.

Sada je jasno da sve točke na pravcu ne predstavljaju racionalne brojeve, već ima (puno više) točaka koje ne predstavljaju racionalne nego tzv. iracionalne brojeve. Sve te točke zajedno predstavljaju skup **realnih brojeva** koji označavamo s $\mathbb{R}$.

Skup $\mathbb{R}$ je moguće konstruirati algebarski i to na više načina. Te konstrukcije načinili su matematičari Weierstrass, [1] Dedekind [2] i Cantor. [3]

1.2 Aksiomi polja $\mathbb{R}$, potpunost

U ovoj točki uvodimo aksiomatiku skupa realnih brojeva koja određuje sva njegova svojstva s obzirom na algebarsku strukturu i uređaj na njemu.

1.2.1 Aksiomi polja $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ je komutativna grupa s obzirom na operaciju zbrajanje $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 1. Asocijativnost zbrajanja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x + (y + z) = (x + y) + z.$$

A 2. Postoji neutralni element 0 (nula):

$$\exists! 0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ 0 + x = x + 0 = x.$$

A 3. Svaki element iz $\mathbb{R}$ ima inverz za zbrajanje (suprotni):

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! (-x) \in \mathbb{R},\ x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

A 4. Komutativnost zbrajanja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x.$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativna grupa s obzirom na množenje $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A 5. Asocijativnost množenja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(yz) = (xy)z.$$

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 31. listopad 1815. - Berlin, 19. veljača 1897.) njemački matematičar

[2] Julius Wilhelm Richard Dedekind (Braunschweig, 6. listopada 1831. - Braunschweig, 12. veljače 12, 1916.) njemački matematičar

[3] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Saint Petersburg [Rusija], 3. ožujka 1845 - Halle [Njemačka], 6.siječnja 1918) njemački matematičar

A 6. Postoji jedinstven neutralni element 1 (jedinica):

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

A 7. Svaki element iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ima inverz za množenje (recipročni):

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists! x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R},\ x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1.$$

A 8. Komutativnost množenja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx.$$

A 9. distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y + z) = xy + xz.$$

Uređenu trojku $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazivamo **poljem**.
Uvjet $1 \neq 0$ je zahtjev **netrivijalnosti**, jer bi u suprotnom bilo $\mathbb{R} = \{0\}$.

Primjer 1.1. Iz aksioma dokažimo neka poznata svojstva operacija zbrajanja i množenja.

1. 0 je jedinstven neutralni element za zbrajanje i 1 je jedinstven neutralni broj za množenje.

   Rješenje: Kada bi postojao broj $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sa svojstvo da $\forall x \in \mathbb{R}\ a + x = x + a = x$, imali bi $a = a + 0 = 0$, a to je kontradikcija. Analogno, kada bi postojao broj $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$ sa svojstvo da $\forall x \in \mathbb{R}\ bx = xb = x$, imali bi $b = b1 = 1$.

2. Suprotni i recipročni brojevi su jedinstveni.

   Rješenje: Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -a$ njegov suprotni broj, tj. $a + c = c + a = 0$. Tada bi vrijedilo $-a = -a + 0 = -a + (a + c) = (-a + a) + c = 0 + c = c$, što je kontradikcija. Dokaz jedinstvenosti recipročnog broja je analogan.

3. Vrijedi $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$.

   Rješenje: Po definiciji suprotnog elementa je $-x + (-(-x)) = (-(-x)) + (-x) = 0$ i $-x + x = x + (-x) = 0$. Iz jedinstvenosti elementa s danim svojstvom za $-x$, slijedi $x = -(-x)$.

4. Pokažimo da je $-0 = 0$.

   Rješenje: Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x+(-0) = x+0+(-0) = x+0 = x$ i $-0+x = -0+0+x = 0+x = x$, pa zbog jedinstvenosti nule vrijedi $-0 = 0$.

5. Za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x0 = 0x = 0$.

   Rješenje: Vrijedi $0x = (0+0)x = 0x+0x = 2 \cdot 0x$. Kad bi bilo $0x \neq 0$, onda bi taj element imao inverz, pa bi slijedilo $1 = 2$, a odatle $0 = 1$. To se protivi zahtjevu iz A6.

6. Vrijedi $(-1)(-1) = 1$.

   Rješenje: Imamo $(-1)(-1)+(-1) = (-1)(-1)+(-1)1 = (-1)((-1)+1) = (-1)0 = 0$ i isto tako $(-1)+(-1)(-1) = 0$. Odatle je $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.

7. Pokažimo $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

   Rješenje: Neka vrijedi $ab = 0$. Ako je $a \neq 0$ onda a ima recipročni element, pa je $b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1}0 = 0$. Analogno, ako je $b \neq 0$, onda je $a = 0$. Obratna tvrdnja slijedi iz 5. $\square$

Na skupu $\mathbb{R}$ je zadan linearan (totalan) uređaj $\leq$.

A 10. Linearnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x \leq y) \vee (y \leq x).$$

A 11. Antisimetričnost uređaja:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y).$$

A 12. Tranzitivnost uređaja:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z).$$

Uređaj je u skladu s operacijama zbrajanja i množenja.

A 13. Usklađenost zbrajanja:

$$(x \leq y) \Rightarrow (\forall z,\ (x+z \leq y+z)).$$

A 14. Usklađenost množenja:

$$((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow (xy \geq 0).$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je **totalno uređeno polje**.

Primjer 1.2. Vrijedi monotonost množenja:

$$((x \leq y) \wedge (z \geq 0)) \Rightarrow (xz \leq yz).$$

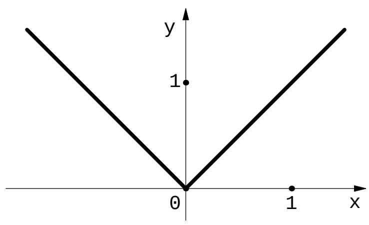
Rješenje: Imamo $x \leq y \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow (y-x)z \geq 0 \Rightarrow yz - xz \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$. □

Primjer 1.3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno polje.

Zadatak 1.1. Utvrdite koje aksiome od A1 do A14 zadovoljavaju skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ s obzirom na operacije i uređaj na njima.

Često koristimo i **strogi uređaj** $<$. On se definira tako da vrijedi $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Također, podrazumjevamo da $x \geq y$ znači $y \leq x$ i analogno $x > y$ znači $y < x$. Jasno je da u totalno uređenom polju za svaka dva x, y vrijedi točno jedna od relacija $x < y$, $x = y$, $x > y$.

U radu sa skupom realnih brojeva važnu ulogu igra funkcija koju zovemo **apsolutna vrijednost** realnog broja. Ona se definirana sa:



$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}, \ (x \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Iz definicije funkcije za svaki $a \in \mathbb{R}$ slijedi nejednakost

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Često je potrebno provjeriti nejednakost $|x| \leq \varepsilon$, gdje je $\varepsilon \geq 0$ realan broj. Ta nejednakost je ekvivalentna s dvije nejednakosti $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$.

Za apsolutnu vrijednost imamo slijedeće tvrdnje.

Propozicija 1.1. *Vrijedi*

$$\begin{array}{rll} (i) & |a| \geq 0 & \forall a \in \mathbb{R}, \\ (ii) & |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, & \\ (iii) & |a \cdot b| = |a| \cdot |b| & \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \\ (iv) & |a + b| \leq |a| + |b| & \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \\ (v) & ||a| - |b|| \leq |a - b| & \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1.2}$$

Dokaz:

Ad (iii): Gledamo četiri slučaja: i) $a \geq 0, b \geq 0$, ii) $a \geq 0, b \leq 0$, iii) $a \leq 0, b \geq 0$, iv) $a \leq 0, b \leq 0$. U slučaju i) je $|a| = a, |b| = b$ pa je $|a||b| = ab = |ab|$. U slučaju ii) je $ab \leq 0$ pa je $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$, itd.

Ad (iv): Iz nejednakosti

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned}$$

zbrajanjem dobijemo

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

što daje (iv).

Ad (v): Vrijedi

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Zamjenom a sa b dobijemo

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b|.$$

Dakle,

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

odakle slijedi nejednakost (v). □

Zadatak 1.2. Nejednakost (1.2 (iv)) možemo poopćiti na sumu od konačno realnih brojeva $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Dokazati prethodnu nejednakost matematičkom indukcijom.

Definiramo funkciju udaljenosti između realnih brojeva $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $d(a, b) = |a - b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Ta funkcija ima slijedeća svojstva.

Propozicija 1.2. *Vrijedi*

$$\begin{array}{lll} (i) & d(a,b) \geq 0 & \forall a \in \mathbb{R}, \\ (ii) & d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b, & \\ (iii) & d(a,b) = d(b,a) & \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \\ (iv) & d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) & \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1.3}$$

1.2.2 Supremum i infimum skupa, potpunost

Definicija 1.1. Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **omeđen odozgo** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\forall x \in S$, $x \leq M$. Broj M zovemo **gornja međa** ili **majoranta** skupa S.

Kažemo da je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, **omeđen odozdo** u $\mathbb{R}$, ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\forall x \in S$, $m \leq x$. Broj m zovemo **donja međa** ili **minoranta** skupa S.

Skup $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, je **omeđen** u $\mathbb{R}$, ako je omeđen odozdo i odozgo u $\mathbb{R}$.

Jasno, ako S ima majorantu, onda on ima beskonačno mnogo majoranti. Naime, svaki veći broj je također majoranta. U tom svjetlu ima smisla slijedeća definicija.

Definicija 1.2. Broj $L \in \mathbb{R}$ koji je najmanja majoranta nepraznog odozgo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **supremum** skupa S i pišemo $L = \sup S$.

$L = \sup S$ je karakteriziran slijedećim svojstvima:

$(i.)$ $\forall x \in S$, $x \leq L$.

$(ii.)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $a < L$, $\exists x \in S$, $a < x$.

Često je praktično uvjet $(ii.)$ pisati u obliku:

$(ii.)'$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$, $L - \varepsilon < x$.

Supremum koji je u skupu nazivamo **maksimum**, tj. ako je $L = \sup S \in S$ onda je $L = \max S$.

Sada smo u mogućnosti zadati posljednji aksiom skupa $\mathbb{R}$.

A 15. Aksiom potpunosti:

Svaki neprazan odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Uređeno polje koje zadovoljava i A 15. zovemo **uređeno potpuno polje**. Dakle $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je uređeno potpuno polje.

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)**.** *U skupu* $\mathbb{R}$ *vrijedi tvrdnja:*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a > 0, b > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ na > b.$$

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije istinita, tj. neka vrijedi:

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R},\ a > 0, b > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ na \leq b.$$

To znači da je skup $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ odozgo ograničen skup u $\mathbb{R}$. Sada po A15. postoji $c = \sup A$, tj. $\forall n,\ na \leq c$ i $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ c - \varepsilon < na$. Sada za $\varepsilon = a > 0$ dobijemo $c - a < na$, odnosno $c < (n+1)a \in A$, što je kontradikcija s činjenicom da je c gornja međa od A. $\square$

Zadatak 1.3. Pokažite bez upotrebe A 15. da Arhimedov aksiom vrijedi u skupu $\mathbb{Q}$.

Rješenje: Dovoljno je pokazati da $\forall k, m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ nk > m$. U suprotnom bismo imali $k, m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ nk \leq m$. Tada za $n = m$ imamo $mk \leq m \Rightarrow k = 1$. No tada bi vrijedilo $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leq m$, što nije istina već za $n = m + 1$. Sada za svaki $q = \frac{m}{k}, q' = \frac{m'}{k'} \in \mathbb{Q},\ m, k, m', k' \in \mathbb{N}$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nmk' > m'k$, odnosno $nq > q'$. $\square$

Zadatak 1.4. Utvrdite da li postoji i ako postoji odredite supremum skupa $S = \{\frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje: Skup S je odozgo ograničen s 1, tj. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{n+1} \leq 1$. Pokažimo da je $1 = \sup S$. Uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Trebamo naći $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (1-\varepsilon)(n+1) < n \Leftrightarrow -n\varepsilon + 1 - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow 1 < (n+1)\varepsilon.$$

Iz Arhimedovog aksioma slijedi postojanje $m \in \mathbb{N},\ m\varepsilon > 1$. Uzmimo sada $n = m - 1$ i imamo tvrdnju. $\square$

Primjer 1.4. Polje $\mathbb{Q}$ nije potpuno.

Rješenje: Neka je $S = \{q \in \mathbb{Q};\ 1 < q,\ q^2 < 2\}$. Očito je S odozgo omeđen s $2 \in \mathbb{Q}$. Skup S nema maksimalan element. Naime, za bilo koji $q \in S$ po Arhimedovom aksiomu za brojeve $2 - q^2 > 0$ i $2q + 1 > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n(2 - q^2) > 2q + 1$. Tada je $n^2(2 - q^2) > n(2q + 1) = 2nq + n \geq 2nq + 1 \Rightarrow (q + \frac{1}{n})^2 < 2$. Dakle, postoji $q' = q + \frac{1}{n} \in S,\ q' > q$.

Pokažimo da vrijedi: $a \in \mathbb{Q},\ a > 0$, je majoranta od $S \Leftrightarrow a^2 > 2$. Neka je $a \in \mathbb{Q},\ a > 0$, majoranta od S. Tada je $a^2 \neq 2$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Kada bi bilo $a^2 < 2$, onda bi a bio maksimum od S, a takvog nema. Dakle, mora biti $a^2 > 2$. Obratno, ako je $0 < a$ i $a^2 > 2$, onda za svaki $q \in S$ imamo $q^2 < 2 < a^2 \Rightarrow q < a$, tj. a je majoranta od S.

Pokažimo da ne postoji najmanja majoranta skupa S u $\mathbb{Q}$. Neka je a bilo koja majoranta skupa S. Tada po Arhimedovom aksiomu za brojeve $a^2 - 2 > 0$ i $2a > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n(a^2 - 2) > 2a$. Odatle je $\frac{2a}{n} < a^2 - 2 < a^2 - 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 < \left(a - \frac{1}{n}\right)^2$. Dakle, postoji majoranta $a' = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, $a' < a$. □

Zadatak 1.5. Dokažite da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Rješenje: U suprotnom slučaju bi vrijedilo $\exists \varepsilon > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $(q \leq x - \varepsilon) \vee (x + \varepsilon \leq q)$. Neka je $q_1 \leq x - \varepsilon$ i $x + \varepsilon \leq q_2$. Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $2n\varepsilon > q_2 - q_1$ i odredimo $\alpha_k = q_1 + \frac{k}{n}(q_2 - q_1) \in \mathbb{Q}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1, n)$. Neka je $0 \leq k_0 < n$ najveći od indeksa za koje je $\alpha_k \leq x - \varepsilon$. Zbog $x + \varepsilon \leq \alpha_{k_0+1}$ vrijedi $\frac{q_2 - q_1}{n} = \alpha_{k_0+1} - \alpha_{k_0} \geq 2\varepsilon$, što je kontradikcija s izborom broja n. □

Definicija 1.3. Broj $\ell \in \mathbb{R}$ koji je najveća minoranta nepraznog odozdo omeđenog skupa $S \subset \mathbb{R}$ nazivamo **infimum** skupa S i pišemo $\ell = \inf S$.

$\ell = \inf S$ je karakteriziran slijedećim svojstvima:

(*i.*) $\forall x \in S$, $\ell \leq x$.

(*ii.*) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > \ell$, $\exists x \in S$, $x < a$.

(*ii.*)$'$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$, $x < \ell + \varepsilon$.

Infimum koji je u skupu nazivamo **minimum**, tj. ako je $\ell = \inf S \in S$ onda je $\ell = \min S$.

Teorem 1.2. *Neka je $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, odozdo ograničen skup. Tada postoji $\ell = \inf S \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Neka je $S_- = \{-x;\ x \in S\}$. Skup S je odozdo omeđen u $\mathbb{R}$, tj. postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\forall x \in S$, $m \leq x$. Tada je $\forall -x \in S_-$, $-x \leq -m$, tj. skup S_- je odozgo omeđen u $\mathbb{R}$. Prema A 15. postoji $L = \sup S_- \in \mathbb{R}$, tj. $\forall -x \in S_-$, $-x \leq L$ i $\forall \varepsilon > 0$, $\exists -x \in S_-$, $L - \varepsilon < -x$. To možemo napisati i na slijedeći način: $\forall x \in S$, $-L \leq x$ i $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$, $x < -L + \varepsilon$. To kazuje da je $\ell = -L = \inf S$, tj. postoji infimum skupa S. □

Zadatak 1.6. Neka je $A \subseteq B \subset \mathbb{R}$ i B ograničen skup. Tada je $\sup A \leq \sup B$ i $\inf A \geq \inf B$.

Rješenje: Svaka majoranta skupa B ujedno je i majoranta skupa A. Tako je i $\sup B$ majoranta za A. Pošto je supremum od A najmanja majoranta skupa A, to vrijedi $\sup A \leq \sup B$. Analogno, svaka minoranta skupa B ujedno je i minoranta skupa A, pa je infimum od B minoranta za A. Odatle za infimum skupa a kao najveću minorantu od A vrijedi $\inf A \geq \inf B$. □

Zadatak 1.7. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ ograničeni skupovi. Ako vrijedi $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ takav da je $a \leq b$ onda je $\sup A \leq \sup B$, a u slučaju da vrijedi $\forall b \in B$ $\exists a \in A$ takav da je $a \leq b$ onda je $\inf A \leq \inf B$.

Rješenje: Iz prvog uvjeta $\forall a \in A$ slijedi $a \leq b \leq \sup B$, tj. $\sup B$ je gornja međa skupa A. Odatle imamo $\sup A \leq \sup B$. Analogno, $\forall b \in B$ vrijedi $b \geq a \geq \inf A$, iz čega slijedi $\inf B \geq \inf A$. □

Zadatak 1.8. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}$ odozgo ograničeni neprazni skupovi. Tada je skup $A + B = \{x + y \; ; \; x \in A, y \in B\}$ odozgo ograničen i vrijedi $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Rješenje: Zbog $x \leq \sup A$, $\forall x \in A$, i $y \leq \sup B$, $\forall y \in B$, vrijedi $x + y \leq \sup A + \sup B$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, tj. $\sup A + \sup B$ je gornja međa skupa $A + B$.

Neka je $\varepsilon > 0$ odabran po volji. Postoje $x \in A$ i $y \in B$ takvi da je $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x$ i $\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y$. Tada je $x + y > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$, tj. $\sup A + \sup B - \varepsilon$ nije gornja međa skupa $A + B$. □

Zadatak 1.9. Neka su $A, B \subset \langle 0, +\infty\rangle$ odozgo ograničeni neprazni skupovi. Tada je skup $AB = \{xy \; ; \; x \in A, y \in B\}$ odozgo ograničen i vrijedi $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Rješenje: Zbog $x \leq \sup A$, $\forall x \in A$, i $y \leq \sup B$, $\forall y \in B$, vrijedi $xy \leq \sup A \sup B$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, tj. $\sup A \sup B$ je gornja međa skupa AB.

Neka je $0 < \varepsilon < \frac{(\sup A + \sup B)^2}{4}$ odabran po volji i neka je $0 < \varepsilon_0 < \frac{\sup A + \sup B}{2} - \sqrt{\frac{(\sup A + \sup B)^2}{4} - \varepsilon}$. Postoje $x \in A$ i $y \in B$ takvi da je $\sup A - \varepsilon_0 < x$ i $\sup B - \varepsilon_0 < y$. Tada je $xy > (\sup A - \varepsilon_0)(\sup B - \varepsilon_0) = \varepsilon_0^2 - (\sup A + \sup B)\varepsilon_0 + \sup A \sup B > \sup A \sup B - \varepsilon$. Dakle, $\sup A \sup B - \varepsilon$ nije gornja međa. Zato što je $\varepsilon > 0$ odabran po volji, vrijedi $\sup(AB) = \sup A \sup B$. □

Aksiom A 15. karakterizira svojstvo potpunosti koje razlikuje polje $\mathbb{R}$ od polja $\mathbb{Q}$. Slijedeći teorem opisuje to svojstvo na prihvatljiviji način.

Teorem 1.3. (Cantorov aksiom) *Neka za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo segmente $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ takve da vrijedi $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Označimo s $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. Skupovi A i B su ograničeni (odozdo s a_1 i odozgo s b_1) pa postoje $\sup A$ i $\inf B$. Želimo pokazati da vrijedi $[\sup A, \inf B] \subseteq [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ očigledno vrijedi $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$. Dokažimo da vrijedi $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_m$. Ako je $n = m$ onda je to jasno. Ako je $n < m$, onda $n < n + 1 < \cdots < m - 1 < m$ povlači $a_n \leq \cdots \leq a_m \leq b_m$, tj. $a_n \leq b_m$. analogno vrijedi za $m < n$. Odatle zaključujemo $\forall n \in \mathbb{N}$ je a_n donja međa za skup B, dakle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \inf B$. Sada je $\inf B$ gornja međa za skup A, pa vrijedi $\sup A \leq \inf B$. $\square$

***Napomena* 1.1.** Druga moguća aksiomatika polja $\mathbb{R}$ se dobije ako aksiom A 15. zamijenimo s Arhimedovim aksiomom (teorem 1.1) i Cantorovim aksiomom (teorem 1.3).

1.3 Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

Neka je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Kartezijev produkt skupa $\mathbb{R}$ sa samim sobom. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je skup svih uređenih parova (a, b) gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Sada na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiramo operacije zbrajanja i množenja.

Neka je $\oplus : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ operacija zbrajanja definiran s

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \tag{1.4}$$

i neka je $\odot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ operacija množenja definiran s

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ (a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1.5}$$

U daljnjem tekstu ćemo umjesto oznaka $\oplus$ i $\odot$ koristiti iste oznake kao i za operacije u $\mathbb{R}$, tj. $+$ i $\cdot$, s tim da je uvijek jasno kada su operacije s parovima realnih brojeva ili sa samim realnim brojevima.

Skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ snabdjeven operacijom zbrajanja (1.4) i množenja (1.5) zovemo skup **kompleksnih brojeva** i označavamo s $\mathbb{C}$.

Teorem 1.4. *Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je polje.*

Dokaz: Pokažimo da za skup $\mathbb{C}$ i operacije zbrajanja (1.4) i množenja (1.5) vrijede aksiomi A 1. do A 9. Aksiomi A 1. i A 4. slijede direktno iz istih aksioma za $\mathbb{R}$ i definicije operacije zbrajanja. Neutralni element za zbrajanje je par $(0,0)$, tj. $(0,0)+(a,b) = (0+a, 0+b) = (a+0, b+0) = (a,b)$. Za bilo koji par (a,b) suprotni par $-(a,b) = (-a,-b)$. Vrijedi $(a,b)+(-a,-b) = (a+(-a), b+(-b)) = (0,0)$ i $(-a,-b)+(a,b) = (-a+a, -b+b) = (0,0)$.

Asocijativnost i komutativnost množenja i distributivnost množenja na zbrajanje slijede direktnim računom iz asocijativnosti i komutativnost množenja i zbrajanja na $\mathbb{R}$, te distributivnosti množenja na zbrajanje u $\mathbb{R}$. Jedinica ili neutralni element za množenje je par $(1,0)$, tj. za svaki par (a,b) imamo $(a,b)(1,0) = (a1-b0, a0+b1) = (a,b)$ i $(1,0)(a,b) = (1a-0b, 1b+0a) = (a,b)$.

Za svaki $(a,b) \neq (0,0)$, tj. $a^2+b^2 \neq 0$, definiramo

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Vrijedi $(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{aa-b(-b)}{a^2+b^2}, \frac{a(-b)+ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$

□

Na $\mathbb{C}$ možemo definirati uređaj $((a,b) \preceq (c,d)) \overset{def}{=} (a \leq c) \wedge (b \leq d)$. Taj uređaj je samo parcijalni uređaj, jer npr. $(1,0)$ i$(0,1)$ nisu usporedivi.

Uočimo podskup $\mathbb{R}' = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Taj skup je zatvoren na operacije zbrajanja i množenja, tj. $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$ i $(a,0)(b,0) = (ab,0)$. U skupu $\mathbb{R}'$ vrijede aksiomi A 1. do A 9. Štoviše, restrikcija relacija parcijalnog uređaja na $\mathbb{C}$ daje na $\mathbb{R}'$ linearan uređaj koji je u skladu s operacijama zbrajanja i množenja. Tako je $\mathbb{R}'$ uređeno potpuno polje, dakle, možemo ga izjednačiti s $\mathbb{R}$. U tom smislu pišemo $(0,0) = 0$, $(1,0) = 1$ i općenito $(a,0) = a$.

Kompleksan broj $(0,1)$ zovemo **imaginarna jedinica** i označavamo ga s $i = (0,1)$. Tako za svaki kompleksan broj vrijedi $(a,b) = (a,0)+(b,0)(0,1)$ pa pišemo $(a,b) = a+bi$. Tako vrijedi $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$, pa se operacije s kompleksnim brojevima svode na operacije s binomima. Ako je $z = a+bi \in \mathbb{C}$, onda je $a = \mathrm{Re}z$ realni dio i $b = \mathrm{Im}z$ imaginarni dio od z.

Za komleksni broj $z = a+bi$ definiramo njegov konjugirani broj $\overline{z} = a-bi$. Realni broj $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ zovemo **modul** kompleksnog broja z. Vrijedi $|\mathrm{Re}z| = |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ i $|\mathrm{Im}z| = |b| \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Za $z, v \in \mathbb{C}$ vrijedi $\overline{z+v} = \overline{z}+\overline{v}$, $\overline{zv} = \overline{z}\overline{v}$ i $|zv| = |z||v|$. Također, za modul vrijedi nejednakost trokuta

$$|z+v| \leq |z|+|v|,\ \forall\, z, v \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Vrijedi

$$|z+v|^2 = (z+v)(\overline{z}+\overline{v}) = |z|^2+|v|^2+z\overline{v}+\overline{z}v = |z|^2+|v|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{v}) \leq$$

$$\leq |z|^2+|v|^2+2|\mathrm{Re}(z\overline{v})| \leq |z|^2+|v|^2+2|zv| = (|z|+|v|)^2.$$

Odatle zbog rasta funkcije $\sqrt{\cdot}$ na $\mathbb{R}_+$ slijedi (1.6). □

1.4 Prostor $\mathbb{R}^n$

Skup $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n);\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}\}$ je n-dimenzionalni realni vektorski prostor sa operacijama definiranim po komponentama, tj. za bilo koje elemente $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ i $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ je $\lambda x+\mu y = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1,\ldots,\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)\in\mathbb{R}^n$.

Na $\mathbb{R}^n$ definiramo skalarni produkt $(\cdot|\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tako da za bilo koje $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ stavimo

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k. \tag{1.7}$$

Zadatak 1.10. Pokažite da vrijedi

$$\begin{array}{rll} (i) & (x|x)\geq 0 & \forall x\in\mathbb{R}^n,\\ (ii) & (x|x)=0 \Leftrightarrow x=0=(0,\ldots,0), & \\ (iii) & (x+y|z)=(x|z)+(y|z) & \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}^n,\\ (iv) & (\alpha x|y)=\alpha(x|y) & \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R},\\ (v) & (x|y)=(y|x) & \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n. \end{array} \tag{1.8}$$

Skalarni produkt inducira normu $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. U slučaju skalarnog produkta (1.7), za $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ imamo

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Zadatak 1.11. Pokažite da za normu inducirani sa skalarnim produktom vrijedi

$$\begin{array}{rll} (i) & \|x\|_2\geq 0 & \forall x\in\mathbb{R}^n,\\ (ii) & \|x\|_2=0\Leftrightarrow x=0, & \\ (iii) & \|\alpha x\|_2=|\alpha|\|x\|_2 & \forall\, x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R},\\ (iv) & \|x+y\|_2\leq\|x\|_2+\|y\|_2 & \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n. \end{array} \tag{1.10}$$

Norma inducira metriku $d(x,y) = \|x-y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Metrika d_2 inducirana normom (1.9) za $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), y = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ je oblika

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.11}$$

Zadatak 1.12. Pokažite da za metriku induciranu normom vrijedi

$$\begin{array}{rll} (i) & d_2(x,y) \geq 0 & \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \\ (ii) & d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, & \\ (iii) & d_2(x,y) = d_2(y,x) & \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \\ (iv) & d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y) & \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{1.12}$$

Zadatak 1.13. Neka je $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ i neka je svaki od prostora snabdjeven normom definiranom s (1.9). Pokažite da je tada $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ i $\forall y \in \mathbb{R}^m$. Također je $\|(x,y)\|_2 \geq \max\{\|x\|_2, \|y\|_2\}$.

1.5 Ekvipotentni skupovi, prebrojivost

Ako imamo dva skupa A i B s konačnim brojem elemenata, teorijski je lako ustanoviti imaju li oni jednak broj elemenata. Naime, provodimo slijedeći postupak: uzmimo element skupa A i element skupa B, sparimo ih. Nastavimo li tako sparivati nesparene elemente skupa A s nesparenim elementima skupa B, nakon konačno koraka doći ćemo do jedne od slijedećih situacija:

1. Niti u skupu A, niti u skupu B nema nesparenih elemenata.

2. U skupu B nema nesparenih elemenata.

3. U skupu A nema nesparenih elemenata.

U slučaju 1. konstruirali smo obostrano jednoznačno preslikavanje sa skupa A na skup B (bijekciju) i jasno je da skupovi A i B imaju jednak broj elemenata. U slučaju 2. konstruirali smo injekciju sa skupa B u skup A i jasno je da skup A ima više elemenata od skupa B. U slučaju 3. konstruirali smo injekciju sa skupa A u skup B i jasno je da skup B ima više elemenata od skupa A. Ovo je motivacija za slijedeću definiciju i u slučaju kada skupovi nemaju konačan broj elemenata.

Definicija 1.4. Za skupove A i B kažemo da imaju jednak broj elemenata, tj. da su **jednakobrojni** ili **ekvipotentni** ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Tada još kažemo da A i B imaju jednak kardinalni broj i pišemo $k(A) = k(B)$ ili $A \sim B$.

Ako postoji injekcija $f : A \to B$ onda kažemo da A ima manje ili jednako elemenata od B, tj. $k(A) \leq k(B)$.

Zadatak 1.14. Pokažite da je ekvipotentnost relacija ekvivalencije, tj. da vrijedi

(i) $A \sim A$,

(ii) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$,

(iii) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$.

Rješenje:

(i) Identiteta $i_A : A \to A$ je bijekcija,

(ii) $f : A \to B$ bijekcija $\Rightarrow (f^{-1} : B \to A)$ bijekcija,

(iii) $f : A \to B \wedge g : B \to C$ bijekcije $\Rightarrow g \circ f : A \to C$ je bijekcija. □

Slijedeći teorem bitno olakšava utvrđivanje ekvipotentnosti skupova.

Teorem 1.5 (Cantor-Bernstein[1]). *Ako postoje injekcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda je $A \sim B$.*

Dokaz: Prema pretpostavci teorema postoje bijekcije $f : A \to f(A) \subseteq B$ i $g : B \to g(B) \subseteq A$. Želimo pokazati da postoji bijekcija $h : A \to B$.

Prvo pokažimo da postoji $T \subseteq A$ takav da je $A \setminus T = g(B \setminus f(T))$. Definirajmo funkciju $k : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ tako da za $X \subseteq A$ vrijedi $k(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$. Za funkciju k i bilo koja dva podskupa $X, Y \subseteq A$ vrijedi $(X \subseteq Y) \Rightarrow (k(X) \subseteq k(Y))$. Naime, $(X \subseteq Y) \Rightarrow (f(X) \subseteq f(Y)) \Rightarrow (B \setminus f(X) \supseteq B \setminus f(Y)) \Rightarrow (g(B \setminus f(X)) \supseteq g(B \setminus f(Y))) \Rightarrow (k(X) = A \setminus g(B \setminus f(X)) \subseteq A \setminus g(B \setminus f(Y)) = k(Y))$.

Neka je $\mathcal{F} = \{S \subseteq A \mid S \subseteq k(S)\}$ familija podskupova od A. Jasno, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ jer je $\emptyset \subseteq k(\emptyset)$. Neka je T unija svih elemenata familije $\mathcal{F}$. Pokažimo da je $T \subseteq A$ fiksna točka preslikavanja k, tj. $k(T) = T$. Za svaki $S \in \mathcal{F}$ vrijedi $S \subseteq k(S)$ i $S \subseteq T$, a odatle je $k(S) \subseteq k(T)$, što daje $S \subseteq k(T)$. Tada je i $T \subseteq k(T)$, tj. $T \in \mathcal{F}$. Odatle imamo $k(T) \subseteq k(k(T))$, pa je i $k(T) \in \mathcal{F}$. To povlači $k(T) \subseteq T$, iz čega slijedi $k(T) = T$, odnosno $T = A \setminus g(B \setminus f(T))$ ili $A \setminus T = g(B \setminus f(T))$.

[1] Sergej Natanovič Bernstein (Odessa, 5. ožujak 1880. – – Moskva, 26. listopad 1968.) ukrajinski matematičar

Sada konstruiramo funkciju $h : A \to B$ tako da je

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{za} \quad x \in T \\ g^{-1}(x) & \text{za} \quad x \in A \setminus T \end{cases} .$$

Funkcija h je tražena bijekcija. Dakle, $A \sim B$. $\square$

***Napomena* 1.2.** Primijetimo da prethodni teorem govori o antisimetričnosti uređaja među kardinalnim brojevima, odnosno

$$((k(A) \leq k(B)) \wedge (k(B) \leq k(A))) \Rightarrow (k(A) = k(B)).$$

Definicija 1.5. Kažemo da je beskonačan skup S **prebrojiv** ako je ekvipotentan skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. U suprotnom slučaju kažemo da je taj skup **neprebrojiv**.

Zadatak 1.15. Pokažite da vrijedi

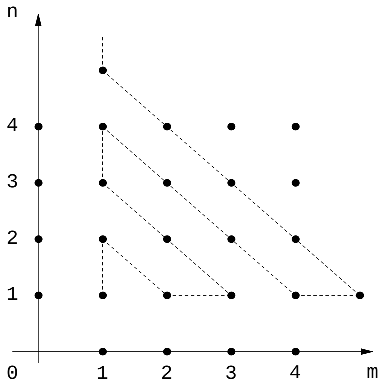
1. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} + 1$.
3. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.
4. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, je $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$ i $[a, b] \sim [c, d]$.
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $[a, b] \sim \langle a, b\rangle$.
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je $\mathbb{R} \sim \langle a, b\rangle$.
7. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Rješenje:

1. Preslikavanje $n \mapsto 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je bijekcija.
2. Preslikavanje $n \mapsto 2n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je bijekcija.
3. Preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definirano s $f(1) = 0$ i $f(2n) = n$, $f(2n+1) = -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ je bijekcija.
4. $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ definirano s $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$ je bijekcija.
5. Identiteta je injekcija s $\langle a, b\rangle$ u $[a, b]$. Po 4. postoji bijekcija s $[a, b]$ na bilo koji segment u $\langle a, b\rangle$, npr. na $[\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}]$. Tada je to injekcija s $[a, b]$ u $\langle a, b\rangle$. Sada po teoremu 1.5 slijedi tvrdnja.

6. $Tg^{-1} : \mathbb{R} \to \langle a, b\rangle$ je bijekcija.
7. Konstruiramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kako je grafički prikazano na slici desno. Svakom uređenom paru prirodnih brojeva jednoznačno je određen poredak na putanji označenoj na slici. Funkcija f je definirana formulom:

$$f((m,n)) = \begin{cases} \binom{m+n-1}{2} + n; & m+n-1 \text{ neparan} \\ \binom{m+n-1}{2} + m; & m+n-1 \text{ paran} \end{cases}$$



Propozicija 1.3. *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.*

Dokaz: Skup $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}, \text{su relativno prosti}\}$, pa postoji injekcija sa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nadalje, komponiramo tu injekciju s bijekcijom sa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ iz zadatka 1.15. i dobijemo injekciju s $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N}$. S duge strane identiteta je injekcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{Q}$, pa po teoremu 1.5. imamo $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. □

Propozicija 1.4. *Neprazan podskup prebrojivog skupa je konačan ili prebrojiv.*

Dokaz: Neka je $A \sim \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{N}$ bijekcija, i $B \subseteq A$. Ako je B konačan onda je tvrdnja očita. Ako B nije konačan, onda je identiteta $i : B \to A$, $i(x) = x$, $\forall x \in B$, injekcija s B u A. Tada je $f \circ i : B \to \mathbb{N}$ injekcija. Konstruirajmo injekciju $g : \mathbb{N} \to B$ na slijedeći način:

Uzmimo bilo koji $b \in B$ i stavimo $g(1) = b$. Pretpostavimo da smo za neki $n \in \mathbb{N}$ definirali $g(k) = b_k \in B$, $1 \le k \le n$, gdje su svi $b_1, \ldots, b_n$ različiti. Pošto skup B nije konačan, to postoji $b_{n+1} \in B$ takav da je $b_{n+1} \neq b_k$, $1 \le k \le n$, pa stavimo $g(n+1) = b_{n+1}$. Takvim postupkom definiramo $g(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a funkcija g je po konstrukciji injekcija. Po teoremu 1.5. slijedi $B \sim \mathbb{N}$. □

Teorem 1.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je neprebrojiv skup.*

Dokaz: Kada bi vrijedilo suprotno, tj. da je $[a, b]$ prebrojiv, postojala bi bijekcija $f : \mathbb{N} \to [a, b]$ takva da je $[a, b] = \mathcal{R}(f) = \{f(n); n \in \mathbb{N}\}$. Stavimo $a_1 = a, b_1 = b$. Ako je $f(1) \le \frac{a_1+b_1}{2}$ stavimo $a_2 = \frac{a_1+3b_1}{4}$ i $b_2 = b_1$, a u slučaju $f(1) \ge \frac{a_1+b_1}{2}$ stavimo $a_2 = a_1$ i $b_2 = \frac{3a_1+b_1}{4}$. U oba slučaja vrijedi $f(1) \notin [a_2, b_2]$ i $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Na isti način, zamjenom $a_1 \leftrightarrow a_2$ i $b_1 \leftrightarrow b_2$, nađemo $f(2)$ itd. Na taj način dobivamo segmente $[a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sa svojstvom $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ i $f(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Po teoremu 1.3. o potpunosti skupa $\mathbb{R}$ postoji $x \in [a, b]$ tako da je $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog pretpostavke o bijektivnosti funkcije $f : \mathbb{N} \to [a, b]$, postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $x = f(m)$. No, po konstrukciji vrijedi $f(m) \notin [a_{m+1}, b_{m+1}]$, što je kontradikcija s izborom točke x. $\square$

Korolar 1.1. *Skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *je neprebrojiv.*

Dokaz: Kada bi $\mathbb{R}$ bio prebrojiv, tada bi po propoziciji 1.4. i segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bio prebrojiv, a to se kosi s tvrdnjom teorema 1.6. $\square$

2 Nizovi u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$

2.1 Nizovi u $\mathbb{R}$

2.1.1 Niz i podniz

Funkciju $a : \mathbb{N} \to S$ zovemo **niz** u S. U ovom slučaju odstupamo od uobičajenog načina označavanja funkcijskih vrijednosti, pa za $n \in \mathbb{N}$ pišemo $a(n) = a_n$ i nazivamo n-tim članom niza. Uobičajena oznaka za niz je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili $(a_n)_n$ ili samo (a_n). Kodomena niza može biti bilo koji neprazan skup. Nas će najviše zanimati slučajevi kada je taj skup $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ili skup realnih ili kompleksnih funkcija.

Kao i kod drugih funkcija, monotonost je važno svojstvo koje niz može zadovoljavati. Za to je neophodno da je niz u skupu na kojem je definiran uređaj.

Definicija 2.1. Neka je $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$.

Niz $(a_n)_n$ je rastući ako $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \leq a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je strogo rastući ako $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n < a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je padajući ako $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \geq a_{n+1}$.

Niz $(a_n)_n$ je strogo padajući ako $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n > a_{n+1}$.

Pokažimo da je ta definicija, iako se čini slabijom, ekvivalentna s definicijom monotonosti niz kao funkcije. Naime, niza kao funkcija je rastući ako vrijedi: $\forall\, n, m \in \mathbb{N},\ (n < m) \Rightarrow (a_n \leq a_m)$. Jasno je da iz toga slijedi da je niz rastući u smislu definicije 2.1. Dokažimo da vrijedi obrat. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $n < m$. Tada je $n < n + 1 < \cdots < m - 1 < m$ pa iz definicije 2.1. slijedi $a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq a_{m-1} \leq a_m$, tj. $a_n \leq a_m$.

Definicija 2.2. Za niz $b : \mathbb{N} \to S$ kažemo da je **podniz** niza $a : \mathbb{N} \to S$, ako postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ takav da je $b = a \circ p$.

U oznakama $(b_n)_n$ i $(a_n)_n$ za nizove pisali bismo $b_n = b(n) = (a \circ p)(n) = a[p(n)] = a_{p(n)} = a_{p_n}$. Važno je uočiti da podniz nekog niza dobijemo tako da izbacimo neke članove polaznog niza, a preostali članovi zadržavaju prijašnji međusobni poredak.

Zadatak 2.1. Neka je $(p_n)_n$ strogo rastući niz u $\mathbb{N}$. Tada vrijedi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \leq p_n$.

Rješenje: Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom. Jasno je da vrijedi $1 \leq p_1$ tako da imamo bazu indukcije. Pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq p_n$. Tad je $p_{n+1} > p_n \geq n$, tj. $p_{n+1} > n$, pa mora biti $p_{n+1} \geq n + 1$. $\square$

2.1.2 Limes niza u $\mathbb{R}$

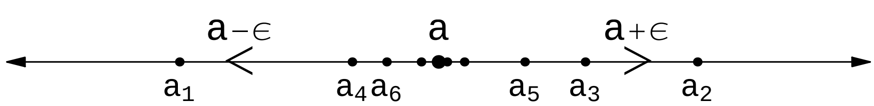
Intuitivno poimanje konvergencije ili teženja članova niza $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$ k nekom broju $a \in \mathbb{R}$ sastoji se u tome da je "puno" članova niza po volji blizu broju a, a samo "malen" broj članova daleko. U situaciji kada radimo s beskonačnim (prebrojivim) skupom, onda je prihvatljivo pod "puno" shvaćati beskonačno mnogo članova, a pod "malo" samo konačno njih. U tom smislu fraza "gotovo svi članovi" znači "svi članovi osim eventualno njih konačno mnogo". Dakle, možemo reći da niz $(a_n)_n$ konvergira ili teži broju a ako su gotovo svi članovi po volji blizu broju a.

Prethodna definicija se realizira u skupu $\mathbb{R}$ tako da blizinu realnih brojeva mjerimo pomoću razdaljinske funkcije $d(x, y) = |x - y|$. Ako je zadan $\varepsilon > 0$, onda brojevi x koji su od a udaljeni za manje od ε zadovoljavaju $|x - a| < \varepsilon$, tj. oni se nalaze u intervalu $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon\rangle$. Pojam konvergencije u $\mathbb{R}$ ima slijedeći oblik:

Definicija 2.3. Niz realnih brojeva $(a_n)_n$ **konvergira** ili teži k realnom broju $a \in \mathbb{R}$ ako svaki otvoreni interval polumjera ε oko točke a sadrži gotovo sve članove niza, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), ((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)). \tag{2.1}$$

Tada a zovemo **granična vrijednost** ili **limes** niza $(a_n)_n$ i pišemo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $a = \lim_n a_n$.



Ako niz ne konvergira onda kažemo da on **divergira**.

Provjeravanje da li definicija 2.3 vrijedi za neki konkretan niz i konkretan limes sastoji se u tome da se za po volji zadani $\varepsilon > 0$ pronađe ili barem dokaže postojanje prirodnog broja n_ε takvog da svi članovi s indeksima većim od n_ε leže u intervalu $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$.

Teorem 2.1.

1. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ ima samo jednu graničnu vrijednost.*

2. *Konvergentan niz u $\mathbb{R}$ je ograničen.*

Dokaz: 1. Pretpostavimo da konvergentan niz $(a_n)_n$ ima dvije granične vrijednosti $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Tada bi za $\varepsilon = |a-b| > 0$ zbog (2.1) postojali $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$(n > n_a) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \text{ i } (n > n_b) \Rightarrow (|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Sada za $n_\varepsilon = \max\{n_a, n_b\}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |a-b|),$$

što je očita neistina. Dakle, limes mora biti jedinstven.

2. U definiciji (2.1) uzmimo $\varepsilon = 1$, pa postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da $(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < 1)$. Sada za $n > n_\varepsilon$ imamo $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$. Neka je $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_\varepsilon}|, 1+|a|\}$. Tada vrijedi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$, tj. niz je ograničen. $\square$

Primjer 2.1. Sama ograničenost nije dovoljna za konvergenciju niza. Niz definiran s $a_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, je očigledno ograničen, ali niti jedan realan broj nije mu granična vrijednost. Naime, za $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ i bilo koji $a \in \mathbb{R}$ izvan otvorenog intervala $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ uvijek se nalazi beskonačno članova niza. Dakle, taj interval ne sadrži gotovo sve članove niza.

Za očekivati je da podnizovi niza nasljeđuju dobra svojstva originalnog niza.

Teorem 2.2. *Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}$ i sam je konvergentan i ima istu graničnu vrijednost kao i niz.*

Dokaz: Neka je $(a_n)_n$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$, $a = \lim_n a_n$, i neka je $(a_{p_n})_n$ bilo koji njegov podniz. Uzmimo bilo koji $\varepsilon > 0$. Tada iz $a = \lim_n a_n$ i (2.1) postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$. Zbog toga što je niz

$(p_n)_n$ strogo rastući niz u $\mathbb{N}$ i zadatka 2.1. imamo $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq n$. Odatle slijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ (n > n_\varepsilon) \Rightarrow (p_n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_{p_n} - a| < \varepsilon),$$

dakle, $a = \lim_n a_{p_n}$. □

Od interesa je naći jednostavno provjerive dovoljne uvjete za konvergenciju niza.

Teorem 2.3. *Svaki ograničen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.*

Dokaz: Neka je niz $(a_n)_n$ rastući, tj. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$. Ograničenost rastućeg niza znači ograničenost skupa $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ odozgo, pa postoji $a = \sup A \in \mathbb{R}$. Iz definicije supremuma skupa A imamo:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a$,
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$.

Iz 1. i 2. i rasta niza $(a_n)_n$ imamo $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon).$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Analogno se za padajući niz pokaže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. □

Primjer 2.2. Monotonost nije nužna za konvergenciju niza. Npr. niz $\frac{(-1)^n}{n}$ konvergira k 0, a nije monoton.

Zadatak 2.2. Neka je $A \subset \mathbb{R}$ odozgo (odozdo) ograničen skup. Pokažite da postoji rastući (padajući) niz u A koji konvergira prema $\sup A$ ($\inf A$).

Rješenje: Neka je $A \subset \mathbb{R}$ odozgo ograničen skup i $a = \sup A$. Tada vrijedi: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A$, takav da je $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$. Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < \frac{1}{n}$, odakle slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Za odozdo ograničen niz se pokazuje analogno. □

2.1.3 Operacije s konvergentnim nizovima

Za nizove u $\mathbb{R}$ kao funkcije s vrijednostima u $\mathbb{R}$ možemo definirati sve operacije po točkama. U slučaju nizova to znači da je suma (razlika) nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ niz oblika $(a_n \pm b_n)_n$, tj. $(a_n)_n \pm (b_n)_n = (a_n \pm b_n)_n$. Isto tako je produkt nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ niz oblika $(a_n \cdot b_n)_n$, tj. $(a_n)_n \cdot (b_n)_n = (a_n \cdot b_n)_n$. Specijalno, za $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n$, pa je skup nizova vektorski prostor (algebra). Sada ćemo proučiti kako se limes ponaša kod navedenih operacija s nizovima.

Teorem 2.4. *Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

1. *Niz $(a_n \pm b_n)_n$ je konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*
2. *Niz $(a_n \cdot b_n)_n$ je konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*
3. *Ako je $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, onda je i niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.*
4. *Niz $(|a_n|)_n$ je konvergentan i $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n|$.*

Dokaz: Neka su $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
1. Za $\varepsilon > 0$ zbog (2.1) postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n > n_1) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \text{ i } (n > n_2) \Rightarrow (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Sada za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon).$$

2. Prije svega, zbog toga što je konvergentan, niz $(a_n)_n$ je ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. Sada za $\varepsilon > 0$ zbog (2.1) postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n > n_1) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}) \text{ i } (n > n_2) \Rightarrow (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |b|}).$$

Sada za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < \varepsilon).$$

3. Pokažimo da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. Za $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ imamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n > n_0) \Rightarrow (|b_n - b| < \frac{|b|}{2}) \Rightarrow (|b_n| > \frac{|b|}{2}) \Rightarrow (\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}).$$

Sada za $\varepsilon > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n > n_1) \Rightarrow (|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}).$$

Uzmimo $n_\varepsilon = \max\{n_0, n_1\}$, pa $\forall n \in \mathbb{N}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon).$$

Odatle pomoću 2. slijedi 3.

4. Tvrdnja slijedi jednostavno pomoću nejednakosti (1.2(v)),

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

□

Korolar 2.1. *Neka su* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada je za bilo koje* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *niz* $(\lambda a_n + \mu b_n)_n$ *konvergentan i* $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$.

Dokaz: Za bilo koji $\lambda \in \mathbb{R}$ uzmimo konstantni niz $b_n = \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada iz teorema 2.4 2. slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$. Odatle i iz aditivnosti limesa imamo linearnost. □

***Napomena* 2.1.** Skup svih konvergentnih nizova u $\mathbb{R}$ je vektorski prostor (algebra).

Osim operacija na skupu $\mathbb{R}$ imamo zadan uređaj $\leq$. Konvergencija nizova je u skladu s tim uređajem.

Teorem 2.5 (teorem o sendviču). *Neka su* $(a_n)_n$ *i* $(b_n)_n$ *konvergentni nizovi u* $\mathbb{R}$.

1. *Ako je* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, *onda je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2. *Ako je* $(c_n)_n$ *niz za kojeg vrijedi* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, *onda je* $(c_n)_n$ *konvergentan i* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Dokaz: 1. Neka je niz $(c_n)_n$ konvergentan i takav da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \geq 0$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \geq 0$. Kada bi bilo $c < 0$, onda bi u okolini $\langle c - \frac{|c|}{2}, c + \frac{|c|}{2}\rangle$ bili gotovo svi članovi niza, što nije moguće zbog $c + \frac{|c|}{2} < 0$.

Sada za $c_n = b_n - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i teorema 2.4. 1. slijedi tvrdnja.

2. Za $\varepsilon > 0$ zbog (2.1) postoje $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(n > n_1) \Rightarrow (|a_n - c| < \varepsilon) \text{ i } (n > n_2) \Rightarrow (|b_n - c| < \varepsilon).$$

Sada za $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$ imamo

$$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow (c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon) \Rightarrow (|c_n - c| < \varepsilon).$$

□

Zadatak 2.3. Pokažite da za bilo koji realan broj $b > 1$ niz $(x_n)_n$ definiran rekurzijom

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{b}{x_{n-1}}\right), \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

uz početnu vrijednost $x_0 = b > 1$ konvergira k $\sqrt{b}$.

Rješenje: Dokažimo indukcijom da je niz $(x_n)_n$ padajući i odozdo omeđen s 1. Prvo uočimo da iz (2.2) imamo

$$x_n^2 - b \;=\; (x_n - x_{n-1})^2, \ \ (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{2.3}$$

$$x_n - x_{n-1} \;=\; -\frac{x_{n-1}^2 - b}{2x_{n-1}}, \ \ (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{2.4}$$

Baza indukcije slijedi iz $x_1 = \frac{1}{2}(b+1) < b = x_0$ i $x_1 > 1$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < x_k < x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Sada iz (2.3) imamo $x_{n-1}^2 - b > 0$,a onda iz (2.4) slijedi $x_n - x_{n-1} < 0$. Iz (2.2) i $0 < (x_{n-1} - 1)^2 + b - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, slijedi $x_n > 1$. Dakle, postoji $a = \lim_n x_n$. Iz (2.2) imamo $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right)$, odakle slijedi $b = a^2$.

□

2.1.4 Limes superior i limes inferior

Lema 2.1. *Svaki niz $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.*

Dokaz: Neka je $A_m = \{a_n; n \geq m\}$. Promatramo dva slučaja:

1. $\exists m \in \mathbb{N}$ tako da skup A_m nema maksimum.

2. $\forall m \in \mathbb{N}$ skup A_m ima maksimum.

1. slučaj: Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $m = 1$, tj. već A_1 nema maksimum. To znači da $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}$, $k > n$ i $a_k > a_n$.

Počnimo s $n = 1$ i među svim $k > 1$ takvim da je $a_k > a_1$ uzmimo najmanji i označimo ga s p_1, tj. $a_{p_1} > a_1$. Sada promatramo skup A_{p_1}. Ovaj skup isto nema maksimum, jer kada bi ga imao, onda bi i prethodni A_1 imao. Među svim $k > p_1$ takvim da je $a_k > a_{p_1}$ uzmimo najmanji i označimo ga s p_2, tj. $a_{p_2} > a_{p_1}$, itd. Ovim postupkom dobivamo strogo rastući niz $(p_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takav da je $a_{p_n} < a_{p_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. podniz $(a_{p_n})_n$ je strogo rastući.

2. slučaj: Neka je $b_1 = \max A_1$. Među onim $k \in \mathbb{N}$ za koje je $a_k = b_1$ uzmimo najmanji i označimo ga s p_1, tj. $(j < p_1) \Rightarrow (a_j < a_{p_1})$. Sada gledamo A_{p_1+1} i neka je $b_2 = \max A_{p_1+1}$. Jasno, $b_2 \leq b_1$. Među svim $k > p_1$ za koje je $a_k = b_2$ uzmimo najmanji i označimo ga s p_1. Jasno je da vrijedi $a_{p_2} \leq a_{p_1}$, itd. Tim postupkom dobijemo strogo rastući niz $(p_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takav da je $a_{p_n} \geq a_{p_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. podniz $(a_{p_n})_n$ je padajući. $\square$

U teoremu 2.1. i primjeru 2.1. smo vidjeli da je ograničenost niza nužna, ali ne i dovoljna za konvergenciju toga niza. Slijedeći teorem govori o tome što se ipak može zaključiti iz ograničenosti niza.

Teorem 2.6 (Bolzano [1]– Weierstrassov teorem o nizovima)**.** *Ograničen niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz: Pomoću leme 2.1. možemo naći monoton podniz zadanog niza. Pošto je niz ograničen, onda je i svaki njegov podniz ograničen. Sada za taj ograničen i monoton podniz iz teorema 2.3. slijedi konvergencija. $\square$

Definicija 2.4. Kažemo da je $\alpha \in \mathbb{R}$ **gomilište niza** $(a_n)_n$ realnih brojeva, ako postoji podniz $(a_{p_n})_n$ niza $(a_n)_n$ takav da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p_n} = \alpha$.

Iz definicije slijedi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ gomilište niza $(a_n)_n$ ako i samo ako $\forall \varepsilon > 0$ okolina $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno članova niza.

Primjer 2.3.

i. Svaki ograničeni niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.

ii. Svaki konvergentan niz ima točno jedno gomilište, a to je granična vrijednost.

iii. Niz iz primjera 2.1. ima točno dva gomilišta jer je $(-1)^{2n} \to 1$ i $(-1)^{2n-1} \to -1$.

iv. Skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ su ekvipotentni, tj. postoji bijektivni niz $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Tada je $\mathbb{R}$ skup svih gomilišta niza $(r_n)_n$, tj. svaki realan broj je limes nekog niza racionalnih brojeva.

[1]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Prag, 5. listopad 1781.- Prag, 18. prosinac 1848.), češki filozof, matematičar i teolog

v. Niz $(n)_n$ nema niti jedno gomilište u $\mathbb{R}$.

Definicija 2.5. Neka je $(a_n)_n$ ograničen niz realnih brojeva i $A \subset \mathbb{R}$ skup svih gomilišta tog niza (provjerite da je A ograničen skup).

Supremum skupa A zovemo **limes superior** niza $(a_n)_n$ i označavamo s $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $\overline{\lim}_n a_n$, .

Infimum skupa A zovemo **limes inferior** niza $(a_n)_n$ i označavamo s $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ili $\underline{\lim}_n a_n$, .

Lema 2.2. *Broj $L \in \mathbb{R}$ je limes superior niza $(a_n)_n$ ako i samo ako vrijedi:*

1. *$\forall \varepsilon > 0$, je $a_n < L + \varepsilon$ za gotovo sve članove niza.*

2. *$\forall \varepsilon > 0$, je $L - \varepsilon < a_n$ za beskonačno članova niza.*

Broj $\ell \in \mathbb{R}$ je limes inferior niza $(a_n)_n$ ako i samo ako vrijedi:

3. *$\forall \varepsilon > 0$, je $\ell - \varepsilon < a_n$ za gotovo sve članove niza.*

4. *$\forall \varepsilon > 0$, je $a_n < \ell + \varepsilon$ za beskonačno članova niza.*

Štoviše, L je najveće, a ℓ je najmanje gomilište niza.

Dokaz: Pretpostavimo da je $L = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ i da ne vrijedi tvrdnja 1. ili tvrdnja 2., tj. $\exists \varepsilon > 0$, takav da je $a_n \geq L + \varepsilon$ za beskonačno mnogo članova niza ili $\exists \varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < a_n$ samo za konačno članova niza. U prvom slučaju bi postojalo gomilište niza koje je veće ili jednako od $L + \varepsilon$ što je u kontradikciji s definicijom od L kao supremuma skupa svih gomilišta niza. U drugom slučaju bi sva gomilišta niza bila manja ili jednaka od $L - \varepsilon$ što je također u kontradikciji s definicijom od L.

Obratno, neke vrijede 1. i 2.. Iz 1. slijedi da $\forall \varepsilon > 0$ sva gomilišta niza su manja ili jednaka od $L + \varepsilon$, a odatle slijedi da su manja ili jednaka od L. Dakle L je gornja međa skupa svih gomilišta niza. Za bilo koji $\varepsilon > 0$ iz 1. i 2. slijedi da je u intervalu $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$ beskonačno članova niza, a to znači da je L i sam gomilište niza, tj. L je maksimum skupa svih gomilišta niza, a tada je i supremum skupa.

Tvrdnje za $\ell = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ slijede iz jednakosti $\ell = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$. □

Teorem 2.7. *Ograničen niz $(a_n)_n$ u $\mathbb{R}$ je konvergentan ako i samo ako je*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Dokaz: Ako je niz $(a_n)_n$ konvergentan, onda je po teoremu 2.2. svaki njegov podniz ima istu graničnu vrijednost kao i niz, pa je skup svih gomilišta niza jednočlan.

Obratno, ako vrijedi gornja jednakost, onda je skup svih gomilišta jednočlan i neka je α njegov element. Tada $\forall \varepsilon > 0$, iz definicije limesa inferiora, gotovo svi članovi niza su $> \alpha - \varepsilon$, a iz definicije limesa superiora, gotovo svi članovi niza su $< \alpha + \varepsilon$, tj. gotovo svi članovi su u intervalu $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$. Dakle, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Zadatak 2.4. Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ ograničeni nizovi takvi da $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. Pokažite da vrijedi $\liminf_n a_n \leq \liminf_n b_n$ i $\limsup_n a_n \leq \limsup_n b_n$.

Rješenje: Neka su A i B skupovi svih gomilišta nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ respektivno. Pokažimo da vrijedi $\forall a \in A$ $\exists b \in B$ takav da je $a \leq b$ i $\forall b \in B$ $\exists a \in A$ takav da je $a \leq b$.

Neka je $a \in A$, $a = \lim_n a_{p_n}$. Niz $(b_{p_n})_n$ je ograničen pa ima konvergentan podniz $(b_{q_n})_n$, $b = \lim_n b_{q_n} \in B$. Zbog $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{q_n} \leq b_{q_n}$ imamo $a \leq b$. Druga tvrdnja se dokazuje analogno. Sada iz zadatka 1.7 slijedi tvrdnja. $\square$

2.1.5 Cauchyjev niz

Sada navodimo nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju realnog niza koji u sebi ne upotrebljava pojam limesa. Dakle, pomoću njega možemo ispitati konvergenciju niza a da nemamo kandidata za njegov limes.

Definicija 2.6. Kažemo da je niz $(a_n)_n$ realnih brojeva **Cauchyjev**[1] ili **fundamentalan** niz ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})((n, m > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a_m| < \varepsilon)). \tag{2.5}$$

Teorem 2.8. *Niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Dokaz: Neka je $(a_n)_n$ konvergentan niz i $a = \lim_n a_n$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})).$$

Neka je $n, m > n_\varepsilon$, pa imamo $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, dakle uvjet (2.5) je nužan.

[1] Augustin Louis Cauchy (Paris, 21. kolovoz 1789. – Sceaux-Paris, 23. svibanj 1857.) francuski matematičar

Obratno, neka je $(a_n)_n$ Cauchyjev niz. Pokažimo da je taj niz ograničen. Iz (2.5) za $\epsilon = 1$ imamo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $(n, m > n_1) \Rightarrow (|a_n - a_m| < 1)$. Odatle za $n > n_1$ imamo $|a_n| \leq |a_n - a_{n_1+1}| + |a_{n_1+1}|$. Sada je $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, 1 + |a_{n_1+1}|\}$ takav da vrijedi $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Po teoremu 2.6. ograničen $(a_n)_n$ niz ima konvergentan podniz $(a_{p_n})_n$, tj. postoji $a = \lim_n a_{p_n}$. Pokažimo da vrijedi $a = \lim_n a_n$. Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji. Iz konvergencije podniza $(a_{p_n})_n$ imamo $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$((n > n'_\varepsilon) \Rightarrow (|a_{p_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2})).$$

Zato što je niz $(a_n)_n$ Cauchyjev imamo $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da

$$((n, m > n''_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})).$$

Neka je $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ pa za $n > n_\varepsilon$, zbog $p_n \geq n$, slijedi

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{p_n}| + |a_{p_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tj. $a = \lim_n a_n$. □

Cauchyjevo svojstvo je posebno važno u općenitijim strukturama od skupa $\mathbb{R}$, gdje nismo u mogućnosti pomoću uređaja definirati pojam potpunosti skupa, kao u Aksiomu 15. Takav je npr. skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ o kojem govorimo u slijedećoj točki. Tada se kaže da je skup potpun ako svaki Cauchyjev niz iz skupa konvergira u tom skupu.

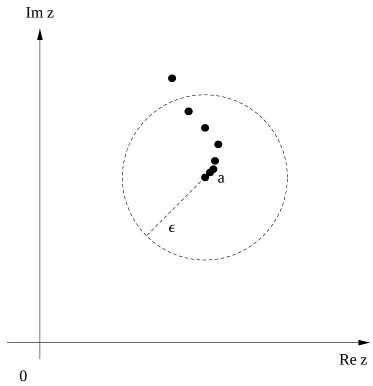
2.2 Nizovi u ℂ, limes niza u ℂ

Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$, gdje je $a_n = \alpha_n + \beta_n i$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tako imamo pridružena dva realna komponentna niza $(\alpha_n)_n$ i $(\beta_n)_n$.

Definicija 2.7. Niz kompleksnih brojeva $(a_n)_n$ **konvergira** ili teži ka kompleksnom broju $a \in \mathbb{C}$ ako svaki otvoreni krug polumjera ε oko točke a sadrži gotovo sve članove niza, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}),$$

$$((n > n_\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)). \quad (2.6)$$



Definicija limesa niza u $\mathbb{C}$ je formalno ista kao i u $\mathbb{R}$, te je stoga za očekivati da vrijede svojstva koja vrijede za konvergentne nizove u $\mathbb{R}$. To se može dokazati koristeći definiciju limesa (2.6). Mi ćemo to učiniti tako što ćemo dokazati da konvergiraju komponentni nizovi $(\alpha_n)_n$ i $(\beta_n)_n$.

Teorem 2.9. *Neka je $(a_n)_n$ niz u $\mathbb{C}$, gdje je $a_n = \alpha_n + \beta_n i$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $\lim_n a_n = a = \alpha + \beta i$ ako i samo ako je $\alpha = \lim_n \alpha_n$ i $\beta = \lim_n \beta_n$.*

Dokaz: Ako je $a = \lim_n a_n$ i $a = \alpha + \beta i$, onda vrijedi $|\alpha_n - \alpha_n| \le |a_n - a|$ i $|\beta_n - \beta| \le |a_n - a|$, odakle odmah imamo $\alpha = \lim_n \alpha_n$ i $\beta = \lim_n \beta_n$. Obratno, neka je $\alpha = \lim_n \alpha_n$ i $\beta = \lim_n \beta_n$. Zbog $|a_n - a| = \sqrt{|\alpha_n - \alpha_n|^2 + |\beta_n - \beta|^2}$ slijedi $a = \lim_n a_n$, gdje je $a = \alpha + \beta i$. □

Zato što se operacije s kompleksnim nizovima svode na operacije s realnim komponentnim nizovima, sada je odmah jasno da i u kompleksnom slučaju vrijedi teorem 2.4. Za konvergentne nizove $(a_n)_n$, $a_n = \alpha_n + \beta_n i$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $(b_n)_n$, $b_n = \gamma_n + \delta_n i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n ((\alpha_n + \gamma_n) + (\beta_n + \delta_n)i) = \lim_n (\alpha_n + \gamma_n) + \lim_n (\beta_n + \delta_n)i =$$

$$= (\lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n i) + (\lim_n \gamma_n + \lim_n \delta_n i) = \lim_n a_n + \lim_n b_n.$$

Naravno, i za množenje imamo

$$\lim_n (a_n b_n) = \lim_n ((\alpha_n \gamma_n - \beta_n \delta_n) + (\alpha \delta_n + \beta_n \gamma) i =$$

$$= (\lim_n \alpha_n \lim_n \gamma_n - \lim_n \beta_n \lim_n \delta_n) + (\lim_n \alpha \lim_n \delta_n + \lim_n \beta_n \lim_n \gamma) i) =$$

$$= (\lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n i)(\lim_n \gamma_n + \lim_n \delta_n i) = \lim_n a_n \lim_n b_n.$$

Također vrijedi i teorem 2.6. o ograničenom nizu. Ako je kompleksni niz $(a_n)_n = (\alpha_n + \beta_n i)_n$ ograničen, onda su ograničeni njegovi komponentni nizovi.

Sada pomoću teorema 2.6 imamo konvergentan podniz $(\alpha_{q_n})_n$ niza $(\alpha_n)_n$. Podniz $(\beta_{q_n})_n$ je ograničen pa on ima konvergentan podniz $(\beta_{p_n})_n$. Podniz $(\alpha_{p_n})_n$ konvergentnog niza $(\alpha_{q_n})_n$ je konvergentan pa smo u mogućnosti konstruirati konvergentan podniz $(a_{p_n})_n = (\alpha_{p_n} + \beta_{p_n} i)_n$ kompleksnog niza $(a_n)_n$.

Primijetimo da je skup $\mathbb{C}$ promatran kao realan vektorski prostor izomorfan s $\mathbb{R}^2$. Stoga je jasno da u slučaju prostora $\mathbb{R}^n$ možemo na analogan način pitanje konvergencije nizova u $\mathbb{R}^n$ svest na konvergenciju komponentnih realnih nizova. O tome će biti govora u idućem poglavlju.

3 Topologija prostora $\mathbb{R}^n$

U ovom poglavlju obrađujemo tematiku koja vrijedi za puno širu klasu prostora nego su to prostori $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.1. Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje sa Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:

1) $d(a, b) \geq 0$, $\forall a, b \in X$ (pozitivnost),

2) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (strogost),

3) $d(a, b) = d(b, a)$, $\forall a, b \in X$ (simetričnost),

4) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ $\forall a, b, c \in X$ (nejednakost trokuta).

Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno **metrika** na skupu X. Tada uređeni par (X, d) nazivamo **metrički prostor**, a uvjete $1) - 4)$ aksiomi metrike.

***Napomena* 3.1.** Aksiom 1) je suvišan jer slijedi iz ostalih aksioma. Naime, $\forall a, b \in X$ vrijedi $0 = d(a, a) \leq d(a, b) + d(b, a) = 2d(a, b)$.

Zapravo je moguće svojstva metrike opisati samo sa slijedeća dva aksioma:

i) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,

ii) $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$ $\forall a, b, c \in X$.

Sada za $c = a$ u *ii)* dobijemo $d(a, b) \leq d(b, a)$, a zamjenom a sa b i $c = b$ iz *ii)* imamo $d(b, a) \leq d(a, b)$, tj. vrijedi 3).

Propozicija 3.1. *U metričkom prostoru* (X, d), $\forall\, a, b, a', b' \in X$ *vrijedi:*

$$|d(a, b) - d(a', b')| \leq d(a, a') + d(b, b'). \tag{3.1}$$

Dokaz: Primjenom nejednakosti trokuta na a, a', b', b dobivamo $d(a,b) \leq d(a,a') + d(a',b') + d(b',b)$, odnosno zbog simetrije,

$$d(a,b) - d(a',b') \leq d(a,a') + d(b,b'). \tag{3.2}$$

Zamjenom $a' \leftrightarrow a$ i$b \leftrightarrow b'$ dobivamo

$$d(a',b') - d(a,b) \leq d(a,a') + d(b,b'). \tag{3.3}$$

Iz nejednadžbi (3.2) i (3.3) slijedi (3.1) ■

Prostor $\mathbb{R}^n$ s metrikom zadanom s (1.11) je metrički prostor, a ta se metrika naziva *euklidska metrika*. Metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ naziva se *euklidski prostor*.

Primjer 3.1. Na linearnom prostoru $\mathbb{R}^n$ je svakim od sljedećih izraza za $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ definirana jedna metrika:

1) $d_p(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; p \geq 1,$

2) $d_\infty(a,b) = \max\{|\alpha_i - \beta_i|; i = 1, \ldots, n\}.$

Tako dolazimo do metričkih prostora $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Zadatak 3.1. Pokažite da za $p \geq 1$ vrijedi

$$d_\infty(a,b) \leq d_p(a,b) \leq \sqrt{n}\, d_\infty(a,b), \forall a,b \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Definicija 3.2. Neka su (X,d) i (Y,ρ) metrički prostori. Tada pod kartezijevim produktom metričkih prostora smatramo skup $X \times Y$ snabdjeven jednom od metrika

$$d_p((a,b),(a',b')) = (d(a,a')^p + \rho(b,b')^p)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall (a,b),(a',b') \in X \times Y,$$

gdje je $p \geq 1$.

U slučaju kada su $X = \mathbb{R}^n$ i $Y = \mathbb{R}^m$ euklidski prostori, uzimamo $p = 2$. Tada je skup $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ euklidski prostor.

3.1 Otvoreni skupovi

U ovoj točki uvodimo pojam otvorenog skupa u općem metričkom prostoru, a glavni primjer će biti euklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.3. Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ njegova točka i $r > 0$ realan broj. Pod **otvorenom kuglom** u prostoru X sa središtem u x_0 i radijusom r podrazumjevamo skup $K(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\}$.

Neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U **otvoren** skup u prostoru X ako se može prikazati kao unija otvorenih kugli iz tog prostora. Prazan skup $\emptyset$ je otvoren po definiciji.

Definicija 3.4. Podskup A metričkog prostora (X, d) je ograničen ili omeđen ukoliko postoje točka $x_0 \in X$ i broj $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x_0, r)$.

Teorem 3.1. *Skup $U \subseteq X$ u metričkom prostoru (X, d) je otvoren ako i samo ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji kugla $K(x_0, r) \subseteq U$.*

Dokaz: Primijetimo da se oko svake točke x dane kugle $K(x_0, r)$ može opisati mala kugla koja je sadržana u toj većoj kugli. Dovoljno je uzeti za radijus manje kugle $\rho = r - d(x, x_0)$, pa je $K(x, \rho) \subseteq K(x_0, r)$. Naime, za $y \in K(x, \rho)$ je $d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) = r$.

Neka je U otvoren skup i $x_0 \in U$. Prema definiciji otvorenog skupa postoji kugla $K(y_0, r_0) \subseteq U$ koja sadrži x_0. Sada, prema prethodnom, postoji kugla $K(x_0, \rho) \subseteq K(y_0, r_0) \subseteq U$.

Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup takav da za svaki $x \in U$ postoji kugla $K(x, r_x) \subseteq U$. Tada vrijedi $U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$, tj. U je unija kugli, pa je otvoren skup po definiciji. □

Zadatak 3.2. Neka je $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ euklidski prostor i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Pokažite: ako je V otvoren skup u $\mathbb{R}^{n+m}$ takav da je $(x_0, y_0) \in V$, onda je i skup $U = \{x \in \mathbb{R}^n; (x, y_0) \in V\}$ otvoren u $\mathbb{R}^n$.

Rješenje: Pokažimo da skup U za svaku točku $x \in U$ sadrži i kuglu $K(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ za neko $r > 0$. Za $x \in U$ je po definiciji točka $(x, y_0) \in V$. Pošto je V otvoren u $\mathbb{R}^{n+m}$, to postoji $r > 0$ i otvorena kugla $K((x, y_0), r) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{n+m}; \|(u, v) - (x, y_0)\|_2 < r\} \subseteq V$. Prema zadatku 1.13 je $\|u - x\|_2 \leq \|(u, v) - (x, y_0)\|_2 < r$. Pokažimo da je $K(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n; \|u - x\|_2 < r\} \subseteq U$. Zaista, ako je $u \in K(x, r)$, onda je $\|u - x\|_2 < r$ pa je i $\|(u, y_0) - (x, y_0)\|_2 = \|u - x\|_2 < r$, tj. $(u, y_0) \in K((x, y_0), r) \subseteq V$, odnosno $u \in U$. Dakle, $K(x, r) \subseteq U$. □

Familija $\mathcal{T}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se topološka struktura ili **topologija** prostora (X, d).

Teorem 3.2. *U metričkom prostoru familija $\mathcal{T}$ ima svojstva:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

2) unija bilo koje familije iz $\mathcal{T}$ *je iz* $\mathcal{T}$*, tj.*

$$U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in \mathcal{I},\ \Rightarrow\ \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

3) presjek konačne familije elemenata iz $\mathcal{T}$ *je element iz* $\mathcal{T}$*, tj.*

$$U_i \in \mathcal{T}, i = 1, \ldots, m,\ \Rightarrow\ \bigcap_{i=1}^{m} U_i \in \mathcal{T}.$$

Dokaz: 1) i 2) slijede neposredno iz definicije otvorenih skupova. Svojstvo 3) je dovoljno dokazati za dva elementa iz $\mathcal{T}$, pa tvrdnja slijedi matematičkom indukcijom. Neka su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ i $U = U_1 \cap U_2$. Da bi dokazali da je U otvoren, prema teoremu 3.1 dovoljno je vidjeti da za svaki $x \in U$ postoji kugla $K(x,r) \subseteq U$. Kako je U_1 otvoren to postoji $K(x,r_1) \subset U_1$ i analogno, za U_2 postoji $K(x,r_2) \subset U_2$. Sada za $r = \min\{r_1, r_2\}$ vrijedi $K(x,r) \subseteq K(x,r_1) \cap K(x,r_2) \subseteq U_1 \cap U_2 = U$. □

***Napomena* 3.2.** Topološka struktura ili topologija $\mathcal{T}$ na nekom skupu X ne mora nužno biti inducirana metrikom. To može biti bilo koja familija podskupova od X koja zadovoljava svojstva iz teorema 3.2. Tada uređeni par $(X, \mathcal{T})$ nazivamo **topološki prostor**.

Primjer 3.2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni skupovi i stavimo $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n; a \in A, b \in B\}$. Ako su A i B otvoreni skupovi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, onda je i $A + B$ otvoren skup.

Rješenje: Neka je $c \in A + B$ bilo koji. Tada postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $c = a + b$. Kako je A otvoren to postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $K(a,\varepsilon) \subseteq A$. Pokažimo da je tada $K(c,\varepsilon) \subseteq A + B$. Uzmimo bilo koji $d \in K(c,\varepsilon)$. Tada je $\|d - c\|_2 = \|d - (a+b)\|_2 = \|(d-b) - a\|_2 < \varepsilon$ pa je $d - b \in K(a,\varepsilon) \subseteq A$. Kako je $b \in B$, to je $d = (d-b) + b \in A + B$. Dakle, $A + B$ je otvoren. □

Definicija 3.5. Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Točka $x \in A$ je **unutrašnja točka** skupa A ako postoji otvoren skup $U \subseteq A$ takav da je $x \in U$. Nutrina ili interior skupa A je skup koji se sastoji od svih unutarnjih točaka skupa A i označavamo ga s $\operatorname{int} A$.

Da bi neka točka $x \in A$ u metričkom prostoru X bila unutrašnja točka skupa $A \subseteq X$, nužno je i dovoljno da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je kugla $K(x, \varepsilon) \subseteq A$. To odmah slijedi iz teorema 3.1. Jasno, to povlači da je $\operatorname{int} A$ otvoren skup u X. Vrijedi slijedeća tvrdnja:

Teorem 3.3. *Skup* $\operatorname{int} A$ *je unija svih otvorenih skupova sadržanih u* A*.*

Dokaz: Označimo s V uniju svih otvorenih podskupova od A. Kako je $\operatorname{int} A$ otvoren podskup od A to vrijedi $\operatorname{int} A \subseteq V$.

Za dokaz obratne inkluzije uzmimo bilo koji element $x \in V$. Tada postoji skup U među otvorenim podskupovima od A takav da je $x \in U$ jer je V unija takvih podskupova. To znači da je x unutrašnja točka od A, odnosno $x \in \operatorname{int} A$. Dakle, vrijedi $V \subseteq \operatorname{int} A$, što daje $V = \operatorname{int} A$. □

3.1.1 Zatvoreni skupovi

Definicija 3.6. Skup B u metričkom (topološkom) prostoru X je **zatvoren** ako je njegov komplement $B^C = X \setminus B$ otvoren.

Neka je sa $\mathcal{F}(X)$ označena familija svih zatvorenih skupova u metričkom (topološkom) prostoru.

Za zatvorene skupove vrijedi:

Teorem 3.4. *U metričkom (topološkom) prostoru familija* $\mathcal{F}(X)$ *svih zatvorenih skupova ima svojstva:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}(X)$,

2) presjek bilo koje familije iz $\mathcal{F}(X)$ *je iz* $\mathcal{F}(X)$*, tj.*

$$U_\alpha \in \mathcal{F}(X),\ \alpha \in \mathcal{I},\ \Rightarrow\ \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \in \mathcal{F}(X).$$

3) unija konačne familije elemenata iz $\mathcal{F}(X)$ *je element iz* $\mathcal{F}(X)$*, tj.*

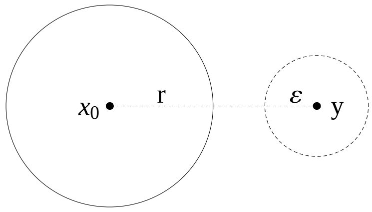
$$U_i \in \mathcal{F}(X), i = 1, \ldots, m,\ \Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^{m} U_i \in \mathcal{F}(X).$$

Dokaz: Tvrdnje odmah slijede iz De Morganovih formula

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha^C, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha^C$$

i teorema 3.2. $\square$

Primjer 3.3. $\overline{K}(x_0, r) = \{z \in X; d(x_0, z) \leq r\}$ nazivamo **zatvorena kugla** oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d). Pokažimo da je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u X. Za to je potrebno pokazati da je skup $\overline{K}(x_0, r)^C = \{y \in X; d(x_0, y) > r\}$ otvoren skup. U tu svrhu uzmimo bilo koji element $y \in \overline{K}(x_0, r)^C$ i neka je $0 < \varepsilon \leq d(x_0, y) - r$. Tada za svaki $z \in K(y, \varepsilon)$ vrijedi $d(x_0, z) + d(z, y) \geq d(x_0, y) \geq r + \varepsilon$, odnosno $d(x_0, z) \geq r + \varepsilon - d(y, z) > r$. Odatle je $K(y, \varepsilon) \subset \overline{K}(x_0, r)^C$. $\square$



Primjer 3.4. Jednočlani skup $\{x\}$ u metričkom prostoru je zatvoren jer za bilo koji $y \in X \setminus \{x\}$ vrijedi $d(x, y) > 0$. Sada za $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x_0, y)$ imamo $K(y, \varepsilon) \subset X \setminus \{x\}$.

Odatle odmah slijedi i da je svaki konačan podskup metričkog prostora zatvoren skup. $\square$

3.1.2 Gomilište skupa

Drugi način određivanja da li je skup zatvoren u metričkom prostoru (X, d) zasniva se na pojmu gomilišta skupa.

Definicija 3.7. Kažemo, da je $x_0 \in X$ **točka gomilanja ili gomilište skupa** $A \subseteq X$, ako za svaki otvoreni skup $U \subset X$ takav da je $x_0 \in U$ vrijedi $U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, tj. U sadrži točku iz A koja je različita od x_0.

Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A' i zovemo derivat skupa A.

***Napomena* 3.3.** Primijetimo da u slučaju kada je x_0 gomilište skupa A onda svaki otvoreni skup U takav da je $x_0 \in U$ sadrži beskonačno mnogo različitih članova skupa A.

Naime, ako je $y_0 \in U \cap (A \setminus \{x_0\})$, onda i otvorena kugla $K(x_0, \frac{1}{2} d(x_0, y_0))$ mora sadržavati $y_1 \neq x_0$. Nadalje i otvorena kugla $K(x_0, \frac{1}{2} d(x_0, y_1))$ sadrži $y_2 \neq x_0$, itd. Na taj način dobijemo injektivan niz $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u $U \cap (A \setminus \{x_0\})$.

Primjer 3.5. Gomilište skupa A ne mora biti element od A. Neka je $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Tada je 0 gomilište od A i $0 \notin A$.

Primjer 3.6. Jednočlan skup $A = \{x\}$ nema gomilišta jer je $A \setminus \{x\} = \emptyset$ pa x nije gomilište, a za svaku drugu točku $y \neq x$ vrijedi da je $K(y, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ za svaki $0 < \varepsilon < d(x, y)$.

Teorem 3.5. *Neka je X metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz: Neka je A zatvoren i x gomilište od A. Kada bi bilo $x \in A^C$ i zbog otvorenosti skupa A^C, postojao bi $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x, \varepsilon) \subseteq A^C$, odnosno $K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. No to nije moguće jer je x gomilište od A. Dakle, mora vrijediti $x \in A$. Odatle slijedi da A mora sadržavati sva svoja gomilišta.

Obratno, neka A sadrži sva svoja gomilišta i neka je $x \in A^C$ bilo koji element. Kako x nije gomilište od A to postoji otvorena kugla $K(x, \varepsilon)$ koja ne sadrži niti jedan element skupa A, tj. $K(x, \varepsilon) \subseteq A^C$. Kako to vrijedi za sve $x \in A^C$ to je A^C otvoren skup, pa je A zatvoren skup. $\square$

3.1.3 Zatvarač skupa

Analogno pojmu nutrine definira se pojam zatvorenja ili zatvarača skupa.

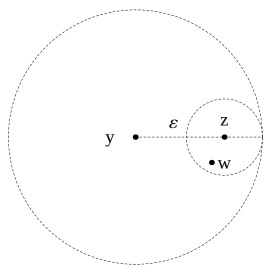
Definicija 3.8. Neka je $A \subseteq X$ podskup prostora X. **Zatvorenje** ili **zatvarač** $\mathcal{C}\ell\, A$ skupa A je presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže skup A.

Kako je presjek zatvorenih skupova zatvoren skup, to iz svojstava presjeka slijedi da je $\mathcal{C}\ell\, A$ najmanji zatvoren skup koji sadrži A, tj. $\forall C \in \mathcal{F}(X)$, $(A \subseteq C) \Rightarrow (\mathcal{C}\ell\, A \subseteq C)$.

Propozicija 3.2. *Zatvarač skupa A je unija skupa A i skupa svih gomilišta od A, tj. $\mathcal{C}\ell\, A = A \cup A'$.*

Dokaz: Neka je $B = A \cup A'$. Svaki zatvoreni skup D takav da je $A \subseteq D$ mora sadržavati i skup A', a onda i skup B. Kada bi postojao $x \in A' \cap D^C$, onda bi zbog otvorenosti skupa D^C postojala otvorena kugla $K(x, \varepsilon) \subseteq D^C \subseteq A^C$, što se protivi pretpostavci da je x gomilište od A.

Ako pokažemo da je B zatvoren skup onda možemo zaključiti da je B najmanji zatvoren skup koji sadrži A, tj. $B = \mathcal{C}\ell\, A$.



Neka je $y \in B'$ gomilište od B. Tada za bilo koji $\varepsilon > 0$ otvorena kugla $K(y, \varepsilon)$ sadrži neki $z \in B$, $z \neq y$. Ako je $z \in A$, onda vrijedi $K(y, \varepsilon) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Ako je $z \in A'$, onda otvorena kugla $K(z, r)$, $r = \min\{d(z, y), \varepsilon - d(z, y)\}$, sadrži neki $w \in A$, $w \neq z$. Također je $w \neq y$ zbog konstrukcije kugle $K(z, r)$. Dakle, $w \in K(z, r) \subset K(y, \varepsilon) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, pa je

$y \in A' \subseteq B$, tj. B sadrži sva svoja gomilišta. $\square$

Primjer 3.7. U metričkom prostoru $\mathbb{R}$ vrijedi:

1. zatvarač skupa $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ je skup $A \cup \{0\}$,
2. zatvarač skupa $A = [0, 1\rangle \cup \{2\}$ je skup $A = [0, 1] \cup \{2\}$,
3. zatvarač skupa $\mathbb{Q}$ je skup $\mathbb{R}$.

3.1.4 Rub skupa

Definicija 3.9. Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $A \subseteq X$ definiramo njegovu **granicu** ili **rub skupa** ∂A kao skup $\partial A = \mathcal{C}\ell\, A \cap \mathcal{C}\ell\,(A^C)$.

Skup ∂A je zatvoren skup jer je presjek dva zatvorena skupa. Njegova korisna karakterizacija dana je u slijedećoj tvrdnji.

Propozicija 3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Točka $x \in X$ je element od ∂A ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ kugla $K(x, \varepsilon)$ ima neprazan presjek sa skupovima A i A^C.*

Dokaz: Neka je $x \in \partial A = \mathcal{C}\ell\, A \cap \mathcal{C}\ell\,(A^C)$. Moguća su dva slučaja: ili $x \in A$ ili $x \in A^C$. Ako je $x \in A$, budući da je $x \in \mathcal{C}\ell\,(A^C)$ i $x \notin A^C$, to je prema propoziciji 3.2 x nužno gomilište skupa A^C. Tada svaka kugla $K(x, \varepsilon)$ sadrži neki element $y \in A^C$, $y \neq x$, i $x \in A$. U slučaju kada je $x \in A^C$ analogno zaključujemo da $K(x, \varepsilon)$ sadrži neki element $y \in A$, $y \neq x$, i $x \in A^C$.

Obratno, neka je $x \in X$ točka takva da za svaki $\varepsilon > 0$ kugla $K(x, \varepsilon)$ sadrži neke elemente $y \in A$ i $z \in A^C$. Ako je $x \in A$, onda je zbog $x \neq z$ točka x gomilište od A^C. Zbog $x \in A \subseteq \mathcal{C}\ell\, A$ i $x \in \mathcal{C}\ell\,(A^C)$ imamo $x \in \partial A = \mathcal{C}\ell\, A \cap \mathcal{C}\ell\,(A^C)$. U slučaju kada je $x \in A^C$, onda je zbog $x \neq y$ točka x gomilište od A, pa zbog $x \in A^C \subseteq \mathcal{C}\ell\,(A^C)$ i $x \in \mathcal{C}\ell\, A$ imamo $x \in \partial A = \mathcal{C}\ell\, A \cap \mathcal{C}\ell\,(A^C)$. $\square$

Primjer 3.8. Neka je A neki od skupova $[a, b]$, $\langle a, b]$,$[a, b\rangle$,$\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. U svim slučajevima je $\partial A = \{a, b\}$. Za svaki od prethodnih skupova A napravimo skup $B = A \cap \mathbb{Q}$. Tada je $\partial B = [a, b]$. Također je $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

3.2 Nizovi

Definicija 3.10. Za niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru (X,d) kažemo da konvergira k točki $x_0 \in X$ ako

$$\forall\varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k \geq k_\varepsilon) \Rightarrow (d(x_k, x_0) < \varepsilon),$$

tj. vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k, x_0) = 0$.

***Napomena* 3.4.** Prethodna definicija kaže da svaka kugla oko x_0 sadrži gotovo sve članove niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Iz toga odmah slijedi da je u metričkim prostorima limes niza jedinstven. Naime, neka su x_0 i y_0, $x_0 \neq y_0$, limesi istog niza. Kugle $K(x_0, \frac{1}{2}d(x_0, y_0))$ i $K(y_0, \frac{1}{2}d(x_0, y_0))$ su disjunktne, pa obije ne mogu sadržavati gotovo sve članove niza. Dakle, obije točke ne mogu biti limesi tog niza.

Propozicija 3.4. *Konvergentan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru (X,d) je ograničen.*

Dokaz: Neka je $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Za $\varepsilon = 1$ u definiciji 3.10 postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $x_k \in K(x_0, 1)$, $\forall k \geq k_1$. Za $r = \max\{d(x_0, x_1), \ldots, d(x_0, x_{k_1-1}), 1\}$ vrijedi $x_k \in K(x_0, r)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

Moguće je konvergenciju definirati i općenitije, kako se to radi u topološkim prostorima. O takvoj definiciji konvergencije nizova govori slijedeći rezultat.

Propozicija 3.5. *Niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru (X,d) konvergira k točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \subseteq X$, gdje je $x_0 \in U$, postoji $k_U \in \mathbb{N}$ tako da $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geq k_U) \Rightarrow (x_k \in U)$, tj. svaki otvoreni skup U koji sadrži x_0 sadrži gotovo sve članove niza.*

Dokaz: Dovoljnost je očita jer za $U = K(x_0, \varepsilon)$ dobijemo definiciju 3.10. Obratno, neka vrijedi definiciju 3.10. Za bilo koji otvoren skup $U \subseteq X$, gdje je $x_0 \in U$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Sada za $k_U = k_\varepsilon$ imamo $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geq k_U) \Rightarrow (x_k \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq U)$. $\square$

U normiranim vektorskim prostorima, gdje je metrika inducirana normom, vrijedi rezultat analogan teoremu 2.4, odnosno korolaru 2.1.

Teorem 3.6. *Neka je X vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$. Neka su $(v_k)_k$ i $(w_k)_k$ konvergentni nizovi u X, $(\lambda_k)_k$ konvergentan niz u $\mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada* *vrijedi*

$$\begin{array}{ll} (i) & \lim\limits_{k\to\infty}(v_k + w_k) = \lim\limits_{k\to\infty} v_k + \lim\limits_{k\to\infty} w_k, \\ (ii) & \lim\limits_{k\to\infty} \lambda v_k = \lambda \lim\limits_{k\to\infty} v_k, \\ (iii) & \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k v_k = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k \lim\limits_{k\to\infty} v_k, \\ (iv) & \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_k} v_k = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k} \lim\limits_{k\to\infty} v_k. \end{array} \tag{3.5}$$

Dokaz: Po analogiji s dokazom teorema 2.4, dokažite sami. □

Pokažimo da se konvergencija u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d_2)$ svodi na konvergenciju po komponentama u $\mathbb{R}$.

Propozicija 3.6. *Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}^n$, gdje je $x_k = (\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(n)})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Neka su $(\alpha_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ $(i = 1, \dots, n)$ njegovi komponentni nizovi. Tada*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(i)} = \alpha^{(i)} (i = 1, \dots, n).$$

Dokaz: Pomoću nejednakosti (3.4) imamo

$$d_\infty(x, x_k) \le d_p(x, x_k) \le \sqrt{n}\, d_\infty(x, x_k), \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ i neka je $i \in \{1, \dots, n\}$ bilo koji. Vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (k \ge k_\varepsilon) \Rightarrow (d_2(x_k, x_0) < \varepsilon).$$

Kako je $|\alpha^{(i)} - \alpha_k^{(i)}| \le d_\infty(x, x_k) \le d_2(x, x_k) < \varepsilon$ to vrijedi $\lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(i)} = \alpha^{(i)}$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$.

Neka je sada $\lim_{k\to\infty} \alpha_k^{(i)} = \alpha^{(i)}$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Za $\varepsilon > 0$ po volji i za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ po definiciji 2.3 postoji $k_\varepsilon^{(i)} \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da $\forall k \in \mathbb{N}$ vrijedi $(k \ge k_\varepsilon^{(i)}) \Rightarrow (|\alpha^{(i)} - \alpha_k^{(i)}|) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$. Neka je $k_\varepsilon = \max\{k_\varepsilon^{(i)}; i = 1, \dots, n\}$. Sada za svaki $(k \ge k_\varepsilon)$ vrijedi $d_2(x, x_k) \le \sqrt{n}\, d_\infty(x, x_k) < \sqrt{n}\, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon$. □

Sada dokazujemo poopćenje teorema 2.6 o nizovima u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.7. *(Bolzano–Weierstrassov teorem za nizove) Svaki ograničen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz: Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ograničen niz u $\mathbb{R}^n$, gdje je $x_k = (\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(n)})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Zbog nejednakosti $|\alpha_k^{(i)}| \le d_2(x_k, 0)$ $(i = 1, \dots, n)$ su i komponentni nizovi $(\alpha_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ $(i = 1, \dots, n)$ ograničeni u $\mathbb{R}$. Tada po teorema 2.6

niz $(\alpha_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ posjeduje konvergentan podniz $(\alpha_{p_k^{(1)}}^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$. Na isti način podniz $(\alpha_{p_k^{(1)}}^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz $(\alpha_{p_k^{(2)}}^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$. Tako u n koraka dolazimo do konvergentnog podniza $(\alpha_{p_k^{(n)}}^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ od niza $(\alpha_{p_k^{(n-1)}}^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$. Kao podnizovi konvergentnih nizova sada su $(\alpha_{p_k^{(n)}}^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ konvergentni u $\mathbb{R}$. Odatle, po propoziciji 3.6 slijedi konvergencija niza $(x_{p_k^{(n)}})_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}^n$. $\square$

Pomoću nizova možemo karakterizirati zatvorene skupove.

Propozicija 3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor.*

(i) Skup $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako za svaki konvergentan niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A vrijedi da mu je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$.

(ii) Za skup $B \subseteq X$ vrijedi da je $x \in \mathit{Cl}\, B$ ako i samo ako postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B takav da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Dokaz: (i) Neka je A zatvoren, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u A i $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Ako je $x \notin A$, onda je x gomilište od A jer svaka kugla od x sadrži (gotovo sve) članove niza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. No tada je $x \in A$ jer je A zatvoren, pa sadrži sva svoja gomilišta, a to je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, A zatvoren, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u A i $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ povlači $x \in A$.

Obratno, neka svaki konvergentni niz u A ima limes u A. Ako je x gomilište od A, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x_k \in K(x, \frac{1}{k}) \cap A$, tj. za niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A vrijedi $d(x, x_k) < \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$. Pošto A sadrži sva svoja gomilišta, on je po teoremu 3.5 zatvoren skup.

(ii) Ako je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz u $\mathit{Cl}\, B$, onda postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B takav da vrijedi $d(y_k, x_k) < \frac{1}{k}$, a odatle slijedi $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Neka je $x \in \mathit{Cl}\, B$. Tada zbog (i) postoji niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathit{Cl}\, B$ tako da je $x = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$. Prema prethodnom, postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B takav da vrijedi $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Obratno, ako postoji niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B takav da vrijedi $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, onda je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathit{Cl}\, B$, pa prema (i) slijedi $x \in \mathit{Cl}\, B$. $\square$

3.2.1 Cauchyjev niz

Definicija 3.11. Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da je taj niz **Cauchyjev** ili **fundamentalan**, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})((n \geq n_\varepsilon) \implies (d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)).$$

Koristi se i slijedeća varijanta

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\ ((m, n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (d(x_m, x_n) < \varepsilon)).$$

Teorem 3.8. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je Cauchyjev.*

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ konvergentan niz i $\lim_n x_n = x_0$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. No za svaki $p \in \mathbb{N}$ je tada i $n + p \geq n_\varepsilon$ pa je i $d(x_{n+p}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Odatle dobijemo $d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_0) + d(x_n, x_0) < \varepsilon$, tj. $(x_n)_n$ je Cauchyjev. $\square$

Obrat ne vrijedi općenito, tj. svaki Cauchyjev niz u svakom metričkom prostoru ne mora biti konvergentan. Neka je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor s metrikom $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ i $(\mathbb{Q}, d)$ njegov potprostor. Niz $(x_n)_n$ s racionalnim članovima definiran rekurzijom $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, uz početnu vrijednost $x_0 = 2$ u prostoru $\mathbb{R}$ konvergira k $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (vidi zadatak 2.3), pa je on Cauchijev niz u $\mathbb{R}$. Tako je on Cauchijev niz i u $\mathbb{Q}$ jer to svojstvo ovisi samo o članovima niza, ali nije konvergentan u $\mathbb{Q}$ jer njegov jedinstveni limes u $\mathbb{R}$ nije u $\mathbb{Q}$.

Teorem 3.9. *Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz iz X. Ako neki podniz $(x_{p_n})_n$ konvergira prema $x_0 \in X$, onda i $(x_n)_n$ konvergira prema x_0.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ odabran po volji. Po pretpostavci postoji , $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $m, n \geq n'_\varepsilon$ povlači $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $\lim_n x_{p_n} = x_0$ to postoji $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n''_\varepsilon$ vrijedi $d(x_{p_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Odatle, za $n \geq n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, zbog $p_n \geq n$, imamo $d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{p_n}) + d(x_{p_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tj. $\lim_n x_n = x_0$ i tvrdnja je dokazana. $\square$

Teorem 3.10. *Svaki Cauchyjev niz je omeđen.*

Dokaz: Promatrajmo niz $(x_n)_n$ iz X. Za $\varepsilon = 1$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_1$ vrijedi $d(x_n, x_{n_1}) < 1$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo $d(x_n, x_{n_1}) \leq M = \max\{d(x_1, x_{n_1}), \ldots, d(x_{n_1-1}, x_{n_1}), 1\}$, tj. niz je sadržan u kugli $K(x_{n_1}, M)$ pa je omeđen. $\square$

Sada možemo dokazati osnovno svojstvo prostora $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.11. *U prostoru $\mathbb{R}^n$ svaki Cauchyjev niz konvergira.*

Dokaz: Za $\mathbb{R}^n$ pretpostavljamo metričku strukturu, i to bilo koju od metrika d_1, d_2 ili d_∞. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 3.10 taj je niz omeđen, pa prema Bolzano – Weierstrasseovom teoremu 3.7 sadrži podniz koji konvergira prema točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sada, prema teoremu 3.9 i $(x_n)_n$ konvergira prema x_0. □

Definicija 3.12. Kažemo, da je metrički prostor **potpun**, ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira.

Hilbertov prostor je potpun unitaran prostor.
Banachov prostor je potpun normirani prostor.

Prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ je Hilbertov prostor, a za $1 \leq p \leq \infty$ su $(\mathbb{R}^n, d_p)$ Banachovi prostori.

3.2.2 Banachov teorem o fiksnoj točki

Neka je X bilo koji skup, a $f : X \to X$ preslikavanje. Kažemo da je $x^* \in X$ **fiksna točka** za f ako vrijedi $f(x^*) = x^*$.

Neka je (X, d) metrički prostor. Za preslikavanje $f : X \to X$ kažemo da je **kontrakcija** s koeficijentom $\alpha \in [0, 1\rangle$, ako

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \ \forall x, y \in X.$$

Teorem 3.12 (Banach[1])**.** *Neka je (X, d) potpun metrički prostor i neka je $f : X \to X$ kontrakcija. Tada postoji točno jedna fiksna točka x^* od f u X. Štoviše, za bilo koju točku $x_1 \in X$, niz $(x_n)_n$ definiran rekurzijom $x_{n+1} = f(x_n)$ konvergira k x^* i $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1). \tag{3.7}$$

Dokaz: Neka je $x_1 \in X$ bilo koja točka. Definiramo $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Tako dolazimo do niza $(x_n)_n$ u prostoru X, za koji tvrdimo da je Cauchyjev.

Pokažimo najprije da vrijedi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1). \tag{3.8}$$

[1] Stefan Banach (Krakow, 30. svibanj 1892. – Lviv, 31. kolovoz 1945.) poljski matematičar

Dokaz ide indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja je očigledna. Pretpostavimo da je nejednakost u (3.8) ispunjena za $n \in \mathbb{N}$ i računamo za $n + 1$:

$$d(x_{n+3}, x_{n+2}) \leq \alpha d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^{n+1} d(x_2, x_1).$$

Nadalje, za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_{n+k-i}, x_{n+k-i-1}) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{n+k-i-2} d(x_2, x_1) =$$

$$= \alpha^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{k-i-1} \right) d(x_2, x_1) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1). \tag{3.9}$$

Primijetimo da zbog $0 \leq \alpha < 1$ imamo $\lim_n \dfrac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) = 0$, pa za lijevu stranu nejednakosti vrijedi $\lim_n d(x_{n+k}, x_n) = 0$ uniformno po $k \in \mathbb{N}$, što govori da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Zbog potpunosti prostora X, taj niz konvergira k nekoj točki $x^* \in X$. Tvrdimo da je x^* fiksna točka za f. Zaista, za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d(f(x^*), x^*) \leq d(f(x^*), x_n) + d(x_n, x^*) = d(f(x^*), f(x_{n-1})) + d(x_n, x^*) \leq$$

$$\leq \alpha d(x^*, x_{n-1}) + d(x_n, x^*).$$

Sada, za $n \to \infty$ dobijemo $d(f(x^*), x^*) \leq 0$, što povlači $d(f(x^*), x^*) = 0$, odnosno $f(x^*) = x^*$. Dakle x^* je fiksna točka preslikavanja f.

Pokažimo jedinstvenost fiksne točke. Neka je y^* druga fiksna točka za f, tj. $f(y^*) = y^*$. Onda imamo $d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha d(x^*, y^*)$, tj. $(1-\alpha) d(x^*, y^*) \leq 0$. Kako je $1 - \alpha > 0$ mora biti $d(x^*, y^*) \leq 0$, što daje $d(x^*, y^*) = 0$, odnosno $x^* = y^*$.

Ocjena (3.7) za udaljenost fiksne točke x^* od x_n slijedi iz (3.9) za $k \to \infty$. $\square$

3.3 Kompaktni skupovi

Pojam kompaktnosti ima smisla u topološkim prostorima. Zbog njegove složenosti ograničit ćemo se na metričke prostore i euklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.13. Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subseteq X$ je **kompaktan** ako svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji limes je u A.

U $\mathbb{R}^n$ imamo slijedeću važnu karakterizaciju kompaktnih skupova.

Teorem 3.13 (Heine [1]– Borel [2]). *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Dokaz: Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen i zatvoren skup i $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz u A. Niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je također ograničen, pa po teoremu 3.7 ima konvergentan podniz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}^n$. Zbog zatvorenosti od A, prema propoziciji 3.7, taj podniz konvergira u A. Dakle, skup A je kompaktan.

Obratno, neka je skup A kompaktan. Kada bi A bio neograničen, postojao bi niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A takav da vrijedi $\|x_k\|_2 = d_2(x_k, 0) \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Svaki podniz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ toga niza je također neograničen zbog $\|x_{p_k}\|_2 \geq p_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, zbog propozicije 3.4, niti jedan podniz nije konvergentan, što je suprotno pretpostavci o kompaktnosti skupa A.

Za dokaz zatvorenosti skupa A uzmimo bilo koji niz u A koji konvergira u $\mathbb{R}^n$. Zbog kompaktnosti skupa A postoji njegov podniz koji konvergira u A. No, limes niza i podniza su isti, pa je limes niza u A. $\square$

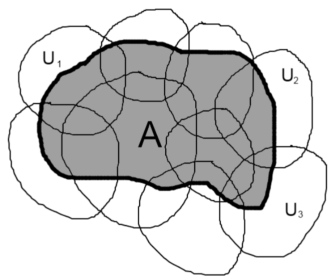
***Napomena* 3.5.** Heine-Borelov teorem ne vrijedi u općem metričkom prostoru.

U općenitijim strukturama od $\mathbb{R}^n$ od važnosti je definicija kompaktnosti pomoću otvorenih pokrivača.

Definicija 3.14. Otvoreni pokrivač skupa $A \subseteq X$ je familija otvorenih skupova $\{U_i; i \in \mathcal{J}\}$ za koje je $A \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{J}} U_i$.

Svaku podfamiliju $\{U_i; i \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, koja je pokrivač od A nazivamo **podpokrivač**.

Ako je indeksni skup $\mathcal{J}$ konačan, kažemo da je pokrivač konačan.



Slijedeću tvrdnja nećemo dokazivati i ona služi kao definicija kompaktnog skupa u općim topološkim prostorima.

Teorem 3.14. *Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač skupa A sadrži konačan podpokrivač.*

[1]Eduard Heine (Berlin, 16. ožujka 1821 - Halle, 21. listopad 1981) njemački matematičar

[2]Emile Felix Edouard Justin Borel (St. Affrique, 7. siječanj 1871 – Paris, 3. veljače 1956.) francuski matematičar

Primjer 3.9. Skup $\mathbb{R}$ nije kompaktan jer nije omeđen (teorem 3.13). Primijetimo da pokrivač $\mathcal{U} = \{\langle k-1, k+1\rangle; k \in \mathbb{Z}\}$ nema konačan podpokrivač. Također i niz $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema konvergentan podniz.

Primjer 3.10. Skup $\langle a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ nije kompaktan. Familija $\mathcal{U} = \{U_k = \langle a + \frac{1}{k}, b+1\rangle; k \in \mathbb{N}, k(b-a) > 1\}$ je pokrivač od A. Da je $\mathcal{U}$ pokrivač od A slijedi iz činjenice da za bilo koji $x \in \langle a, b]$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k(x-a) > 1$ pa je $x \in \langle a + \frac{1}{k}, 2\rangle$. Sada za bilo koju konačnu podfamiliju $\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}\}$ od $\mathcal{U}$, je za $k_0 = \max\{i_1 \ldots, i_m\}$ broj $x_0 = a + \frac{1}{k_0+1}$ takav da je $a < x_0 < a + \frac{1}{k_0}$, tj. $x_0 \notin \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$.

Također, niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u A takav da je $x_k = a + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}, k(b-a) > 1$, ima limes $a \notin A$.

4 Limes funkcije i neprekidnost funkcije

Definicija 4.1. Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori. Neka je $A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ gomilište skupa A i $f : A \to Y$ funkcija.

Kažemo da f ima limes u točki x_0 ako postoji $y_0 \in Y \in$ takav da:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)\ ((0 < d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\rho(f(x), y_0) < \varepsilon)). \tag{4.1}$$

Tada pišemo $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Propozicija 4.1. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, $A \subseteq X$, i $f : A \to Y$.*

Ako limes funkcije u točki x_0 postoji, onda je on jedinstven.

Dokaz: Neka su y_0 i z_0, $y_0 \neq z_0$, limesi od f u točki x_0. U definiciji 4.1 stavimo $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(y_0, z_0) > 0$. Tada postoje $\delta_{y_0} > 0$ i $\delta_{z_0} > 0$ tako da za svaki $x \in A$ takav da je $d(x, x_0) < \min\{\delta_{y_0}, \delta_{z_0}\}$ slijedi $\rho(f(x), y_0) < \varepsilon$ i $\rho(f(x), z_0) < \varepsilon$. Odatle slijedi $\rho(y_0, z_0) \leq \rho(y_0, f(x)) + \rho(f(x), z_0) < 2\varepsilon = \rho(y_0, z_0)$, što je nemoguće. $\square$

Definicija 4.2. Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori. Neka je $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ gomilište skupa A i $f : A \to Y$ funkcija.

Kažemo da je f **neprekidna** u točki x_0 ako vrijedi $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

To znači da je f neprekidna u točki x_0 ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)\ ((d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)). \tag{4.2}$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $V \subseteq A$ ako je neprekidna u svakoj točki od V. Kada samo kažemo da je f neprekidna, onda podrazumjevamo da je neprekidna na cijeloj svojoj domeni.

Primjer 4.1. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$. ***Rješenje:*** Neka je $c \in \mathbb{R}$ bilo koja točka i $\varepsilon > 0$ po volji. Tražimo $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x - c| < \delta$ vrijedi

$$||x| - |c|| \leq |x - c| < \delta \leq \varepsilon.$$

Dovoljno je uzeti $0 < \delta \leq \varepsilon$.

Primjer 4.2. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.
Rješenje: Neka je $c \in \mathbb{R}$ bilo koja točka i $\varepsilon > 0$ po volji. Tražimo $\delta > 0$ tako da za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x - c| < \delta$ vrijedi

$$|x^2 - c^2| \leq |x - c||x + c| \leq |x - c|(|x - c| + 2|c|) < \delta(\delta + 2|c|) \leq \varepsilon.$$

Dovoljno je uzeti $0 < \delta \leq \frac{-|c| + \sqrt{c^2 + \varepsilon}}{2}$.

Primjer 4.3. Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Rješenje: Za bilo koji $\varepsilon > 0$ uzmimo $\delta = \min\{\frac{|c|}{2}, \frac{\varepsilon |c|^2}{2}\}$. Imamo

$$(|x - c| < \delta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (|x - c| < \frac{|c|}{2}) \Rightarrow (\frac{|c|}{2} < |x|) \Rightarrow (\frac{\varepsilon |c|^2}{2} < \varepsilon |x||c|) \\ \\ (|x - c| < \frac{\varepsilon |c|^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|x - c| < \varepsilon |x||c|) \Rightarrow \left(\frac{|x - c|}{|x||c|} < \varepsilon \right) \Rightarrow \left(\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon \right). \qquad \square$$

Teorem 4.1. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ funkcija. Slijedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(*i*) *f je neprekidna na X.*

(*ii*) *Za svaki niz $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u X, ako je $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 \in X$, onda je $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0) \in Y$.*

(*iii*) *Za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ je njegova praslika $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren skup u X.*

Dokaz: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Neka je f neprekidna na X i neka je $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bilo koji niz u X takav da vrijedi $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 \in X$. Pokažimo da vrijedi $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0) \in Y$. U tu svrhu uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji i neka je $\delta > 0$ takav da vrijedi

(4.2). Sada, za taj $\delta > 0$ iz definicije 3.10 imamo $k_\delta \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \in \mathbb{N}$ za koje je $k \geq k_\delta$ slijedi $d(x_0, x_k) < \delta$. Neka je $k_\varepsilon = k_\delta$ i neka je $k \geq k_\varepsilon$. Tada vrijedi $d(x_k, x_0) < \delta$, a to povlači $\rho(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$, tj. vrijedi (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup u Y. Pokažimo da je i $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren u X. Skup $B = V^C = Y \setminus V$ je zatvoren. Dovoljno je pokazati da je $f^{-1}(B) \subseteq X$ zatvoren. Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $f^{-1}(B)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \in X$. Tada je niz $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y_k = f(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, u B i zbog (ii) imamo $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = f(x_0) \in Y$. Zbog zatvorenosti od B, po propoziciji 3.7, je $f(x_0) \in B$. Tada je $x_0 \in f^{-1}(B)$, pa je po propoziciji 3.7 skup $f^{-1}(B) \subseteq X$ zatvoren. Vrijedi $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$, odakle slijedi otvorenost skupa $f^{-1}(V)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Neka je $x_0 \in X$ bilo koja točka. Pokažimo da iz uvjeta (iii) slijedi $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, odnosno 4.2. Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji i neka je $V = K(f(x_0), \varepsilon)$ otvorena kugla oko $f(x_0) \in Y$. Tada je $U = f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren skup i $x_0 \in U$, pa postoji otvorena kugla $K(x_0, \delta) \subseteq U$. Odatle imamo inkluziju $f(K(x_0, \delta)) \subseteq f(U) = V = K(f(x_0), \varepsilon)$, a to znači da $\forall x \in X$, $(d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$. $\square$

Propozicija 4.2. *Linearan operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$. On je ograničen na jediničnoj zatvorenoj kugli $\overline{K}(0,1)$ i $\|T\| = \max\{\|Th\|; h \in \overline{K}(0,1)\}$ nazivamo* **norma operatora** $\|T\|$.

Dokaz: Prvo pokažimo da je T ograničena funkcija na $\overline{K}(0,1)$. Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$ i neka je $M = n \max\{\|T(e_i)\|; i = 1, \ldots, n\}$. Tada je

$$\|Th\| = \|T(h_1, \ldots, h_n)\| = \|T(\sum_{i=1}^n h_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^n h_i T(e_i)\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |h_i| \|T(e_i)\| \leq \frac{M}{n} \sum_{i=1}^n |h_i| \leq M\|h\|.$$

Sada za $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ i nejednakosti $\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|$ u (4.2) slijedi neprekidnost funkcije T na $\mathbb{R}^n$. $\square$

Zadatak 4.1. Neka je $\alpha > 0$ i $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, proširena nulom na $\mathbb{R}^n$. Neka je

$$D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; (\forall \delta > 0)(\exists u, v \in K(x, \delta)) \wedge |f(u) - f(v)| \geq \alpha\}.$$

Pokažite da je D_α zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

Rješenje: Pokažimo da je

$$D_\alpha^C = \{x \in \mathbb{R}^n; (\exists \delta_x > 0)(\forall u, v \in K(x, \delta_x)) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \alpha\}$$

otvoren skup u $\mathbb{R}^n$.

Neka je $x \in D_\alpha^C$ takav da $\exists \delta > 0$ i $(\forall u, v \in K(x,\delta)) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \alpha$ i neka je $K(x, \frac{\delta}{2})$. Za svaki $y \in K(x, \frac{\delta}{2})$ je $K(y, \frac{\delta}{2}) \subseteq K(x, \delta)$ pa vrijedi $(\forall u, v \in K(y, \frac{\delta}{2})) \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \alpha$, tj. $y \in D_\alpha^C$. Dakle, za $x \in D_\alpha^C$ je $K(x, \frac{\delta}{2}) \subseteq D_\alpha^C$, pa je D_α^C otvoren skup. $\square$

Za funkciju $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, s D označimo skup svih točaka prekida funkcije, tj.

$$D = \{x \in K; (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists u, v \in K(x, \delta)) \wedge |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon\}$$

.

Zadatak 4.2. Neka je D skup točaka prekida funkcije f. Za svaki $\alpha > 0$ je skup $D_\alpha \subseteq D$ i vrijedi $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\frac{1}{k}}$.

Rješenje: Očito, za svaki $\alpha > 0$ je skup $D_\alpha \subseteq D$. Odatle je $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\frac{1}{k}} \subseteq D$. Obratno, za $x \in D$ postoji $\varepsilon > 0$ takav da $\forall \delta > 0$ vrijedi $\exists u, v \in K(x, \delta)) \wedge |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon$. Tada za $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k\varepsilon > 1$ vrijedi $x \in D_\varepsilon \subseteq D_{\frac{1}{k}}$. Odatle je $D \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{\frac{1}{k}}$. $\square$

4.1 Operacije s neprekidnim funkcijama

Teorem 4.2. *Neka su (X, d), (Y, ρ) i (Z, δ) metrički prostori, neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidne funkcije. Tada je kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna funkcija.*

Dokaz: Neka je $W \subseteq Z$ bilo koji otvoren skup u Z. Zbog neprekidnosti od g, po teoremu 4.1, skup $V = g^{-1}(W)$ otvoren u Y. Tada je $U = f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ otvoren skup u X. Po teoremu 4.1 funkcija $g \circ f$ je neprekidna. $\square$

Teorem 4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in X$ gomilište skupa A. Neka je V normirana vektorska algebra. Neka su $f, g : A \to V$ takve da postoje $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Tada vrijedi:*

(i) Postoji $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ i jednak je $a + b$.

(ii) Postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ i jednak je ab.

Dokaz: Zbog $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ za $\varepsilon > 0$ postoje $\delta_a, \delta_b > 0$ tako da $\forall x \in A$, $(d(x, x_0) < \delta_a) \Rightarrow (\|f(x) - a\| < \varepsilon')$ i $(d(x, x_0) < \delta_b) \Rightarrow (\|g(x) - b\| < \varepsilon')$.
Ad(i): Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji i neka je $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$. Sada za $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$ imamo: $\forall x \in A$, $(d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\|(f(x) + g(x)) - (a + b)\| \leq \|f(x) - a\| + \|g(x) - b\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon)$.
Ad(ii): Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji i neka je $\varepsilon' = \sqrt{(\frac{\|a\|+\|b\|}{2})^2 + \varepsilon)} - \frac{\|a\|+\|b\|}{2} > 0$. Sada za $\delta = \min\{\delta_a, \delta_b\}$ imamo: $\forall x \in A$, $(d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\|f(x)g(x) - ab\| \leq \|f(x) - a\|\|g(x) - b\| + \|f(x) - a\|\|b\| + \|a\|\|g(x) - b\| < \varepsilon'^2 + (\|a\| + \|b\|)\varepsilon' = \varepsilon)$. $\square$

Korolar 4.1. *Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup i $x_0 \in U$. Neka su $f, g : U \to V$ neprekidne u x_0.*

(i) Tada je funkcija $f + g : U \to V$ neprekidna u x_0.

(ii) Tada je funkcija $fg : U \to V$ neprekidna u x_0.

4.2 Uniformna neprekidnost

Pojam je vezan uz metričke prostore.

Definicija 4.3. Neka su (X, d), (Y, ρ) metrički prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je f **uniformno ili jednoliko neprekidno** na prostoru X, ako

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X (d(x, y) < \delta) \Rightarrow (\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

***Napomena* 4.1.** Usporedimo li prethodnu definiciju s definicijom neprekidnosti, zaključujemo da je svako uniformno neprekidno preslikavanje i neprekidno, ali obrat nije istinit općenito. Naime, u općoj definiciji uz dani $\varepsilon > 0$ je $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ dok je kod uniformne neprekidnosti $\delta = \delta(\varepsilon)$ tj. ne ovisi o promatranoj točki.

Primjer 4.4. Realna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je primjer funkcije, koja je neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ali nije uniformno neprekidna.

Primjer 4.5. U normiranim prostorima uniformna neprekidnost znači

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y \in X(\|x-y\| < \delta) \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon). \tag{4.3}$$

Zadatak 4.3. Pokažite da je u normiranom prostoru X norma uniformno neprekidna funkcija na prostoru X, zbrajanje uniformno neprekidna funkcija na prostoru $X \times X$, a množenje skalarom je uniformno neprekidno na omeđenim skupovima u $\mathbb{R} \times X$.

Rješenje: Za normu $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ za sve $x, y \in X$. Tada je jasno da u definiciji uniformne neprekidnosti (4.3) za $\varepsilon > 0$ zadan po volji možemo uzet $\delta = \varepsilon$.

Za zbrajanje $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x+y$, imamo $\|x+y-(x'+y')\| \leq \|x-x'\|+\|y-y'\| \leq \sqrt{2}\sqrt{\|x-x'\|^2 + \|y-y'\|^2} = \sqrt{2}\|(x, y)-(x', y')\|$. Tada za $\varepsilon > 0$ zadan po volji možemo uzet $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Za množenje $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, imamo $\|\lambda x - \lambda' x'\| \leq |\lambda|\|x-x'\|+|\lambda-\lambda'|\|x'\|$. Za $(\lambda, x), (\lambda', x') \in \mathbb{R}\times X$ takve da je $\|(\lambda, x)\| \leq M$ i $\|(\lambda', x')\| \leq M$ imamo $|\lambda| \leq M$ i $\|x'\| \leq M$. Odatle je $\|\lambda x - \lambda' x'\| \leq M(\|x-x'\| + |\lambda-\lambda'|) \leq M\sqrt{2}\|(\lambda, x) - (\lambda', x')\|$. Tada za $\varepsilon > 0$ zadan po volji možemo uzet $\delta = \frac{\varepsilon}{M\sqrt{2}}$. □

Primjer 4.6. Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori i neka je $P_1 : X\times Y \to X$ i $P_2 : X \times Y \to Y$ projekcije, tj. funkcije definirane s $P_1(x, y) = x$ i $P_2(x, y) = y$ za sve $(x, y) \in X\times Y$. Funkcije P_1 i P_2 su uniformno neprekidne na $X \times Y$.

Rješenje: Za funkcije P_1 i P_2 vrijedi

$$d(P_1(x, y), P_1(x', y')) = d(x, x') \leq (d(x, x')^p + \rho(y, y'))^{\frac{1}{p}} = d_p((x, y), (x', y')),$$
$$\rho(P_2(x, y), P_2(x', y')) = \rho(y, y') \leq (d(x, x')^p + \rho(y, y'))^{\frac{1}{p}} = d_p((x, y), (x', y')).$$

Sada uniformna neprekidnost direktno slijedi iz definiciji 4.3 za $\delta = \varepsilon$. □

Zadatak 4.4. Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, te neka su $U \subset X$ i $V \subset Y$ otvoreni skupovi. Pokažite da je skup $U \times V \subset X \times Y$ otvoren skup u metričkom prostoru $X \times Y$.

Rješenje: Neka su P_1 i P_2 projekcije iz primjera 4.6. Zbog njihove neprekidnosti su skupovi $P_1^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}^m$ i $P_2^{-1}(V) = \mathbb{R}^n \times V$ otvoreni u $X \times Y$. Tada je i skup $P_1^{-1}(U) \cap P_2^{-1}(V) = U \times \mathbb{R}^m \cap \mathbb{R}^n \times V = U \times V$ otvoren skup u $X \times Y$. □

***Napomena* 4.2.** Ako su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topoloki prostori, onda prethodni zadatak sugerira da je topologiju $\mathcal{T}_{X\times Y}$ na $X \times Y$ najbolje zadati tako da familiju skupova $\mathcal{B} = \{U \times V; U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$ uzmemo za bazu topologije $\mathcal{T}_{X\times Y}$ na $X \times Y$, tj. otvoreni skupovi su unije elemenata iz baze topologije. U takvoj topologiji su projekcije P_1 i P_2 neprekidne funkcije.

Na kompaktnim skupovima u metričkom prostoru neprekidnost i uniformna neprekidnost se podudaraju.

Teorem 4.4. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori $K \subseteq X$ kompaktan skup. Ako je $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje, onda je f uniformno neprekidna na K.*

Dokaz: Pretpostavimo da tvrdnja teorema nije istinita, tj. K je kompaktan, $f : K \to Y$ je neprekidna na K i nije uniformno neprekidna na K. Tada bi $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x'_\delta, x''_\delta \in X$, $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ i $d'(f(x'_\delta), f(x''_\delta) \geq \varepsilon)$. Tako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\delta = \frac{1}{n}$ dobijemo $x'_n, x''_n \in K$, takve da je $d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}$ i $d'(f(x'_n), f(x''_n) \geq \varepsilon > 0$. Zbog kompaktnosti skupa K, niz $(x'_n)_n$ ima konvergentan podniz. Pretpostavimo da je već sam niz konvergentan i $x_0 = \lim_n x'_n$. Tada vrijedi $d(x''_n, x_0) \leq d(x'_n, x''_n) + d(x'_n, x_0) \leq \frac{1}{n} + d(x'_n, x_0)$, što daje $\lim_n x''_n = x_0$. Zbog neprekidnosti funkcije f imamo $\lim_n f(x'_n) = \lim_n f(x''_n) = f(x_0)$, a odatle, pomoću propozicije 3.1, slijedi $\lim_n d'(f(x'_n), f(x''_n)) = 0$, što je kontradikcija s izborom nizova. □

Slično kao u prethodnom teoremu možemo dokazati tvrdnju u slijedećem zadatku.

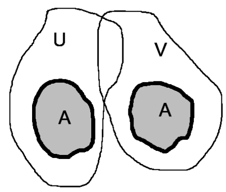
Zadatak 4.5. Neka je $\alpha > 0$. Ako je $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, funkcija takva da za svaku točku x kompaktnog skupa K postoji $\delta_x > 0$ takav da $(\forall u, v \in K(x, \delta_x)) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| < \alpha)$, onda postoji $\delta > 0$ takav da $\forall u, v \in K$ vrijedi $\|u - v\| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \alpha\}$.

Rješenje: Neka tvrdnja nije istinita, tj. za svaku točku x kompaktnog skupa K postoji $\delta_x > 0$ takav da $(\forall u, v \in K(x, \delta_x)) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| < \alpha)$ i istovremeno vrijedi da $\forall \delta > 0$ $\exists u, v \in K$ takvi da je $(\|u - v\| < \delta) \wedge (|f(u) - f(v)| \geq \alpha)$. Tada za $\delta = \frac{1}{k}$ $\exists u_k, v_k \in K$ takvi da je $(\|u_k - v_k\| <$

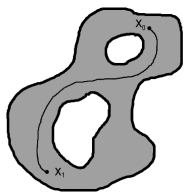
$\delta) \wedge (|f(u_k) - f(v_k)| \geq \alpha)$. Niz $(u_k)_k$ je u K pa postoji njegov konvergentan podniz $(u_{k_p})_k$, $\lim_k u_{p_k} = x_0 \in K$. Zbog $\|u_{k_p} - v_{k_p}\| < \frac{1}{p_k}$ slijedi $\lim_k v_{p_k} = x_0 \in K$. Neka $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\|u_{p_k} - x_0\| < \delta_{x_0}$ i $\|v_{p_k} - x_0\| < \delta_{x_0}$. Tada su $u_{p_k}, v_{p_k} \in K(x_0, \delta_{x_0})$ pa je $|f(u_{p_k}) - f(v_{p_k})| < \alpha$, što je u kontradikciji s izborom u_{p_k} i v_{p_k} tako da bude $|f(u_{p_k}) - f(v_{p_k})| \geq \alpha$. Dakle vrijedi tvrdnja u zadatku. $\square$

4.3 Povezanost

Definicija 4.4. Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **nepovezan** ako postoje neprazni otvoreni podskupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap A = \emptyset$.
Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je **povezan** ako nije nepovezan.



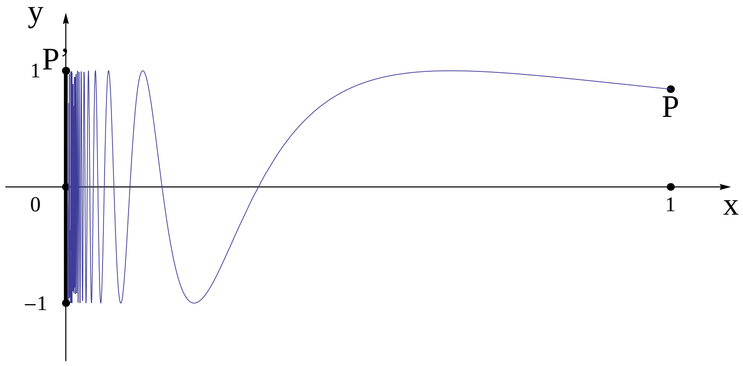
Definicija 4.5. Za podskup A metričkog prostor X kažemo da je **putevima povezan** ako se svake dvije točke $x_0, x_1 \in A$ mogu spojiti putem, tj. postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0,1] \to X$ takvo da je $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$ i $\varphi([0,1]) \subseteq A$.
Funkciju φ nazivamo **staza** ili **put** među točkama x_0 i x_1.



Otvoren skup u R^n je povezan ako i samo ako je putovima povezan. Štoviše, vrijedi slijedeća karakterizacija:

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako za svake dvije točke $x_0, x_1 \in U$, postoji konačno mnogo točaka $x_0 = y_0, y_1, \ldots, y_k = x_1$ u U takvih da svi segmenti $[y_{i-1}, y_i] := (1-t)y_{i-1} + ty_i : 0 \leq t \leq 1$ leže u U,tj. $[y_{i-1}, y_i] \subseteq U$, $i = 1, \ldots, k$.

Primjer 4.7. Neka je $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}); 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. A je povezan skup iako se, naprimjer, točke $P = (1, \sin 1)$ i $P' = (0, 1)$ ne mogu spojiti putem unutar A.



4.4 Neprekidne slike kompaktnih i povezanih skupova

Teorem 4.5. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $K \subseteq X$ povezan (putovima povezan) skup u X. Tada je $f(K)$ povezan (putovima povezan) skup u Y.*

Dokaz: Neka je $K \subseteq X$ povezan i neka $f(K) \subseteq Y$ nije povezan. Tada bi postojali otvoreni skupovi $S, T \subseteq Y$ takvi da je $f(K) \cap S \neq \emptyset$, $f(K) \cap T \neq \emptyset$, $f(K) \subseteq S \cup T$ i $(S \cap T) \cap f(K) = \emptyset$. Zbog neprekidnosti funkcije f iz teorema 4.1 slijedi otvorenost skupova $U = f^{-1}(S)$ i $V = f^{-1}(T)$ u X. Pokažimo da vrijedi $K \cap U \neq \emptyset$, $K \cap V \neq \emptyset$, $K \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap K = \emptyset$.

Naime, $f(K) \subseteq S \cup T$ daje $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T) = U \cup V$. Također iz $(S \cap T) \cap f(K) = \emptyset$ slijedi $\emptyset = f^{-1}((S \cap T) \cap f(K)) = (f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)) \cap f^{-1}(f(K)) \supseteq (U \cap V) \cap K$, pa je $(U \cap V) \cap K = \emptyset$. Kada bi vrijedilo $K \cap U = \emptyset$ imali bi $K \subseteq V$, a odatle slijedi $f(K) \subset f(V) = f(f^{-1}(T)) = T$. To nije moguće zbog $\emptyset = f(K) \cap (T \cap S) = (f(K) \cap T) \cap S) = f(K) \cap S$, dakle vrijedi $K \cap U \neq \emptyset$. Analogno se pokazuje $K \cap V \neq \emptyset$.

Neka je $K \subseteq X$ putovima povezan i neka su $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) \in f(K)$ bilo koje dvije točke. Po definiciji 4.5, za točke $x_0, x_1 \in K$ postoji neprekidno preslikavanje $\varphi : [0, 1] \to X$ takvo da je $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$ i $\varphi([0, 1]) \subseteq K$. Tada je funkcija $\psi = f \circ \varphi : [0, 1] \to Y$ put između y_0 y_1 u $f(K)$. Naime, po teoremu 4.2 je $\psi = f \circ \varphi$ neprekidna, $\psi(0) = f(\varphi(0)) = f(x_0) = y_0$, $\psi(1) = f(\varphi(1)) = f(x_1) = y_1$ i $\psi([0, 1]) = f(\varphi([0, 1])) \subseteq f(K)$. □

Teorem 4.6. *Neka su (X, d) i (Y, ρ) metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija i $K \subseteq X$ kompaktan skup u X. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u Y.*

Dokaz: Neka je $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz u $f(K)$. Pokažimo da ima podniz koji konvergira u $f(K)$.

Neka je $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u K takav da je $y_k = f(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Kako je K kompaktan, to postoji podniz $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k} = x_0 \in K$. Zbog neprekidnosti funkcije f je $\lim\limits_{k\to\infty} y_{p_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{p_k}) = f(x_0) = y_0 \in f(K)$. □

Primjer 4.8. Neka je $K \subset \mathbb{R}^2$ kompaktan.

Pokažite da je $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in K\}$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$.

Rješenje: Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x, y) = x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Funkcija f je neprekidna zbog

$$|f(x, y) - f(x', y')| = |x - x'| \leq \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2} = \|(x, y) - (x', y')\|_2.$$

Pokažimo da je $A = f(K)$, pa će po teoremu 4.6 A biti kompaktan. Neka je $x \in A$. Tada $\exists y \in \mathbb{R}$ tako da je $(x, y) \in K$, tj. $x = f(x, y) \in f(K)$. Obratno, ako je $x = f(x, y)$ za neko $(x, y) \in K$, onda je $x \in A$ po definiciji od A. □

Teorem 4.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $K \subseteq A$ kompaktan skup u X. Tada je f ograničena na K. Postoje $x_m, x_M \in K$ takvi da je $f(x_m) = \min_{x\in K} f(x)$ i $f(x_M) = \max_{x\in K} f(x)$.*

Dokaz: Prema teoremu 4.6 je skup $B = \{f(x); x \in K\}$ je kompaktan u $\mathbb{R}$. Po teoremu 3.13 on je omeđen, pa postoje $\sup B$ i $\inf B$. Pokažimo da su oni iz B. Iz zadatka 2.2 slijedi postojanje niza $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ u B za kojeg je $\sup B = \lim_{k\to\infty} y_k$, pa zbog zatvorenosti skupa B imamo $\sup B \in B$. $\inf B \in B$ se vidi analogno. □

Korolar 4.2. *Ako je u teoremu 4.7 skup K kompaktan i povezan, onda je $f(K) = [f(x_m), f(x_M)]$ segment u $\mathbb{R}$, tj. f poprima na K minimum, maksimum i sve vrijednosti između.*

Dokaz: Slijedi it teorema 4.7 i teorema 4.5, te činjenice da je su u $\mathbb{R}$ segmenti jedini povezani i kompaktni skupovi. □

***Napomena* 4.3.** Original ili praslika kompaktnog skupa po neprekidnoj funkciji ne mora biti kompaktan skup. To je jasno iz primjera bilo koje konstantne funkcije na $\mathbb{R}$.

Zadatak 4.6. Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompaktni skupovi i $A \cap B = \emptyset$. Tad postoji $\gamma > 0$ takav da za $\forall x \in A$ i $\forall y \in B$ vrijedi $\|x - y\| \geq \gamma$.

Dokaz: Funkcija $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x, y) = \|x - y\|$ je neprekidna na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, skup $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ je kompaktan, pa g postiže na njemu minimum $g(x_0, y_0) = \gamma \geq 0$. Kada bi bilo $g(x_0, y_0) = 0$ vrijedilo bi $x_0 = y_0$, a to nije moguće jer je $A \cap B = \emptyset$. Dakle, vrijedi $\gamma > 0$. $\square$

Teorem 4.8. *Putevima povezan skup u metričkom prostoru je povezan.*

Dokaz: Neka je A putevima povezan. Pretpostavimo da je A nepovezan, tj. postoje otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$ i $(U \cap V) \cap A = \emptyset$. Uzmimo $x \in A \cap U$ i $y \in A \cap V$. Po pretpostavci postoji put $\varphi : [0, 1] \to A$, takva da je $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$ i φ neprekidna. Označimo $C = \varphi^{-1}(U)$ i $D = \varphi^{-1}(V)$, te je $C, D \subset [0, 1]$.

Neka je $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz u C i neka je $t = \lim_{k \to \infty} t_k$. Zbog zatvorenosti (kompaktnosti) od A i neprekidnosti funkcije φ vrijedi $t \in [0, 1]$ i $\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k) \in A \subseteq U \cup V$. Nadalje, vrijedi $\varphi(t) \in U$, jer bi u suprotnom slučaju, zbog otvorenosti od V, bilo $\varphi(t_k) \in V$ za gotovo sve $k \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija s $\varphi(t_k) \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$, i $U \cap V \cap A = \emptyset$. Dakle, C je zatvoren skup u $\mathbb{R}$. Analogno se dobije da je D zatvoren u $\mathbb{R}$. Jasno, C i D nisu prazni zbog $0 \in C$ i $1 \in D$. Također je $C \cap D = \varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(U \cap V) = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Za otvorene skupove $\mathbb{R} \setminus C$ i $\mathbb{R} \setminus D$, zbog $[0, 1] \subseteq C \cup D$, vrijedi $(\mathbb{R} \setminus C) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \cap [0, 1] = (\mathbb{R} \setminus (C \cup D)) \cap [0, 1] = \emptyset$. Također je $(\mathbb{R} \setminus C) \cup (\mathbb{R} \setminus D) = \mathbb{R} \setminus (C \cap D) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R} \supseteq [0, 1]$. To bi po definiciji 4.4 značilo da $[0, 1]$ nije povezan skup, što nije istina.

Dakle, pretpostavka da A nije povezan vodi na kontradikciju, što znači da je A povezan. $\square$

5 Diferencijabilnost i derivacija

5.1 Definicija derivacije

Prisjetimo se da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilna ili derivabilna u točki $c \in I$ otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$, ako postoji $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Taj broj zovemo **derivacija** funkcije f u točki c i pišemo

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{5.1}$$

Još se koriste oznake $Df(c)$ ili $\dfrac{df}{dx}(c)$.

Isto možemo zapisati kao

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - f'(c)h|}{|h|} = 0,$$

tj. postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - mh|}{|h|} = 0.$$

Uočimo da je funkcija $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $T(h) = mh$, $\forall h \in \mathbb{R}$, linearan operator, tj. $T(\alpha h + \beta k) = \alpha Th + \beta Tk$, $\forall h, k \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tako za općenitiji slučaj funkcije između normiranih prostora imam slijedeću definiciju.

Definicija 5.1. Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, \|\cdot\|)$ normirani prostori, $A \subseteq X$. Kažemo da je funkcija $f : A \to Y$ diferencijabilna ili derivabilna u točki $x_0 \in X$ ako postoji ograničen linearan operator $T : X \to Y$ takav da vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\|}{\|h\|} = 0, \tag{5.2}$$

tj. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, takav da $\forall h \in X$, $x_0 + h \in A$, vrijedi

$$(\|h\| < \delta) \Rightarrow (\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\| < \varepsilon \|h\|). \tag{5.3}$$

Tada pišemo $T = f'(x_0)$ i nazivamo ga **derivacija** funkcije f u točki x_0.

Nas će posebno interesirati slučaj kada su $X = \mathbb{R}^n$ i $Y = \mathbb{R}^m$ euklidski prostori.

***Napomena* 5.1.** Funkcija $g(x) = f(x_0) + T(x - x_0)$ je među afinim funkcijama najbolja aproksimacija funkcije f lokalno oko točke x_0.

Teorem 5.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, te neka je $f : A \to \mathbb{R}^m$ derivabilna u $x_0 \in A$. Tada je $f'(x_0)$ jedinstveno određena funkcijom f.*

Dokaz: Pretpostavimo da postoje dva linearna operatora T_1 i T_2 koja zadovoljavaju (5.2). Neka je $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, bilo koji, te neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ po volji. Tada za $h = \lambda e$ vrijedi

$$\|T_1 e - T_2 e\| = \frac{\|T_1 h - T_2 h\|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_2 h - (f(x_0 + h) - f(x_0) - T_1 h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_1 h\|}{\|h\|} + \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T_2 h\|}{\|h\|}.$$

Sada za $\lambda \to 0$, odnosno $h \to 0$, desna strana nejednakost teži k 0, dok lijeva ne ovisi o λ ili h. Odatle zaključujemo da vrijedi $T_1 e = T_2 e$, $\forall e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, dakle $T_1 = T_2$. □

5.2 Matrični zapis derivacija

U ovoj točki pokazujemo kako se linearan operator koji predstavlja derivaciju u točki može prikazati u paru kanonskih baza $(e_1, \ldots, e_n)$ i $(e_1, \ldots, e_m)$, gdje je $(e_i)_j = \delta_{i,j} = 0$ za $i \neq j$ i $\delta_{i,i} = 1$. U tu svrhu uvodimo pojam parcijalne derivacije.

Definicija 5.2. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, te neka je $f : A \to \mathbb{R}^m$ i $x_0 \in A$ takvi da je $f = (f_1, \ldots, f_m)$ i $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})^\tau$.

Ako postoji limes

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f_j(x_0 + \lambda e_i) - f_j(x_0)\|}{\lambda}$$

nazivamo ga i-tom **parcijalnom derivacijom** funkcije f_j u točki x_0 i označavamo s $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$.

Teorem 5.2. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ derivabilna na $\mathcal{O}$ (tj. u svakoj točki skupa $\mathcal{O}$), tada f ima na $\mathcal{O}$ parcijalne derivacija $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$, $i = 1, \dots, n$ and $j = 1, \dots, m$. Matrica operatora $f'(x_0)$ u paru kanonskih baza ima oblik*

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Matricu (5.4) nazivamo **Jacobijeva**[1] **matrica**.

Dokaz: Primijetimo da je element matrice $f'(x)$ na mjestu (j, i) upravo $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = (e_j | f'(x)e_i) = e_j^\tau f'(x)e_i$.

Prema definiciji derivacije (5.2) za $h = \lambda e_i$ imamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Th\|}{\|h\|} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|f(x+\lambda e_i) - f(x) - \lambda f'(x)e_i\|}{|\lambda|} = 0,$$

odnosno

$$f'(x)e_i = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda e_i) - f(x)}{\lambda}.$$

Skalarnim množenjem s e_j dobijemo

$$e_j^\tau f'(x)e_i = \lim_{\lambda \to 0} \frac{e_j^\tau f(x+\lambda e_i) - e_j^\tau f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f_j(x+\lambda e_i) - f_j(x)}{\lambda} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

□

Za funkciju $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$, je derivacija $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearan funkcional. Ako označimo funkciju $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})^\tau$, onda imamo $f'(x_0)h = (\nabla f(x_0)|h)$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Primjer 5.1. Nađimo $f'(x, y)$ za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $f(x, y) = (x^2, x^3y, x^4y^2)^\tau$, $(x, y)^\tau \in \mathbb{R}^2$.

Rješenje: Imamo

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x^2, & \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x, & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) = x^3y, & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 3x^2y, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = x^3, \\ f_3(x,y) = x^4y^2, & \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 4x^3y^2, & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 2x^4y. \end{array}$$

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 10. prosinac 1804. - Berlin, 18. veljače 1851.) njemački matematičar

Jacobijeva matrica je

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 3x^2y & x^3 \\ 4x^3y^2 & 2x^4y \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.2. Nađimo $\nabla f(x,y,z)$ za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadanu s $f(x,y,z) = \frac{x\sin y}{z}$, $(x,y,z)^\tau \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje: Imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\sin y}{z}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x\cos y}{z}, \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x\sin y}{z^2}$$

i

$$\nabla f(x,y,z) = (\frac{\sin y}{z}, \frac{x\cos y}{z}, -\frac{x\sin y}{z^2})^\tau.$$

Derivacija i algebarska struktura skupa funkcija s $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ usklađeni su kao u slučaju diferencijabilnih funkcija na $\mathbb{R}$.

Teorem 5.3. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcije $f, g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ derivabilne u $x_0 \in \mathcal{O}$. Vrijedi:*

(i) funkcija $f+g$ derivabilna u x_0 i $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,

(ii) funkcija λf derivabilna u x_0 i $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,

(iii) za $m = 1$, fg je derivabilna u x_0 i $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Dokaz: Iz definicije parcijalnih derivacija je jasno da za njih vrijede ista pravila deriviranja kao i za funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, tj. za $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, m$ vrijedi

$$\frac{\partial (f+g)_j}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial (f_j + g_j)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0),$$

$$\frac{\partial (\lambda f)_j}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial \lambda f_j}{\partial x_i}(x_0) = \lambda \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0),$$

a za $m = 1$ još vrijedi

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) g(x_0) + f(x_0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0),$$

odakle slijedi tvrdnja. $\square$

5.3 Neprekidnost diferencijabilnih funkcija

Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, je lako pokazati da je neprekidna u svakoj točki $c \in I$ u kojoj je derivabilna. Naime, iz jednakosti

$$f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) + f(c)$$

slijedi

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x\to c}(x - c) + \lim_{x\to c} f(c) = f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c).$$

Propozicija 5.1. *Neka je funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ derivabilna na otvorenom skupu $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je f neprekidna na $\mathcal{O}$. Štoviše, za svaki $x_0 \in \mathcal{O}$ postoje konstante $M > 0$ i $\delta > 0$ da za $x \in \mathcal{O}$, $\|x - x_0\| < \delta$ povlači $\|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|$ (Lipschitz[1] neprekidnost u točki).*

Dokaz: U definiciji derivabilnosti (5.3) stavimo $\varepsilon = 1$, $h = x - x_0$ i dobijemo $\delta > 0$ takav da $(\|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow (\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| < \|x - x_0\|)$. Odatle imamo $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f'(x_0)(x - x_0)\| + \|x - x_0\| \leq (\|f'(x_0)\| + 1)\|x - x_0\|$, tj. $M = \|f'(x_0)\| + 1$ je tražena Lipschitzova konstanta. □

5.4 Diferencijabilnost

Pokazali smo u teoremu 5.2 da derivabilna funkcija ima parcijalne derivacije. Obrat, općenito, ne vrijedi.

Primjer 5.3. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ za $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$ nije neprekidna u $(0, 0)$. Naime, po pravcu $y = \lambda x$ imamo $f(x, \lambda x) = \dfrac{\lambda x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda^2}$, pa za $x \to 0$ vrijednosti od $f(x, \lambda x)$ teže prema $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, što ovisi o λ. Dakle, limes funkcije f u 0 ne postoji. Kao takva, po propoziciji 5.1, funkcija f nije diferencijabilna u $(0, 0)$.

S druge strane

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

[1]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (Knigsberg, 14. svibanj 1832. Bonn, 7. listopad 1903), njemački matematičar

i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{h^2} - 0}{h} = 0,$$

tj. postoje obije parcijalne derivacije u $(0,0)$. Dakle, postojanje parcijalnih derivacija u nekoj točki nije dovoljno za derivabilnost funkcije u toj točki.

Teorem 5.4. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$. Neka f ima u svakoj točki skupa $\mathcal{O}$ sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m)$ i neka su one neprekidne funkcije na $\mathcal{O}$. Tada je f derivabilna na $\mathcal{O}$.*

Dokaz: Dovoljno je dokazati slučaj $m = 1$, tj. za funkciju $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Neka je $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ i $G = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)]$. Pokažimo da vrijedi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Gh\|}{\|h\|} = 0. \tag{5.5}$$

Uz oznaku $d_i(t; x, h) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1} + h_{i+1} \ldots, x_n + h_n)$ $(i = 1 \ldots, n)$, po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za funkcije jedne varijable (vidi teorem 5.7 na str. 71) imamo

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(d_i(x_i + h_i; x, h)) - f(d_i(x_i; x, h)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(d_i(c_i; x, h) h_i,$$

gdje su c_i između x_i i $x_i + h_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Odatle slijedi

$$f(x+h) - f(x) - Gh = \sum_{i=1}^{n} ((\frac{\partial f}{\partial x_i}(d_i(c_i; x, h)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)) h_i),$$

što daje

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Gh\|}{\|h\|} \leq \sum_{i=1}^{n} (\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(d_i(c_i; x, h)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| \frac{|h_i|}{\|h\|} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(d_i(c_i; x, h)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\|.$$

Zbog $\lim_{h\to 0} d_i(c_i; x, h) = x$ $(i = 1 \ldots, n)$ i neprekidnosti parcijalnih derivacija u točki x slijedi (5.5). □

5.5 Lančano pravilo

Slijedeći teorem je poopćenje teorema o derivaciji kompozicije funkcija u $\mathbb{R}$.

Teorem 5.5. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $x_0 \in \mathcal{O}$. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren skup, $f(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{U}$, i funkcija $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ diferencijabilna u $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{U}$. Tada je kompozicija $g \circ f$ derivabilna u x_0 i vrijedi*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{5.6}$$

Dokaz: Prema definiciji 5.1 treba provjeriti da vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Ocijenimo brojnik

$$\|(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)h\| \leq$$

$$\|g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x_0 + h) - f(x_0)]\| +$$
$$+\|g'(f(x_0))[f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h]\|.$$

Za po volji zadani $\varepsilon > 0$, zbog neprekidnosti i derivabilnosti funkcija f i g, vrijedi:

$$(\exists \delta_0 > 0)(\exists M > 0)(\|h\| < \delta_0) \Rightarrow (\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < M\|h\|)$$

$$(\exists \delta_1 > 0)(\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < \delta_1) \Rightarrow$$
$$(\|g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x_0+h) - f(x_0)]\| < \frac{\varepsilon}{2M}\|f(x_0+h) - f(x_0)\|)$$

Sada za $\delta_2 = \min\{\delta_0, \frac{\delta_1}{M}\}$ imamo

$$(\|h\| < \delta_2) \Rightarrow \frac{\|g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0))[f(x_0 + h) - f(x_0)]\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za $N = \|g'(f(x_0))\| = \sup\{\|g'(f(x_0))h\|; \|h\| \leq 1\}$, normu operatora $g'(f(x_0))$, vrijedi $\|g'(f(x_0))y\| \leq N\|y\|$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$.

Nadalje

$$(\exists \delta_3 > 0)(\|h\| < \delta_3) \Rightarrow (\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2N}).$$

Sada za $\|h\| < \delta_3$ imamo

$$\frac{\|g'(f(x_0))[f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h]\|}{\|h\|} \leq N\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ imamo

$$\frac{\|(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0) - g'(f(x_0))f'(x_0)h\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Matrični zapis lančanog pravila za funkciju $h = g \circ f$ ima oblik

$$h'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

ili po parcijalnim derivacijama

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x), (i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,p). \tag{5.7}$$

Primjer 5.4. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i neka su (r, φ) polarne koordinate zadane relacijama

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \tag{5.8}$$

Ako je $h(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ onda je

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\cos\varphi.$$

Primjer 5.5. Neka je $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilna parametrizacija krivulje, te neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Ako je $h(t) = f(\gamma(t))$, tada je $h'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Ako je γ parametrizacija pravca u $\mathbb{R}^n$, tj. $\gamma(t) = v_0 + te$, gdje su $v_0, e \in \mathbb{R}^n$, dobijemo $h'(t) = f'(v_0+te)e = (\nabla f(v_0+te)|e)$. Posebno, za $t = 0$ je $h'(0) = (\nabla f(v_0)|e)$, a to nazivamo derivacija funkcije f u smijeru vektora e, u točki v_0.

Primjer 5.6. Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije, te neka vrijedi $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x$, i $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Tada je $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$.

Rješenje: $\square$

5.6 Teoremi srednje vrijednosti

Osnovni teorem srednje vrijednosti za realne funkcije jedne realne varijable je slijedeći rezultat.

Teorem 5.6 (Rolle[1]). *Neka su $a, b \in I$, $a < b$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, te neka je $f(a) = f(b) = 0$. Tada $\exists\, c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.*

Dokaz: Zbog neprekidnosti f poprima na $[a, b]$ minimum i maksimum u točkama c_m i c_M. Ako su obije točke na rubovima segmenta, onda je f konstantna funkcija. Tada je $f'(c) = 0$ za svaku točku $c \in [a, b]$. U suprotnom slučaju je barem jedna točka u $\langle a, b\rangle$, i neka je to točka maksimuma c_M. Tada za $h > 0$ vrijedi $\dfrac{f(c_M + h) - f(c_M)}{h} \leq 0$, pa imamo $f'(c_M) = \lim_{h\to 0+} \dfrac{f(c_M + h) - f(c_M)}{h} \leq 0$. Isto tako, za $h < 0$ vrijedi $\dfrac{f(c_M + h) - f(c_M)}{h} \geq 0$, što daje $f'(c_M) = \displaystyle\lim_{h\to 0-} \frac{f(c_M + h) - f(c_M)}{h} \geq 0$. Dakle, vrijedi $f'(c_M) = 0$. □

Za realnu funkciju realne varijable vrijedi Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

Teorem 5.7 (Lagrange[2]). *Neka su $a, b \in I$, $a < b$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ diferencijabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka . Tada $\exists\, c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Dokaz: Neka je funkcija $g : I \to \mathbb{R}$ zadana s $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Funkcija g je neprekidna na $[a, b]$, diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$ i $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$, a također je $g(a) = g(b) = 0$. Iz teorema 5.6 imamo $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $g'(c) = 0$, tj. odakle slijedi $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Sada ćemo dokazati tzv. Cauchyjev poopćeni teorem srednje vrijednosti za dvije diferencijabilne funkcije.

Teorem 5.8 (Cauchy). *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilne na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka su $a, b \in I$, $a < b$. Tada $\exists\, c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.*

---

[1]Michel Rolle (Ambert, 21. travanj 1652. – Paris, 8. studeni 1719.) francuski matematičar

[2]Joseph Louis Lagrange [Giuseppe Lodovico Lagrangia] (Turin [Sardinija] 25. siječanj 1736.– Paris, 10. travanj 1813. , talijansko-francuski matematičar

Dokaz: Neka je funkcija $h : I \to \mathbb{R}$ zadana formulom $h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$, $\forall x \in I$. Funkcija h je diferencijabilna na I i $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$, $\forall x \in I$. Također je $h(a) = h(b) = 0$, pa h zadovoljava sve uvjete Rolleovog teorema, tj. $\exists\, c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $0 = h'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)-f'(c)(g(b)-g(a))$. □

Slijedi poopćenje Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti za funkcije više varijabli.

Teorem 5.9 (Lagrange)**.** *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ derivabilna na $\mathcal{O}$. Za svake dvije točke $x, y \in \mathcal{O}$ za koje je segment $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{O}$ postoji $c \in [x, y]$ takva da je*

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) = (\nabla f(c)|x - y). \tag{5.9}$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ formulom $h(t) = f((1-t)x+ty)$. Za funkciju h vrijedi teorem 5.7 pa postoji točka $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ takva da je $h'(\theta)(1 - 0) = h(1) - h(0)$, tj. vrijedi $f'(c)(y - x) = f(y) - f(x)$ gdje je $c = (1 - \theta)x + \theta y$. □

Primjer 5.7. Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren povezan skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ derivabilna na $\mathcal{O}$. Ako je $f' = 0$ na $\mathcal{O}$, pokažite da je f konstantna funkcija na $\mathcal{O}$.

Rješenje: Za svaku komponentnu funkciju $f_j : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, i za svaki $[x, y] \subset \mathcal{O}$ postoji $c_j \in [x, y]$ takav da je $f_j(y)-f_j(x) = f'(c_j)(y-x) = 0$. Tada je f_j konstantna funkcija na $\mathcal{O}$ za sve $j = 1, \ldots, m$, pa je f konstantna na $\mathcal{O}$. □

5.7 Parcijalne derivacije višeg reda i Taylorov teorem srednje vrijednosti

Definicija 5.3. Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Neka na $\mathcal{O}$ postoje $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve $j = 1, \ldots, n$ i neka one imaju sve parcijalne derivacije, tj. neka postoje funkcije $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Tada njih nazivamo parcijalnim derivacijama 2. reda ili 2. parcijalnim derivacijama funkcije f i označavamo s $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$.

Na ovaj način možemo za bilo koji $p \in \mathbb{N}$ rekurzivno definirati $p+1$-parcijalnu derivaciju kao

$$\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_{i_{p+1}} \partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdots \partial x_{i_1}} \right).$$

Matricu drugih parcijalnih derivacija funkcije $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ oblika

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

nazivamo Hesseovom[1] matricom funkcije f u točki x.

Teorem 5.10 (Schwarz[2] - Clairaut[3])**.** *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ takva da postoje $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$, te neka su neprekidne u točki $x_0 \in \mathcal{O}$.*

Tada je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Dakle, Hesseova matrica $H(x_0)$ je simetrična.

Dokaz: Zbog jednostavnosti, dovoljno je provjeriti samo za $n = 2$. Neka je $(x_0, y_0) \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$. Iz definicije slijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{1}{hk} \left[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \Delta(h, k).$$

Analogno se pokazuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \Delta(h, k).$$

[1] Ludwig Otto Hesse (Königsberg, 22. travanj 1811. – München, 4. kolovoz 1874.) njemački matematičar

[2] Karl Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf, 25. siječanj 1843. Berlin, 30. studeni 1921.) njemački matematičar

[3] Alexis Claude de Clairaut (Paris, 3. svibanj 1713. Paris, 17. svibanj 1765.) francuski matematičar

Definirajmo funkcije

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \text{ i } \psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

Prema pretpostavci, one su klase $C^{(1)}(\mathcal{O})$ i vrijedi

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) \text{ i } \psi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y).$$

Iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti za funkcije φ i ψ vidimo da postoje c_h, c_h' između x_0 i $x_0 + h$, te d_k, d_k' između y_0 i $y_0 + k$, tako da vrijedi

$$\Delta(h,k) = \frac{1}{hk}[\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)] = \frac{1}{k}\varphi'(c_h) =$$

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c_h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_h, y_0)\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_h, d_k).$$

Analogno dobijemo

$$\Delta(h,k) = \frac{1}{hk}[\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)] = \frac{1}{h}\psi'(d_k') =$$

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, d_k') - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, d_k')\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_h', d_k').$$

Sada zbog $\lim\limits_{h\to 0} c_h = \lim\limits_{h\to 0} c_h' = x_0$, $\lim\limits_{k\to 0} d_k = \lim\limits_{h\to 0} d_k' = y_0$ neprekidnosti drugih parcijalnih derivacija imamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_h, d_k) =$$

$$= \lim_{(c_h,d_k)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_h, d_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

i

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_h', d_k') =$$

$$= \lim_{(c_h',d_k')\to(x_0,y_0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_h', d_k') = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

□

Primjer 5.8. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pokažite da postoje $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, ali su one različite.

Rješenje: Po definiciji je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

Također je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Sada je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-k^5}{k^4} - 0}{k} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1.$$

Razlog što su u nuli druge parcijalne derivacije različite je što nisu neprekidne u nuli. Može se izračunati da je $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(h,0) = 1$ za $h \neq 0$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,k) = 0$ za $k \neq 0$, pa limes u $(0,0)$ ne postoji. $\square$

Definicija 5.4. Za funkciju funkciju $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, kažemo da je klase $C^{(r)}(\mathcal{O})$ ako na $\mathcal{O}$ njene komponentne funkcije imaju neprekidne sve parcijalne derivacije r-tog reda.

Teorem 5.11 (Taylor[1])**.** *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, neka $f : I \to \mathbb{R}$, ima derivaciju $n+1$-vog reda na I i neka je $c \in I$. Tada $\forall x \in I$, $\exists c_x$ između c i x, tako da je*

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \tag{5.10}$$

Dokaz: Za čvrsto $x \in I$, $x \neq c$, definirajmo funkcije $F, G : I \to \mathbb{R}$ formulama

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad G(t) = (x-t)^{n+1}$$

Funkcije F i G su derivabilne na I i vrijedi

$$F'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right] =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \text{ i } G'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Iz Cauchyjevog teorema srednje vrijednosti (teorem 5.8) zaključujemo da $\exists c_x$ strogo između c i x takav da vrijedi $\dfrac{F'(c_x)}{G'(c_x)} = \dfrac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)}$.

To povlači da je $F(x) = F(c) + F'(c_x)\dfrac{G(x) - G(c)}{G'(c_x)}$, što zbog

$$F(x) = f(x), \quad F(c) = f(c) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \quad \text{i} \quad F'(c_x)\frac{G(x) - G(c)}{G'(c_x)} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n!}(x-c_x)^n \frac{-(x-c)^{n+1}}{-(n+1)(x-c_x)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

daje (5.10). □

Definicija 5.5. Neka je funkcija $f \in C^\infty(\langle c-r, c+r \rangle)$. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{5.11}$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f oko točke c. Taylorovi polinomi $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ su parcijalne sume Taylorovog reda.

[1] Brook Taylor (Edmonton, 18. kolovoz 1685.– London, 30. studeni 1731.) engleski matematičar

Primjer 5.9. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ i $f : I \to \mathbb{R}$ klase $C^\infty(I)$. Ako postoje $\delta > 0$, $C > 0$ i $M > 0$ takvi da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq CM^n, \quad \forall x \in I' = \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{5.12}$$

onda red (5.11) konvergira k $f(x)$, $\forall x \in I'$, tj. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$.

Rješenje: Vrijedi

$$|f(x) - T_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \leq C\frac{(M|x-c|)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Zadatak 5.1. Funkcija $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ za } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ za } x = 0 \end{cases}$ je klase $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, ali njen Taylorov red oko 0 ne konvergira k funkciji.

Rješenje: Vrijedi $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. To slijedi iz $\displaystyle\lim_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, za svaki polinom P. Upravo su toga oblika i limesi pomoću kojih se računa derivacija $f^{(n)}(0)$. Dakle, Taylorov red svugdje konvergira k 0, a funkcija očito nije takva.

Pomoću prve derivacije $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ za } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ za } x = 0 \end{cases}$ se vidi da f ima u točki 0 strogi lokalni minimum (nacrtaj graf). □

Navodimo poopćenje Taylorovog teorema srednje vrijednosti za funkcije više varijabli.

Teorem 5.12 (Taylor)**.** *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i funkcija $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ klase $C^{(r+1)}(\mathcal{O})$. Neka su $x, y \in \mathcal{O}$ takve da je $[x, y] \subseteq \mathcal{O}$. Tada postoji $c \in [x, y]$ tako da vrijedi*

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)(y_{i_1} - x_{i_1})\cdots(y_{i_k} - x_{i_k}) +$$
$$\frac{1}{(r+1)!} \sum_{1\leq i_1,\dots,i_{r+1}\leq n} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{r+1}}}(c)(y_{i_1} - x_{i_1})\cdots(y_{i_{r+1}} - x_{i_{r+1}}). \tag{5.13}$$

Dokaz: Neka je funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zadana s $\varphi(t) = x + t(y-x)$, $t \in \mathbb{R}$. Zbog $x, y \in \mathcal{O}$ i otvorenosti skupa $\mathcal{O}$ postoji otvoreni interval $I \subset \mathbb{R}$ takav da je $[0, 1] \subset I$ i $\varphi(I) \subseteq \mathcal{O}$, pa je funkcija $g = f \circ \varphi$ klase $C^{(r+1)}(I)$, te vrijedi

$g(0) = f(x)$ i $g(1) = f(y)$. Primijenimo li Taylorov teorem 5.11 na funkciju g na segmentu $[0,1] \subset I$ dobijemo $c \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(r+1)}(c)}{(n+1)!}. \tag{5.14}$$

Izračunajmo $g^{(k)}(t)$, $t \in [0,1]$, za $g = f \circ \varphi$. Iz lančanog pravila (5.7) imamo

$$g'(t) = (f \circ \varphi)'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t))(y_k - x_k).$$

Za drugu derivaciju imamo

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(t)) \right)' (y_k - x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(\varphi(t))(y_l - x_l) \right) (y_k - x_k) = \\ &= \sum_{1 \le k,l \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(\varphi(t))(y_l - x_l)(y_k - x_k). \end{aligned}$$

Na taj način dobijemo za sve $k = 1, \ldots, r+1$ derivacije funkcije g oblika

$$g^{(k)}(t) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\varphi(t))(y_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (y_{i_k} - x_{i_k}). \tag{5.15}$$

Sada uvrštavanjem (5.15) u (5.14) dobijemo (5.13). □

Primjer 5.10. Izračunati Taylorovu formulu reda 2 funkcije $f(x,y) = \cos(x + 2y)$ u točki $(0,0)$. Imamo:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\sin(x+2y) &\Rightarrow \quad &\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2\sin(x+2y) &\Rightarrow \quad &\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\cos(x+2y) &\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -4\cos(x+2y) &\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -2\cos(x+2y) &\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2 \end{aligned}$$

Dakle, $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2 + R_2$.

5.8 Teorem o inverznoj i implicitno zadanoj funkciji

Iz linearne algebre znamo da sustav od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica oblika

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ili $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica sustava $A = [a_{ij}]$ regularna, tj. $\det A \neq 0$. Isto pitanje o rješivosti ima smisla i u slučaju sustava od n nelinearnih jednadžbi s n nepoznanica oblika

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= b_n \end{aligned}$$

ili $f(x) = b$, gdje je $x = (x_1, \dots, x_n)^\tau$, $b = (b_1, \dots, b_n)^\tau \in \mathbb{R}^n$ i $f = (f_1, \dots, f_n)^\tau$. Ovdje ulogu determinate sustava lokalno oko točke x ima jacobijan funkcije f u toki x, tj. determinanta Jacobijeve matrice

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Teorem 5.13 (o inverznoj funkciji)**.** *Neka je $\mathcal{O}$ otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija klase $C^1(\mathcal{O})$. Pretpostavimo da je $x_0 \in \mathcal{O}$ točka u kojoj je $f'(x_0)$ invertibilna. Tada postoje otvorene okoline $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ od x_0 i $\mathcal{V}$ od $y_0 = f(x_0)$ takve da je $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ bijekcija. Nadalje, inverzna funkcija $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je diferencijabilna klase $C^1(\mathcal{V})$, s derivacijom $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$.*

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti $x_0 = y_0 = 0$, inače zamijenimo f s $f(x + x_0) - y_0$. Nadalje, možemo pretpostaviti $f'(0) = I$, inače zamijenimo f s $f'(0)^{-1} \circ f$ (što je samo linearna promjena koordinata u kodomeni R^n).

Prisjetimo se da za funkcija f diferencijabilnost u točki $x \in \mathcal{O}$ znači postojanje linearnog operatora $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tako da vrijedi

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + e(h), \tag{5.16}$$

gdje $\dfrac{\|e(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Ograničimo pozornost na zatvorenu kuglu $D = \{x \in R^n : \|x\| \leq \delta\}$, gdje je $\delta > 0$ izabran dovoljno malen da bi vrijedilo $D \subset \mathcal{O}$ i $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2}$ za sve $x \in D$ (moguće jer je f klase $C^1(\mathcal{O})$). Stavimo $w(x) = f(x) - x$, a onda je $w'(x) = f'(x) - I$, pa imamo $\|w(x+h) - w(x)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$. Za funkciju f ovo daje

$$\|f(x+h) - f(x) - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|. \tag{5.17}$$

Uzmimo otvorenu kuglu $\mathcal{V} = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y\| < \frac{1}{2}\delta$. Pokažimo da za bilo koji $y \in \mathcal{V}$ postoji jedinstven $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Tada možemo definirati funkciju $g(y) = x$.

Zadajmo $u : D \to D$ sa $u(x) = x + (y - f(x))$. Tada je $f(x) = y$ ako i samo ako je x fiksna točka od u, tj. $u(x) = x$. Provjerimo da $u(x)$ leži u D. Ako stavimo $x = 0$ u (5.17), dobivamo $\|f(h) - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\| < \frac{1}{2}\delta$ za bilo koji $h \in D$. Zamjenom h s x i koristeći nejednakost trokuta dobijemo da

$$\|u(x)\| \leq \|y\| + \|f(x) - x\| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta. \tag{5.18}$$

Provjerimo da je u kontrakcija (a time automatski i neprekidna). Iz definicije funkcije u imamo

$$u(x+h) - u(x) = -f(x+h) + f(x) + h.$$

Zatim iz (5.17) imamo,

$$\|u(x+h) - u(x)\| = \|f(x+h) - f(x) - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|,$$

što pokazuje da je u kontrakcija s konstantom $\leq \frac{1}{2}$. Uzeli smo D zatvorenu kuglu kako bi to bio potpun metrički prostor. Teorem o fiksnoj točki daje jedinstvenu fiksnu točku x od u, koja je iz D. U stvari, iz (5.18) vidimo da je $x = u(x)$ unutrašnja točka od D.

Uzmimo otvoreni skup $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V}) \cap \operatorname{int} D$. Da bi pokazali neprekidnost od g, uzmimo bilo koje dvije točke $y, y + k \in \mathcal{V}$ i stavimo $x = g(y)$ i $x + h = g(y + k)$. Tada (5.17) daje $\|k - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$. Pomoću nejednakosti trokuta imamo, $\|h\| \leq \|h - k\| + \|k\| \leq \frac{1}{2}\|h\| + \|k\|$. Odatle je $\frac{1}{2}\|h\| \leq \|k\|$ ili jednostavnije,

$$\|h\| \leq 2\|k\|. \tag{5.19}$$

Možemo osigurati da je $\|h\| < \varepsilon$ jednostavno uzimanjem $\|k\| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Što se tiče diferencijabilnosti od g, za linearan operator $f'(x)$ iz (5.16) imamo

$$y + k = y + f'(x)[g(y+k) - g(y)] + e(h). \tag{5.20}$$

Sada je $\|f'(x)h - h\| = \|(f'(x) - I)h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$, odakle je jasno da $f'(x)$ ima trivijalnu jezgru, te je stoga invertibilan. Primijenimo $f'(x)^{-1}$ na jednakost (5.20) i dobijemo

$$g(y + k) = g(y) + f'(x)^{-1}k - f'(x)^{-1}e(h). \tag{5.21}$$

Uz pomoć (5.19), vidimo da vrijedi

$$\frac{\|f'(x)^{-1}e(h)\|}{\|k\|} \leq \|f'(x)^{-1}\|\frac{\|e(h)\|\|h\|}{\|h\|\|k\|} \leq 2\|f'(x)^{-1}\|\frac{\|e(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{k\to 0} 0.$$

Odatle slijedi da je g diferencijabilna u y s derivacijom $g'(y) = f'(x)^{-1}$. Konačno, iz formule (5.21) za $g'(y)$ slijedi neprekidnost u y. Naime, zbog $\|f'(x) - I\| \leq \frac{1}{2}$ imamo

$$\|f'(x)^{-1}\| \leq \|f'(x)^{-1} - I\| + 1 \leq \|f'(x)^{-1}\|\|f'(x) - I\| + 1 \leq \frac{1}{2}\|f'(x)^{-1}\| + 1,$$

tj. $\|f'(x)^{-1}\| \leq 2$ za $x \in D$. Sada za $u, v \in D$ imamo

$$\|f'(u)^{-1} - f'(v)^{-1}\| \leq \|f'(v)^{-1}\|\|f'(u) - f'(v)\|\|f'(u)^{-1}\| \leq 4\|f'(u) - f'(v)\|,$$

što pokazuje da neprekidnost f' povlači neprekidnost od g' na $\mathcal{V}$. □

Primjer 5.11. Promotrimo funkciju $f : \langle 0, +\infty\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $f(x, y) = (xy^2, x^y)$, $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$.

Iz teorema o inverznoj funkciji f je lokalno invertibilna oko točke u kojoj je njena derivacija invertibilna.

Uzmimo točku $x = (1, 2)$. tada je $f'(1, 2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana Jakobijevom matricom

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix}$$

gdje je

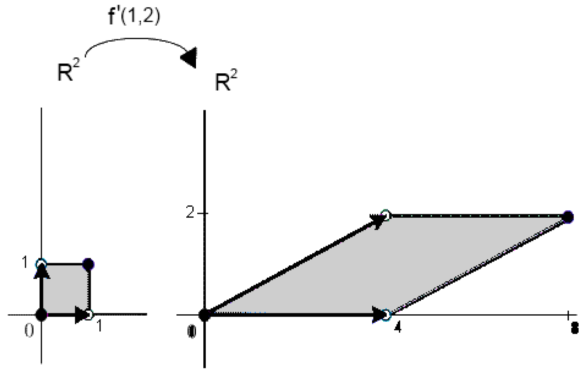
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= xy^2 \\ f_2(x, y) &= x^y. \end{aligned}$$

Odatle imamo

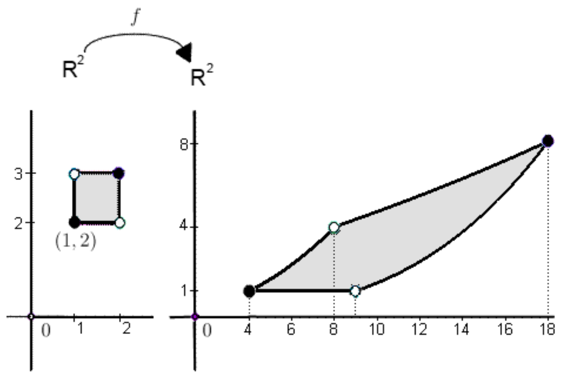
$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &=& y^2 & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &=& 2xy \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &=& yx^{y-1} & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &=& x^y \ln x \end{array}$$

pa je

$$f'(1,2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+4y \\ 2x \end{bmatrix}.$$



Pošto je $\det(f'(1,2)) = -8$, to je f lokalno oko točke $(1,2)$ invertibilna funkcija.
Na prvoj slici desno vidimo kako linearan operator $f'(1,2)$ preslikava jedinični kvadrat.
Na drugoj slici se vidi kako to radi nelinearna funkcija f u okolini točke $(1,2)$.



Primjer 5.12. Invertibilnost transformacije iz polarnih u kartezijeve koordinate.

Promotrimo transformaciju koja veže polarne koordinate s kartezijevim koordinatama $\varphi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Vrijedi

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(r,\theta) &=& r\cos\theta \\ \varphi_2(r,\theta) &=& r\sin\theta \end{array}$$

Odatle dobijemo

$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,\theta) &=& \cos\theta, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(r,\theta) &=& -r\sin\theta, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,\theta) &=& \sin\theta, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(r,\theta) &=& r\cos\theta. \end{array}$$

Imamo derivaciju $\varphi'(r,\theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiranu s

$$\varphi'(r,\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Zbog
$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r,$$
$\varphi'(r,\theta)$ je invertibilno na $\langle 0, +\infty\rangle \times [0, 2\pi\rangle$, te je φ lokalno invertibilna u svim točkama tog skupa.

Primjer 5.13. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ zadana s $f(x,y) = (e^x\cos y, e^x\sin y)$. Pokažimo da je $J_f(x,y) \neq 0$ za svaki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ali funkcija nije invertibilna.

Rješenje: Lako se izračuna
$$J_f(x,y) = \begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix} = e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = e^{2x} \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

S druge strane vrijedi $f(x, y + 2k\pi) = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, pa f nije invertibilna jer nije injekcija. $\square$

***Napomena* 5.2.** Za funkciju $f : I \to J$, gdje su $I, J \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali, vrijedi da $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, povlači injektivnost funkcije. Naime, tada je $f'(x) > 0$ ili $f'(x) < 0$ na I, pa je funkcija strogo monotona na I.

Teorem 5.14 (o implicitnoj funkciji)**.** *Neka je $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otvoren skup i $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^m$ funkcija klase $C^{(p)}(\mathcal{A})$, $p \geq 1$. Neka je $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}$ takva da vrijedi $F(x_0, y_0) = 0$ i*
$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}((x_0,y_0)) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}((x_0,y_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}((x_0,y_0)) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}((x_0,y_0)) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada postoje otvorene okoline $x_0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ i jedinstvena funkcija $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takva da je $F(x, f(x)) = 0$ za sve $x \in \mathcal{U}$ i $y_0 = f(x_0)$. Štoviše, f je klase $C^{(p)}(\mathcal{U})$ i vrijedi $f'(x_0) = -\partial_y F(x_0,y_0)^{-1}\partial_x F(x_0,y_0)$, odnosno
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} =$$
$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Definirajmo funkciju $G : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sa $G(x, y) = (x, F(x, y))$. Funkcija G je klase $C^{(p)}(\mathcal{A})$ i njena Jacobijeva matrica u (x_0, y_0) je

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \partial_x F(x_0, y_0) & \partial_y F(x_0, y_0) \end{bmatrix},$$

a njena determinanta

$$J_G(x_0, y_0) = \det(\partial_y F(x_0, y_0)).$$

Po pretpostavci je $J_G(x_0, y_0) = d \neq 0$, pa po teoremu 5.13 (o inverznoj funkciji) postoji otvorena okolina $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ koja sadrži točku $(x_0, 0) = G(x_0, y_0)$ i otvoren skup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ koji sadrži (x_0, y_0) tako da je $G(\mathcal{S}) = \mathcal{W}$ i G ima inverznu funkciju $G^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{S}$ koja je klase $C^{(p)}(\mathcal{W})$. Označimo skup $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^n; (x, 0) \in \mathcal{W}\} = \pi_1((\mathbb{R}^n \times \{0\}) \cap \mathcal{W})$, gdje je $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\pi_1(x, y) = x$, kanonska projekcija. $\mathcal{U}$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ (vidi zadatak 3.2). Primijetimo da za zadano $x \in U$ imamo $(x, 0) \in \mathcal{W}$ takav da je $(x, 0) = G(x_1, y_1)$, gdje je $(x_1, y_1) \in \mathcal{S}$ jedinstveno određen s x. U stvari, zbog oblika funkcije G vrijedi $x_1 = x$. Definirajmo funkciju $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ tako da je $y_1 = f(x)$. Stoga je $(x, 0) = G(x, f(x))$, tj. $f(x) = \pi_2 \circ G^{-1}(x, 0)$, $\forall x \in \mathcal{U}$, gdje je $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\pi_2(x, y) = y$, kanonska projekcija. Tada je $\{(x, y) \in \mathcal{S}; F(x, y) = 0\} = \{\{(x, y) \in \mathcal{S}; G(x, y) = (x, 0)\} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{U}\}$. Pošto je π linearan operator i G^{-1} klase $C^{(p)}(\mathcal{W})$, to je i f klase $C^{(p)}(\mathcal{U})$. Formula za f' slijedi deriviranjem jednakost $F(x, f(x)) = 0$, za sve $x \in U$, pomoću lančanog pravila. □

Primjer 5.14. Jedna jednostavna primjena u vezi običnih diferencijalnih jednadžbi. Za diferencijalnu jednadžbu

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

s neprekidnom funkcijom f oblika $f(t, x) := -\frac{\partial_t g(t,x)}{\partial_x g(t,x)}$, za neku funkciju g klase $C^{(1)}$ takvom da je $\partial_x g(t, x) \neq 0$, postoji jedno-parametarska familija rješenja čiji grafovi su nivo skupovi od g. To je često korištena metoda rješavanja, ali je teorem o implicitnoj funkciji taj koji osigurava da su ta rješenja doista dobro definirane funkcije, implicitno definirane s $g(t, u(t)) = c$. Usput, treba imati na umu da je to slučaj gdje vrijedi jedinstvenost za Cauchy problem, čak i ako Lipschitzov uvjet za f nije ispunjen.

6 Riemannov integral

6.1 Konstrukcija Riemannovog[1] integrala u $\mathbb{R}$

Za početak neka je $[a, b]$, $a < b$, segment u $\mathbb{R}$ i neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a, b]$. To znači da postoje $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ i $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, tj. $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Uočimo, ako je $[a', b'] \subseteq [a, b]$ podsegment, onda vrijedi $\forall x \in [a', b']$, $m \leq m' \leq f(x) \leq M' \leq M$, gdje je $m' = \inf\limits_{[a',b']} f$ i $M' = \sup\limits_{[a',b']} f$. Dakle, infimum na podsegmentu je veći ili jednak infimumu na segmentu i supremum na podsegmentu je manji ili jednak supremumu na segmentu.

Sada ćemo provesti konstrukciju koju smo najavili u prethodnoj točki. Za $n \in \mathbb{N}$ podijelimo (izvršimo subdiviziju) segment $[a, b]$ točkama

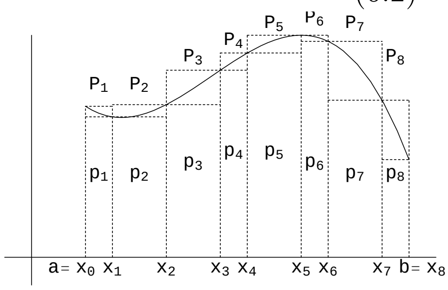
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{6.1}$$

na n dijelova. Neka je $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$ i $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$, $(k = 1, \ldots, n)$. Za po volji izabrane točke $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, \ldots, n)$, definirajmo sume:

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\ \sigma = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}),\ S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{6.2}$$

Broj s zovemo *donja Darbouxova suma*, S je *gornja Darbouxova suma*, a σ je *integralna suma*. Jasno je da vrijedi

$$m(b - a) \leq s \leq \sigma \leq S \leq M(b - a). \tag{6.3}$$



[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 17. studeni 1826. – Selasca[Italija], 20. srpanj 1866.) njemački matematičar

Neka je A skup svih donjih Darbouxovih[1] suma s, B je skup svih gornjih Darbouxovih suma S, a C je skup svih integralnih suma σ funkcije f na segmentu $[a,b]$. Sve te sume dobiju se variranjem broja $n \in \mathbb{N}$, svim različitim izborima subdivizije (6.1) i točaka t_k. Iz nejednakosti (6.3) slijedi da su skupovi A, B i C ograničeni odozdo s $m(b-a)$ i odozgo s $M(b-a)$. Prema aksiomu potpunosti postoje

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) = \sup A,\ \mathcal{I}^*(f;a,b) = \inf B. \tag{6.4}$$

Definicija 6.1. Broj $\mathcal{I}_*$ zovemo **donji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a,b]$, a broj $\mathcal{I}^*$ zovemo **gornji Riemannov integral** funkcije f na segmentu $[a,b]$.

Iz prethodnog je jasno da donji i gornji Riemannov integral postoje za svaku funkciju $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ koja je ograničena na segmentu $[a,b]$.

Teorem 6.1. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na segmentu $[a,b]$, neka su $\mathcal{I}_*$ i $\mathcal{I}^*$ donji i gornji Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$. Tada je*

$$\mathcal{I}_*(f;a,b) \le \mathcal{I}^*(f;a,b). \tag{6.5}$$

Dokaz: Dokaz provodimo u tri dijela.

Prvo pokažimo da se donja Darbouxova suma poveća ili ostane jednaka, a gornja Darbouxova suma se smanji ili ostane jednaka ako subdiviziji dodamo jednu točku. Dakle, neka je sa $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ zadana subdivizija Σ i neka su s i S pripadne Darbouxove sume. Napravimo novu subdiviziju Σ' tako da subdiviziji Σ dodamo točku x' takvu da je $x_{k-1} < x' < x_k$. Pripadne Darbouxove sume označimo s s' i S'. Suma S' nastaje iz S tako da pribrojnik $M_k(x_k - x_{k-1})$ zamijenimo s $M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x')$, gdje je $M_k' = \sup\limits_{[x_{k-1},x']} f$ i $M_k'' = \sup\limits_{[x',x_k]} f$. Budući da su $[x_{k-1}, x']$ i $[x', x_k]$ podsegmenti od $[x_{k-1}, x_k]$, to vrijedi $M_k' \le M_k$ i $M_k'' \le M_k$. Tada je $M_k'(x' - x_{k-1}) + M_k''(x_k - x') \le M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') = M_k(x_k - x_{k-1})$, pa je stoga $S' \le S$. Analogno, za $m_k' = \inf\limits_{[x_{k-1},x']} f$ i $m_k'' = \inf\limits_{[x',x_k]} f$ vrijedi $m_k' \ge m_k$ i $m_k'' \ge m_k$, a odatle $m_k'(x' - x_{k-1}) + m_k''(x_k - x') \ge m_k(x' - x_{k-1}) + m_k(x_k - x') = m_k(x_k - x_{k-1})$, tj. $s' \ge s$.

Primijetimo sada da isti zaključak vrijedi ako nekoj subdiviziji dodamo konačan broj novih točaka. Naime, možemo zamisliti da te točke dodajemo jednu po jednu pa svaki put vrijedi zaključak iz prethodnog razmatranja.

[1]Jean Gaston Darboux (Nmes, 14. kolovoz 1842. - Paris, 23. veljača 1917.) francuski matematičar

To znači da se donja Darbouxova suma s' na novoj subdiviziji ne smanji, tj. $s \leq s'$, a gornja ne poveća, tj. $S' \leq S$.

Sada pokazujemo da je svaka donja Darbouxova suma manja ili jednaka svakoj gornjoj Darbouxovoj sumi, bez obzira na subdivizije na kojima su nastale. Dakle, neka su Σ_1 i Σ_2 dvije subdivizije i neka je s_1 donja Darbouxova suma određena subdivizijom Σ_1 i S_2 gornja Darbouxova suma određena subdivizijom Σ_2. Napravimo sada novu subdiviziju Σ_3 od unije točaka iz subdivizija Σ_1 i Σ_2 i označimo pripadne Darbouxove sume sa s_3 i S_3. Dakako, Σ_3 je nastala iz Σ_1 dodavanjem (konačno) točaka iz Σ_2 ali također i iz Σ_2 dodavanjem (konačno) točaka iz Σ_1. Iz prethodnog zaključka slijedi $s_1 \leq s_3$ i $S_3 \leq S_2$. Pošto vrijedi $s_3 \leq S_3$, jer su obje Darbouxove sume na istoj subdiviziji Σ_3, imamo $s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2$.

Dakle, dokazali smo $(\forall s \in A)$ $(\forall S \in B)$ $, s \leq S$. Odatle zaključujemo $(\forall s \in A)$ $s \leq \inf B$, a odatle $\sup A \leq \inf B$, tj. $\mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^*$. $\square$

Definicija 6.2. Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničenu na segmentu $[a, b]$ kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili R-integrabilna na segmentu $[a, b]$ ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b). \tag{6.6}$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva **integral** ili R-integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava jednom od slijedećih oznaka

$$\mathcal{I} = \int\limits_{[a,b]} f(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_a^b f. \tag{6.7}$$

6.2 Konstrukcija Riemannovog integrala u $\mathbb{R}^n$

Sada ćemo po analogiji sa slučajem iz prethodne točke napraviti konstrukciju integrala u $\mathbb{R}^n$.

Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ i $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na A. Neka su $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ i neka je

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

takav da vrijedi $A \subseteq K$. Pretpostavimo da je $f : K \to \mathbb{R}$ proširenje od $\tilde{f}$ na K pomoću nulfunkcije, tj. $f(x) = 0$, $\forall x \in K \setminus A$.

Neka su

$$a_j = x_j^{(0)} < x_j^{(1)} < \cdots < x_j^{(p_j)} = b_j \ \ (j = 1, \ldots, n). \tag{6.8}$$

podjele ili subdivizije segmenata $[a_j, b_j]$, $(j = 1, \dots, n)$. Subdivizija je ekvidistantna, ako su svi segmenti podijeljeni na jednake dijelove, tj. $x_j^{(k)} = a_j + k\frac{b_j - a_j}{p_j}$, $k = 0, 1, \dots, p_j$ $(j = 1, \dots, n)$

Skup K podijelimo na $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ dijelova oblika

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n} = [x_1^{(i_1-1)}, x_1^{(i_1)}] \times [x_2^{(i_2-1)}, x_2^{(i_2)}] \times \dots \times [x_n^{(i_n-1)}, x_n^{(i_n)}],$$

za $1 \le i_j \le p_j$, $(j = 1, \dots, n)$. Volumen takvih kvadara je

$$\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}) = (x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)})(x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)}) \cdots (x_n^{(i_n)} - x_n^{(i_n-1)}).$$

Nadalje, postoje brojevi

$$\begin{aligned} m_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \inf\{f(x); x \in K_{i_1 i_2 \dots i_n}\}, \\ M_{i_1 i_2 \dots i_n} &= \sup\{f(x); x \in K_{i_1 i_2 \dots i_n}\}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Pomoću njih definiramo gornju s i donju S Darbouxovu sumu, te Riemannovu integralnu sumu σ

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} m_{i_1 i_2 \dots i_n} \nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}), \\ S(f, P) &= \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} M_{i_1 i_2 \dots i_n} \nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}), \\ \sigma(f, P) &= \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} f(t^{(i_1 i_2 \dots i_n)}) \nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}), \end{aligned} \tag{6.10}$$

gdje je s P označena podjela (subdivizija) pravokutnika K zadana s (6.8) i $t^{(i_1 i_2 \dots i_n)} = (t_1^{(i_1)}, t_2^{(i_2)} \dots, t_n^{(i_n)}) \in K_{i_1 i_2 \dots i_n})$, i.e. $t_j^{(i_j)} \in [x_j^{(i_j-1)}, x_j^{(i_j)}]$za $1 \le i_j \le p_j$, $(j = 1, \dots, n)$. Skup svih subdivizija od K označimo s $\mathcal{S}(K)$. Duljina najveće stranice svih kvadara koji su zadani subdivizijom P je

$$d(P) = \max\{x_j^{(i_j)} - x_j^{(i_j-1)}; 1 \le i_j \le p_j, (j = 1, \dots, n)\}. \tag{6.11}$$

Primijetimo da vrijedi

$$m\nu(K) \le s(f, P) \le \sigma(f, P) \le S(f, P) \le M\nu(K), \tag{6.12}$$

gdje je $m = \min_K f$ i $M = \max_K f$.

Lema 6.1. *Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija na K i $M = \sup_K |f|$. Neka su $s(f, P)$, $S(f, P)$, $s(f, P')$ i $S(f, P')$ donje i gornje Darbouxove sume* *na različitim podjelama P i P' skupa K, gdje je P' nastala iz P dodavanjem r točaka subdiviziji P. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} s(f,P) \leq s(f,P') \leq s(f,P) + 2Mrd(P)^n \\ S(f,P) \geq S(f,P') \geq S(f,P) - 2Mrd(P)^n. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Dokaz: Prvo dokažimo da nejednakost (6.13) vrijedi ako je podjela P' nastala iz P dodavanjem samo jedne točke i neka je to točka x' za koju je $x_k^{(i_k-1)} < x' < x_k^{(i_k)}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $1 \leq i_k \leq p_k$. Tada je $K_{i_1 i_2 \dots i_n} = K' \cup K''$, gdje u K' umjesto segmenta $[x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}]$ imamo $[x_k^{(i_k-1)}, x']$, a u K'' umjesto $[x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}]$ imamo $[x', x_k^{(i_k)}]$. Vrijedi $\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \nu(K') + \nu(K'')$. Sada uz oznake $m' = \inf\{f(x); x \in K'\}$, $m'' = \inf\{f(x); x \in K''\}$, $M' = \sup\{f(x); x \in K'\}$ i $M'' = \sup\{f(x); x \in K''\}$ i pošto su ostali sumandi u definiciji Darbouxovih suma (6.10) nepromijenjeni, vrijedi

$$0 \leq s(f,P') - s(f,P) = m'\nu(K') + m''\nu(K'') - m_{i_1 i_2 \dots i_n}\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}) =$$

$$= (m' - m_{i_1 i_2 \dots i_n})\nu(K') + (m'' - m_{i_1 i_2 \dots i_n})\nu(K'') \leq 2M\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n})$$

i

$$0 \leq S(f,P) - S(f,P') = M_{i_1 i_2 \dots i_n}\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n}) - M'\nu(K') - m''\nu(K'') =$$

$$= (M_{i_1 i_2 \dots i_n} - M')\nu(K') + (M_{i_1 i_2 \dots i_n} - M'')\nu(K'') \leq 2M\nu(K_{i_1 i_2 \dots i_n})$$

To daje nejednakosti (6.13) za $r = 1$.

Sada dodavanjem konačno mnogo točaka (jednu po jednu) dobijemo subdivizije $P_0 = P, P_1, \dots, P_r = P'$ za koje imamo

$$\begin{aligned} s(f,P_{k-1}) \leq s(f,P_k) \leq s(f,P_{k-1}) + 2Md(P)^n \\ S(f,P_{k-1}) \geq S(f,P_k) \geq S(f,P_{k-1}) - 2Md(P)^n \end{aligned}$$

za $k = 1, \dots r$, odakle slijede nejednakosti (6.13). □

Označimo s $\mathcal{D} = \{s(f,P); P \in \mathcal{S}(K)\}$ i $\mathcal{G} = \{S(f,P); P \in \mathcal{S}(K)\}$, pa iz (6.12) slijedi da su skupovi $\mathcal{D}$ i $\mathcal{G}$ ograničeni u $\mathbb{R}$, te postoje brojevi

$$\mathcal{I}_*(f,A) = \sup \mathcal{D}, \;\; \mathcal{I}^*(f,A) = \inf \mathcal{G} \tag{6.14}$$

i nazivamo ih donji i gornji Riemannov integral funkcije f na skupu A. Pri tome njihova vrijednost je jednaka za svaki K takav da je $A \subseteq K$ jer se Darbouxove sume ne mijenjaju.

Teorem 6.2. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija ograničena na A, neka su $\mathcal{I}_*(f,A)$ i $\mathcal{I}^*(f,A)$ donji i gornji Riemannov integral funkcije f na skupu A.*

Tada je

$$\mathcal{I}_*(f,A) \leq \mathcal{I}^*(f,A). \tag{6.15}$$

Dokaz: Pokazujemo da je svaka donja Darbouxova suma manja ili jednaka svakoj gornjoj Darbouxovoj sumi, bez obzira na subdivizije na kojima su nastale. Dakle, neka su P_1 i P_2 dvije subdivizije i neka je $s(f,K)$ donja Darbouxova suma određena subdivizijom P_1 i $S(f,P_2)$ gornja Darbouxova suma određena subdivizijom P_2. Napravimo sada novu subdiviziju P_3 od unije točaka iz subdivizija P_1 i P_2. Dakako, P_3 je nastala iz P_1 dodavanjem (konačno) točaka iz P_2 ali također i iz P_2 dodavanjem (konačno) točaka iz P_1. Iz leme 6.1 slijedi $s(f,P_1) \leq s(f,P_3)$ i $S(f,P_3) \leq S(f,P_2)$. Pošto prema (6.12) vrijedi $s(f,P_3) \leq S(f,P_3)$, jer su obje Darbouxove sume na istoj subdiviziji P_3, imamo $s(f,P_1) \leq s(f,P_3) \leq S(f,P_3) \leq S(f,P_2)$.

Dakle, dokazali smo $(\forall s \in \mathcal{D})\ (\forall S \in \mathcal{G})\ , s \leq S$. Odatle zaključujemo $(\forall s \in \mathcal{D})\ s \leq \inf \mathcal{G}$, a odatle $\sup \mathcal{D} \leq \inf \mathcal{G}$, tj. vrijedi (6.15). □

Definicija 6.3. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ ograničenu na ograničenom skupu $A \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je **integrabilna u Riemannovom smislu** ili R-integrabilna na A ako je

$$\mathcal{I}_*(f,A) = \mathcal{I}^*(f,A). \tag{6.16}$$

Tada broj $\displaystyle\int_A f = \mathcal{I}_*(f,A) = \mathcal{I}^*(f,A)$ nazivamo **integral** ili R-integral funkcije f na skupu A.

Karakterizacija Riemann integrabilnosti funkcije f dana je u slijedećim teoremima.

Teorem 6.3 (Riemanov uvjet)**.** *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i sadržan u nekom kvadru K. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena na A i proširena nulom na K. Funkcija f je integrabilna na A ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija $P_\varepsilon \in \mathcal{S}(K)$ takva da je $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Dokaz: Neka je f integrabilna na K i neka je $I = \int_K f$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje subdivizije $P'_\varepsilon, P''_\varepsilon \in \mathcal{S}(K)$ takve da vrijedi $S(f,P'_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{2}$ i $s(f,P''_\varepsilon) > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Sada za subdiviziju $P_\varepsilon \in \mathcal{S}(K)$ koja $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ vrijedi $I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,P'_\varepsilon) \leq s(f,P_\varepsilon) \leq S(f,P_\varepsilon) \leq S(f,P''_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, a odatle imamo $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Neka f zadovoljava Riemannov uvjet, tj. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{S}(K)$ tako da vrijedi $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Zbog (6.14) imamo $0 \leq \mathcal{I}^*(f, A) - \mathcal{I}_*(f, A) \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Pošto prethodna nejednakost $0 \leq \mathcal{I}^*(f, A) - \mathcal{I}_*(f, A) < \varepsilon$ vrijedi za sve $\varepsilon > 0$ to je $\mathcal{I}^*(f, A) = \mathcal{I}_*(f, A)$, odnosno f je integrabilna na K. $\square$

Zadatak 6.1. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija na $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dokažite da je ona R-integrabilna na $[a, b]$.

Rješenje: Pretpostavimo da je f rastuća na $[a, b]$. Ako je $f(a) = f(b)$ onda je f konstantna funkcija na $[a, b]$ pa je integrabilna. Stoga pretpostavimo da je $f(b) - f(a) > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji i $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n\varepsilon > (f(b) - f(a))(b - a)$. Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju $x_k = a + kh$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $h = (b - a)/n$. Za svaki $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ vrijedi $\inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha)$ i $\sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta)$. Stoga su pripadne Darbouxove sume oblika $s = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})h$ i $S = \sum_{k=1}^n f(x_k)h$. Vrijedi $S - s = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))h = h(f(b) - f(a)) = (f(b) - f(a))(b - a)/n < \varepsilon$. Po teoremu 6.3 f je R-integrabilna. $\square$

Teorem 6.4 (Darboux)**.** *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup sadržan u kvadru K. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena na A i proširena nulom na K. Funkcija f je integrabilna na A i $\int_A f = I$ ako i samo ako vrijedi*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall P \in \mathcal{S}(K), (d(P) \leq \delta) \Rightarrow (|\sigma(f, P) - I| < \varepsilon), \tag{6.17}$$

gdje je $\sigma(f, P)$ Riemannova integralna suma definirana u (6.10).

Dokaz: Neka f zadovoljava Darbouxov uvjet. Pokažimo da f zadovoljava Riemanov uvjet odakle će po teoremu 6.3 slijediti integrabilnost funkcije f.

Neka je zadan $\varepsilon > 0$ po volji i neka je $\delta > 0$ iz Darbouxovog uvjeta (6.17) za $\frac{\varepsilon}{2}$. Napravimo ekvidistantnu subdiviziju P koja zadovoljava uvjet $\max\{\frac{b_j - a_j}{p_j}; j \in \{1, \ldots, n\}\} \leq \delta$. Neka je $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ i izaberimo $t^{(i_1 i_2 \ldots i_n)} \in K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ takve da vrijedi $M_{i_1 i_2 \ldots i_n} - f(t^{(i_1 i_2 \ldots i_n)}) < \frac{\varepsilon}{2\nu(K_{i_1 i_2 \ldots i_n})N}$, $1 \leq i_j \leq p_j, (j = 1, \ldots, n)$. Tada je

$$S(f, P) - \sigma(f, P) \leq \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} (M_{i_1 i_2 \ldots i_n} - f(t^{(i_1 i_2 \ldots i_n)}) \nu(K_{i_1 i_2 \ldots i_n}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odatle je $|S(f, P) - I| \leq |S(f, P) - \sigma(f, P)| + |\sigma(f, P) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Sada $\mathcal{I}^*(f, A) \leq S(f, P) < I + \varepsilon$ daje $\mathcal{I}^*(f, A) \leq I$.

Analogno se pokaže da postoji subdivizija $P' \in \mathcal{S}(K)$ tako da vrijedi $|s(f,P') - I| < \varepsilon$, a odatle slijedi $I \leq \mathcal{I}_*(f,A)$. Zajedno s prethodnom nejednakosti dobijemo $I \leq \mathcal{I}_*(f,A) \leq \mathcal{I}^*(f,A) \leq I$, i.e. f je integrabilna na A.

Obratno, neka je f integrabilna funkcija na A, $\sup_A |f| = M$ i neka je $I = \int\limits_A f$. Tada po teoremu 6.3 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija $P_0 \in \mathcal{S}(K)$ tako da vrijedi

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,P_0) \leq I \leq S(f,P_0) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $r = p_1 + \cdots + p_n - n$ broj unutrašnjih točaka subdivizije P_0 i $\delta = (\frac{\varepsilon}{4Mr})^{\frac{1}{n}}$.

Neka je subdivizija P bilo koja za koju vrijedi $d(P) \leq \delta$. Napravimo novu subdiviziju $P' = P \cup P_0$, tj. dodajmo subdiviziji P r novih točaka iz P_0. Tada iz leme 6.1 vrijedi

$$S(f,P) \geq S(f,P') \geq S(f,P) - 2Mrd(P)^n$$

što daje

$$S(f,P) \leq S(f,P') + 2Mrd(P)^n \leq S(f,P) + 2Mrd(P)^n <$$

$$< I + \frac{\varepsilon}{2} + 2Mrd(P)^n \leq I + \frac{\varepsilon}{2} + 2Mr\delta^n = I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon.$$

Analogno,

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq s(f,P) + 2Mrd(P)^n$$

daje

$$s(f,P) \geq s(f,P') - 2Mrd(P)^n \geq (f,P) - 2Mrd(P)^n$$

$$> I - \frac{\varepsilon}{2} - 2Mrd(P)^n \geq I - \frac{\varepsilon}{2} - 2Mr\delta^n = I - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I - \varepsilon.$$

Sada pomoću nejednakosti (6.12) imamo $I - \varepsilon < s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P) < I + \varepsilon$, odnosno $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$. □

***Napomena* 6.1.** Primijetimo da Darbouxov uvjet (6.17) znači

$$\int\limits_A f = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f,P).$$

Teorem 6.5. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kvadar i neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna na K. Tada je funkcija f integrabilna na K.*

Dokaz: Prema teoremu 4.4 i primjeru 4.5 za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in K$ vrijedi $(\|x - y\| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\nu(K)}$. Uzmimo sada ekvidistantnu subdiviziju $P \in \mathcal{S}(K)$ takvu da je $d(P) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$. Tada za bilo koje $x, y \in K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $1 \leq i_j \leq p_j$, $(j = 1, \ldots, n)$, vrijedi $\|x - y\| < \delta$, stoga vrijedi $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\nu(K)}$. Pošto po teoremu 4.7 neprekidna funkcija na svakom kompaktu $K_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ poprima vrijednosti $m_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ i $M_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, to vrijedi $M_{i_1 i_2 \ldots i_n} - m_{i_1 i_2 \ldots i_n} \leq \frac{\varepsilon}{\nu(K)}$. Odatle imamo

$$S(f, P) - s(f, P) \leq \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} (M_{i_1 i_2 \ldots i_n} - m_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \nu(K_{i_1 i_2 \ldots i_n}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\nu(K)} \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{p_n} \nu(K_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \varepsilon.$$

Sada po teoremu 6.3 slijedi integrabilnost funkcije f na K. □

6.3 Volumen skupa i skupovi mjere nula

Definicija 6.4. Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i neka je $\chi : R^n \to \{0, 1\}$ njegova karakteristična funkcija definirana s $\chi(x) = 1$ za $x \in A$ i $\chi(x) = 0$ za $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Kažemo da A ima volumen ako je χ R-integrabilna funkcija. Broj

$$\int_A \chi = \nu(A)$$

nazivamo **volumen skupa** A.

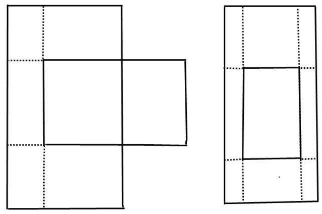
Teorem 6.6. *Ograničen skup $A \subset \mathbb{R}^n$ ima volumen $\nu(A) = 0$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna familija kvadara $\{K_1, \ldots, K_m\}$ takva da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_i$ i $\sum_{i=1}^m \nu(K_i) < \varepsilon$.*

Dokaz: Neka je $\nu(A) = 0$ i neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji. Neka je K zatvoreni kvadar takav da je $A \subseteq K$ i χ_A karakteristična funkcija skupa A. Kako je $\int_A \chi = 0$ to postoji subdivizija P od K na manje kvadre $K_1 \ldots, K_m$ takve da je pripadna gornja Darbouxova suma $S(\chi, P) = \sum_{i=1}^m \nu(K_i) < \varepsilon$. Ako iz odbacimo one K_i za koje je $K_i \cap A = \emptyset$ dobijemo traženu familiju.

Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji familija kvadara $\{K_1, \ldots, K_m\}$ takva da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_i$ i $\sum_{i=1}^m \nu(K_i) < \varepsilon$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da su disjunktni ili se samo dodiruju stranicama (vidi napomenu 6.2). Neka je K zatvoren kvadar takav da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_i \subseteq K$.

Produžimo li stranice kvadra K_i $(i = 1, \dots, m)$ do stranica od K dobivamo podjelu od K koja je zadana subdivizijom P takvom da su pripadajući kvadri K'_j ili sadržani u nekom K_i ili se eventualno samo dodiruju s nekim K_i. Tada je gornja Darbouxova suma $S(\chi_A, P) \leq \sum_{i=1}^{m} \nu(K_i) < \varepsilon$. Zbog toga što je $\varepsilon > 0$ po volji imamo $I^*(\chi_A, A) \leq 0$. Zbog pozitivnosti funkcije χ_A imamo $0 \leq I_*(\chi_A, A) \leq I^*(\chi_A, A) \leq 0$, odnosno slijedi integrabilnost funkcije χ na A i $\displaystyle\int_A \chi_A = 0$. □

***Napomena* 6.2.** U prethodnom teoremu 6.4 pravokutnici (kvadri u višedimenzija) se mogu preklapati, tj. nisu nužno disjunktni. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da su disjunktni ili se samo dodiruju stranicama, jer ih u suprotnom možemo podijelit na manje dijelove kao na slici desno.



Definicija 6.5. Kažemo da skup $A \subset \mathbb{R}^n$ (ne nužno omeđen) ima **mjeru nula** ili da je **zanemariv** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ili prebrojiva familija otvorenih kvadara $\{S_i; i \in \mathcal{J}\}$ takva da je $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{J}} S_k$ i $\sum_{k\in\mathcal{J}} \nu(S_k) < \varepsilon$.

Zadatak 6.2. Pokažite da svaki podskup od $\mathbb{R}^n$ oblika $R_{c_k} = \mathbb{R}^{k-1} \times \{c_k\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ $(k = 1, \dots, n)$, gdje je $c_k \in \mathbb{R}$, ima mjeru 0.

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$ zadan po volji. Definirajmo skupove

$$S_i = \langle -i, i\rangle^{k-1} \times \langle c_k - \frac{\varepsilon}{i^{n-1}2^{i+n+1}}, c_k + \frac{\varepsilon}{i^{n-1}2^{i+n+1}}\rangle \times \langle -i, i\rangle^{n-k} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Očito je $R_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ i

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n-1} i^{n-1} \frac{\varepsilon}{i^{n-1}2^{i+n}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Zadatak 6.3. Rub kvadra u $\mathbb{R}^n$ je skup mjere 0.

Rješenje: Neka je $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdje su $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $(j = 1, \dots, n)$. Stranice kvadra su skupovi oblika
$S_{c_k} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \{c_k\} \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $c_k \in \{a_k, b_k\}$, $(k = 1, \dots, n)$. Očito vrijedi $S_{c_k} \subset R_{c_k}$ za $c_k \in \{a_k, b_k\}$, $(k = 1, \dots, n)$, gdje su R_{c_k} iz zadatka 6.2, pa su S_{c_k} skupovi mjere 0. Oplošje kvadra je unija

svih $2n$ skupova S_{c_k}, pa i ono ima mjeru 0. □

Osnovna prednost rada sa skupovima mjere 0 u usporedbi sa skupovima volumena 0 je dana u slijedećem teoremu.

Teorem 6.7. *Unija prebrojive familije skupova mjere* 0 *je skup mjere* 0.

Dokaz: Neka je $\{A_j; j \in \mathcal{J}\}$ familija skupova mjere 0, gdje je indeksni skup $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{N}$ konačan ili jednak $\mathbb{N}$. Neka je zadan $\varepsilon > 0$ po volji i neka su brojevi $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$, $j \in \mathcal{J}$. Za bilo koji $j \in \mathcal{J}$ postoji familija kvadara $\{K_{ji}; i \in \mathcal{I}_j\}$ takva da je indeksni skup $\mathcal{I}_j \subseteq \mathbb{N}$ konačan ili jednak $\mathbb{N}$, $A_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}_j} K_{ji}$ i $\sum_{i\in\mathcal{I}_j} \nu(K_{ji}) < \varepsilon_j$. Sada za familiju kvadara $\{K_{ji}; i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}\}$ vrijedi

$$\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{J}} \bigcup_{i\in\mathcal{I}_j} K_{ji} \qquad \text{i} \qquad \sum_{j\in\mathcal{J}} \sum_{i\in\mathcal{I}_j} \nu(K_{ji}) \le \sum_{j\in\mathcal{J}} \varepsilon_j \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

dakle, $\bigcup_{j\in\mathcal{J}} A_j$ je skup mjere 0. □

Primjer 6.1. Skup $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$ ima mjeru 0, ali nema volumen, tj. funkcija χ_A nije R-integrabilna.

Rješenje: Skup A je prebrojiva unija jednočlanih skupova pa je po teoremu 6.7 mjere 0.

Funkcija χ_A nije integrabilna zato što u svakom podsegmentu od segmenta $K \subseteq [0,1]$ ima i racionalnih i iracionalnih brojeva. To daje $m_K = \inf_K \chi_A = 0$ i $M_K = \sup_K \chi_A = 0$, a onda i $s(\chi_A, P) = 0$ i $S(\chi_A, P) = 1$ za svaku subdiviziju P od $[0,1]$. Odatle imamo $I_*(\chi_A, A) \neq I^*(\chi_A, A)$, tj. χ_A nije integrabilna. □

Teorem 6.8 (Lebesgue[1])**.** *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup, neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena na A i proširena nulom na $\mathbb{R}^n$. Funkcija f je integrabilna na A ako i samo ako skup svih točaka prekida proširene funkcije f ima mjeru* 0.

*****Dokaz**:*** Neka je $D \subseteq \overline{A}$ skup točaka prekida funkcije f mjere 0, neka je $|f(x)| \le M$ za sve $x \in A$ i neka je K kvadar takav da je $A \subset K$. Pokažimo da vrijedi Riemannov uvjet: za bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P od K takva da za pripadne Darbouxove sume $s(f,P)$ i $S(f,P)$ određene subdivizijom P vrijedi $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

[1]Henri Lebesgue (Beauvais, 28. lipanj 1875. - Paris, 26. srpanj 1941.) francuski matematičar

Označimo $\alpha = \frac{\varepsilon}{2\nu(K)}$. Tada zbog $D_\alpha \subset D$ (zadatak 4.2) imamo $\nu(D_\alpha) = 0$. Postoji konačno otvorenih kugli G_i ($i = 1, \ldots, p$) takvih da je $D_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^p G_i = U_\alpha$ i $\sum_{i=1}^p \nu(G_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Naime, zbog toga što je $\nu(D_\alpha) = 0$ postoji prebrojiva familija kugli sa prethodnim svojstvom, a zbog kompaktnosti D_α moguće je naći konačnu podfamiliju sa istim svojstvom.

Skup $S = K \setminus U_\alpha = K \cap U_\alpha^C$ je kompaktan (zatvoren i omeđen) i $S \subset D_\alpha^C$.

Za svaki $x \in D_\alpha^C$ postoji $\delta_x > 0$ takav da $\forall u, v \in K(x_0, \delta_x)$ vrijedi nejednakost $(|f(u) - f(v)| < \alpha)$. Sada prema zadatku 4.5 postoji $\delta_S > 0$ takav da $\forall u, v \in S$ vrijedi $\|u - v\| < \delta_S \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \alpha$.

Skupovi S i D_α su kompaktni i disjunktni, pa po zadatku 4.6 postoji $\gamma > 0$ takav da za $\forall x \in S$ i $\forall y \in D_\alpha$ vrijedi $\|x - y\| \geq \gamma$.

Nađimo subdiviziju P_ε od K tako da je $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju P_ε tako da je $d(P_\varepsilon) < \frac{\min\{\delta_S, \gamma\}}{\sqrt{n}}$ i neka su $K_j \subset K$ ($j = 1, \ldots, r$) svi kvadri određeni subdivizijom P_ε. Neka je $\mathcal{I}_S \subset \{1, \ldots, r\}$ takav da je $K_j \cap D_\alpha = \emptyset$ za $j \in \mathcal{I}_S$ i $\mathcal{I}_D = \{1, \ldots, r\} \setminus \mathcal{I}_S$.

Za $j \in \mathcal{I}_D$ vrijedi $K_j \subset U_\alpha$ jer kvadar sa stranicama manjim od $\frac{\gamma}{\sqrt{n}}$ sadrži točke čija udaljenost je manja od γ, a udaljenost točaka iz S i D_α je veća ili jednaka γ.

Za $j \in \mathcal{I}_S$ i $K_j \subset S$ imamo da $x, y \in K_j$ daje $\|x - y\| < \delta$, odakle slijedi $\|f(x) - f(y)\| < \alpha$.

Postoji još najviše konačno $j_1, \ldots, j_l \in \mathcal{I}_S$ takvih da je $K_{j_i} \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ($i = 1, \ldots, l$). Pošto je svaki takav K_{j_i} kompaktan to postoji $\delta_i > 0$ takav da za svaki $x, y \in K_j$ vrijedi $(\|x - y\| < \delta_i) \Rightarrow (\|f(x) - f(y)\| < \alpha)$.

Uzmimo $\delta = \min \delta_S, \delta_1, \ldots, \delta_l$ i načinimo P'_ε, profinjenje od P_ε, tako da je $d(P'_\varepsilon) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ i neka su $K'_j \subset K$ ($j = 1, \ldots, r'$) svi kvadri određeni subdivizijom P'_ε. Neka je $\mathcal{I}'_S \subset \{1, \ldots, r'\}$ takav da za $i \in \mathcal{I}'_S$ postoji $j \in \mathcal{I}_S$ tako da je $K'_i \subset K_j$ i $\mathcal{I}'_D = \{1, \ldots, r'\} \setminus \mathcal{I}'_S$.

Za $j \in \mathcal{I}'_S$ je $M_j - m_j < \alpha$, a za $j \in \mathcal{I}'_D$ imamo $M_j - m_j \leq 2M$. Sada za Darbouxove sume $s(f, P'_\varepsilon)$ i $S(f, P'_\varepsilon)$ određene subdivizijom P'_ε imamo

$$S(f, P'_\varepsilon) - s(f, P'_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} (M_j - m_j)\nu(K_j) =$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{I}'_S} (M_j - m_j)\nu(K_j) + \sum_{j \in \mathcal{I}'_D} (M_j - m_j)\nu(K_j) <$$

$$< \sum_{j \in \mathcal{I}_S} \alpha\nu(K_j) + \sum_{j \in \mathcal{I}_D} 2M\nu(K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2\nu(K)}\nu(K) + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Za dokaz obratne tvrdnje, pokažimo da $\nu(D) > 0$ povlači da f nije Riemann integrabilna na K.

Zbog zadatka 4.2 postoji $\alpha > 0$ takav da je $\nu(D_\alpha) > 0$. Dakle, postoji $\varepsilon > 0$ takav da svaka familija otvorenih skupova čija unija sadrži D_α ima sumu volumena kugli $\geq \varepsilon$. Za svaku subdiviziju P od K, gdje su $K_j \subset K$ $(j = 1, \ldots, r)$ svi kvadri određeni subdivizijom P, i $\mathcal{I}_D \subset \{1, \ldots, r\}$ takav da je $\operatorname{int}(K_j) \cap D_\alpha \neq \emptyset$ za $j \in \mathcal{I}_D$ i $\mathcal{I}_S = \{1, \ldots, r\} \setminus \mathcal{I}_S$, imamo

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{j=1}^{r} (M_j - m_j)\nu(K_j) =$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{I}_S} (M_j - m_j)\nu(K_j) + \sum_{j \in \mathcal{I}_D} (M_j - m_j)\nu(K_j) \geq \sum_{j \in \mathcal{I}_D} (M_j - m_j)\nu(K_j).$$

Familija $\{\operatorname{int}(K_j); j \in \mathcal{I}_D\}$ ima svojstvo da je skup $D_\alpha \setminus (\bigcup_{j \in \mathcal{I}_D} \operatorname{int}(K_j))$ podskup konačne unije stranica kvadara, pa je to skup mjere 0 u $\mathbb{R}^n$ (vidi zadatak 6.3). Dakle, $\bigcup_{j \in \mathcal{I}_D} \operatorname{int}(K_j)$ je pokrivač skupa mjere > 0, pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\sum_{j \in \mathcal{I}_D} \nu(K_j) \geq \varepsilon$. Također, na K_j $(j \in \mathcal{I}_D)$ vrijedi $M_j - m_j \geq \alpha$ iz čega slijedi $S(f,P) - s(f,P) \geq \alpha\varepsilon > 0$. Odatle vidimo da Riemannov uvjet nije ispunjen, pa f nije integrabilna na A. Dakle, ako je f integrabilna onda je $\nu(D) = 0$. □

Korolar 6.1. *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ ima volumen ako i samo ako njegov rub ∂A ima mjeru 0.*

Dokaz: Skup $\overline{A} = \partial A \cup \operatorname{int} A$, a funkcija $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ je neprekidna na $Int A \cup \overline{A}^C$ i skup točaka prekida je ∂A. Tvrdnja sada slijedi iz teorema 6.8.
□

Teorem 6.9. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i neka je funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilna na A.*

(i) Ako je A skup mjere 0, onda je $\int_A f = 0$.

(ii) Ako je $f \geq 0$ na A i $\int_A f = 0$, onda skup $\{x \in A; f(x) \neq 0\}$ ima mjeru 0.

*****Dokaz**:*** (i) Skup mjere 0 ne može sadržavati kvadar volumena > 0. Stoga za bilo koju subdiviziju P kvadra $K \supseteq A$ vrijedi $s(f,P) = \sum_{i=1}^{p} m_i \nu(K_i) \leq M \sum_{i=1}^{p} \overline{m}_i \nu(K_i)$, gdje je $M = \sup_A f$, $m_i = \inf_{K_i} f$ i $\overline{m}_i = \inf_{K_i} \chi_A$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Ako je $K_i \nsubseteq A$ onda je $\overline{m}_i = 0$, a ako je $K_i \subseteq A$ onda je $\nu(K_i) = 0$. Dakle $\sum_{i=1}^{p} \overline{m}_i \nu(K_i) = 0$ pa je $s(f, P) \leq 0$. Zamjenom f s $-f$ u prethodnom dokazu dobijemo $s(-f, P) \leq 0$. Budući da je $S(f, P) = -s(-f, P)$ imamo $s(f, P) \geq 0$. Dakle, vrijedi $I_*(f, A) \leq 0 \leq I^*(f, A)$. Pošto je f integrabilna, mora biti $I_*(f, A) = I^*(f, A) = 0$.

(ii) Za $m \in \mathbb{N}$ po volji označimo skup $A_m = \{x \in A; f(x) > \frac{1}{m}\}$ i pokažimo da je $\nu(A_m) = 0$. Za $\varepsilon > 0$ po volji uzmimo kvadar K takav da je $A \subseteq K$ i proširimo f s nulom na K. Neka je P subdivizija od K takva da vrijedi $S(f, P) < \frac{\varepsilon}{m}$ (takva postoji jer je $\int_A f = 0$). Neka su $\{K_1, \ldots, K_p\}$ kvadri određeni subdivizijom P takvi da je $A_m \cap K_i \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, p)$. Tada zbog $mM_i \geq 1$, gdje je $M_i = \sup_{K_i} f$, imamo $\sum_{i=1}^{p} \nu(K_i) \leq \sum_{i=1}^{p} mM_i \nu(K_i) = mS(f, P) < \varepsilon$. Dakle familija $\{K_1, \ldots, K_p\}$ pokriva skup A_m i $\sum_{i=1}^{p} \nu(K_i) < \varepsilon$, pa je A_m skup volumena 0. Budući da je skup $\{x \in A; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ tvrdnja slijedi iz teorema 6.7. □

Zadatak 6.4. Pokažite da je funkcija $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = x$ za $x \in [-1, 0]$ i $f(x) = 3x + 8$ za $x \in \langle 0, 1]$ integrabilna na $[-1, 1]$.

Rješenje: Skup prekida funkcije f je $\{0\} \subset \mathbb{R}$, pa ima mjeru 0. Po Lebesgueovom teoremu 6.8 slijedi integrabilnost od f na $[-1, 1]$. □

Zadatak 6.5. Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ integrabilna na $[-1, 1]$.

Rješenje: Skup prekida funkcije f je $\{0\} \subset \mathbb{R}$, pa ima mjeru 0. Po Lebesgueovom teoremu 6.8 slijedi integrabilnost od f na $[-1, 1]$. □

Zadatak 6.6. Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = x^2 + \sin(\frac{1}{y})$ za $y \neq 0$ i $f(x, y) = x^2$ za $y = 0$ integrabilna na $\overline{K}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

Rješenje: Funkcija f je omeđena i ima prekide samo na pravcu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$ koji je mjere 0 u $\mathbb{R}^2$. Po Lebesgueovom teoremu 6.8 slijedi integrabilnost od f na $\overline{K}(0, 1)$. □

Kazalo