GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 13. — No. 4 — 1958.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE AUX VALEURS MOYENNES

Mahmud Bajraktarević, Sarajevo

Sommaire. — Dans cette note: 1^0 on démontre l'existence de certaines solutions de l'équation fonctionnelle aux valeurs moyennes (1); 2^0 on donne l'expression explicite de ces solutions; 3^0 on démontre l'invariabilité de la forme de (1) par rapport á la transformation (4); 4^0 on définit une classe de fonctions dans laquelle l'équation (1) est résolue complètement. — Généralisations des résultats déjà connus ([1], [2], [3]).

1. *Définitions et notations*

Soit:

1^0 $I = [a_1\, a_2]$;

2^0 Φ respectivement F l'ensemble de toutes les fonctions continues strictement monotones respectivement de toutes les fonctions au signe constant différent de zéro, définies sur I;

3^0 $E = \bigcup\limits_n I^n \; (n = 2, 3, \ldots)$ avec $t' \neq t''$ si

$t' = (t_1, \ldots, t_l)$. $\qquad t'' = (t_1, \ldots, t_{l+m})$,

$t_\mu \in \mathrm{I}\, (\mu = 1, \ldots, l)$, $\qquad t_{l+i} = 0\; (i = 1, \ldots, m)$;

4^0 $M_\varphi (f, t)$ la valeur moyenne de $\varphi \in \Phi$ par rapport à $f \in F$ au point $t \in E$, définie par

$$M_\varphi (f, t) = \varphi^{-1} \left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(t_i) f(t_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)} \right\} = \varphi^{-1} \left\{ \frac{\Sigma \varphi f}{\Sigma f} \right\}. \tag{*}$$

2. *Résultats*

Les résultats de la note sont donnés par les théorèmes suivants.

Théorème 1. *L'équation fonctionnelle aux valeurs moyennes*

$$M_\varphi (f, t) = M_\psi (g, t) \;\; (\varphi, \psi \in \Phi;\; f, g \in F;\; t \text{ arbitraire} \in E) \tag{1}$$

admet la solution donnée par les relations

$$\varphi = \frac{a\psi + b}{c\psi + d}, f = kg(c\psi + d), k(c^2 + d^2)(ad - bc) \neq 0, \tag{2}$$

a, b, c, d, k *étant des constantes arbitraires,* g *et* ψ *deux fonctions arbitraires.*

Pour la solution (2) correspondant à $c = 0$ on a même le

Théorème 2. *Pour qu'il soit* (1) *pour chaque* $f \in F$ *et pour chaque* $t \in E$ *avec* $f = cg$ ($c =$ *const* $\neq 0$), *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\varphi = a\psi + b \tag{3}$$

a *et* b *étant des constantes,* $a \neq 0$.

Ce théorème est une autre forme, plus convenable au sujet, du théorème ([1], p. 66): Pour qu'il soit

$$\varphi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi(t_i)\right\} = \psi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} q_i \psi(t_i)\right\},$$

pour tout $t_i \in I$, pour tout $q_i (i = 1, \ldots, n)$ et pour tout $n = 2, 3, \ldots$, q_i étant des constantes positives arbitraires avec $q_1 + \ldots + q_n = 1$, il faut et il suffit que (3) soit remplie, a et b étant des constantes, $a \neq 0$.

Théorème 3. *L'équation* (1) *est invariable par rapport à la transformation*

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha\bar{\varphi} + \beta}{\gamma\bar{\varphi} + \delta}, \; f = \varepsilon\bar{f}(\gamma\bar{\varphi} + \delta), \\ \psi &= \frac{\lambda\bar{\psi} + \mu}{\nu\bar{\psi} + \omega}, \; g = \eta\bar{g}(\nu\bar{\psi} + \omega), \\ &(\alpha\delta - \beta\gamma)(\lambda\omega - \mu\nu)\varepsilon\eta \neq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta; \lambda, \mu, \nu, \omega; \varepsilon, \eta$ *étant des constantes arbitraires. — Autrement dit, si* (4) *a lieu, alors*

$$M_\varphi(f, t) = M_\psi(g, t) \rightleftarrows M_{\bar{\varphi}}(\bar{f}, t) = M_{\bar{\psi}}(\bar{g}, t). \tag{5}$$

Théorème 4. *Pour* $n = 2$, *l'équation* (1) *admet une solution donnée par le système*

$$\begin{aligned} &f \equiv \text{const} \neq 0, \; (l\psi^2 + m\psi + n)g^2 = 1, \\ &\varphi = p + q\int g^2 d\psi, \; q(l^2 + m^2 + n^2) \neq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

et les solutions provenant de la transformation (4) *appliquée à* (6).

Le cas particulier de l'équation (1) où $f \equiv \text{const} \neq 0$ a été déjà traité par l'auteur antérieurement (pour $n = 2$, [2], p. 125—126; pour $n > 2$, [3], p. 173—175).

La question de l'existence eventuelle d'autres solutions de (1) reste pour le moment ouverte. Cependant, on peut donner une classe de fonctions bien définie dans laquelle toutes les solutions de (1) sont représentées par (2). La détermination de cette classe fait l'objet de la proposition suivante.

Théorème 5. *Si les fonction* φ, ψ, f, g *admettent des dérivées secondes te si* $n \geq 3$, *toutes les solutions de* (1) *sont données par* (2).

3. *Démonstrations*

Démonstration du Th. 1. D'après (2) on a

$$M_\varphi(f, t) = \varphi^{-1}\left\{\frac{\Sigma \varphi f}{\Sigma f}\right\} = \varphi^{-1}\left\{\frac{\Sigma kg\,(a\psi + b)}{\Sigma kg\,(c\psi + d)}\right\} = \varphi^{-1}\left\{\frac{a\dfrac{\Sigma \psi g}{\Sigma g} + b}{c\dfrac{\Sigma \psi g}{\Sigma g} + d}\right\} =$$

$$= \varphi^{-1}\left\{\frac{a\psi\,[M_\psi(g, t)] + b}{c\psi\,[M_\psi(g, t)] + d}\right\} = \varphi^{-1}\left\{\varphi\,[M_\psi(g, t)]\right\} = M_\psi(g, t).$$

Démonstration du Th. 2[1]. Ce cas étant un cas particulier de (2) avec $c = 0$, la relation (3) est, en effet, *suffisante*.

Pour démontrer la *nécessité* de la condition (3), il suffit de la démontrer seulement pour $n = 2$. Supposons[2]

$$\varphi^{-1}\left\{\frac{\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2}{f_1 + f_2}\right\} = \psi^{-1}\left\{\frac{\psi_1 f_1 + \psi_2 f_2}{f_1 + f_2}\right\}$$

pour chaque $t = (t_1, t_2) \leqslant I^2$. En posant $\psi\varphi^{-1} = \chi$, $\varphi(t) = x$, $t = \varphi^{-1}(x)$, on obtient

$$\chi\left\{\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}\right\} = \frac{\chi(x_1) f_1 + \chi(x_2) f_2}{f_1 + f_2}$$

de sorte que, vu $x_1 < \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2} < x_2$, chaque corde de la courbe $y = \chi(x)$ rencontre la courbe à un point différent de ses extrémités, ce qui, d'après un théorème connu ([1], p. 73), suffit pour que χ soit linéaire.

Démonstration du Th. 3. D'après le Th. 1 et (4), on a

$$M_\varphi(f, t) = M_{\bar\varphi}(\bar f, t), \quad M_\psi(g, t) = M_{\bar\psi}(\bar g, t),$$

donc, d'après (1),

$$M_{\bar\varphi}(\bar f, t) = M_{\bar\psi}(\bar g, t). \tag{7}$$

Inversement, si (7) a lieu, on a (1).

Démonstration du Th. 4. En désignant par τ la valeur commune des deux membres de (1), on voit que cette équation est équivalente au système de deux équations

$$\varphi(\tau) = \frac{\Sigma \varphi f}{\Sigma f}, \qquad \psi(\tau) = \frac{\Sigma \psi g}{\Sigma g}. \tag{8}$$

---

[1]) Cette démonstration est celle employée dans ([1], p. 66 et 74), convenablement modifiée.

[2]) Pour simplifier l'écriture on a écrit ψ_i, f_i pour $\psi(t_i)$, $f(t_i)$.

Par une substitution directe des quantités g et φ par leurs valeurs (6) dans le système (8) pour $n = 2$, on vérifie immédiatement que le système est identiquement satisfait.

Démonstration du Th. 5. En dérivant les équations (8) par rapport à t_i respectivement à $t_j = t_{i+1}$ $[j-1 \equiv i \pmod n]$, on obtient quatre relations contenant les quantités $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$, $\frac{\partial \tau}{\partial t_i}, \frac{\partial \tau}{\partial t_j}$. L'élimination de ces dérivées entre les quatre relations obtenues conduit à la relation

$$\left\{(\varphi f)'_i (\psi g)'_j - (\varphi f)'_j (\psi g)'_i\right\} \Sigma f_\lambda \Sigma g_\lambda + (f'_i g'_j - f'_j g'_i) \Sigma (\varphi f)_\lambda \Sigma (\psi g)_\lambda =$$
$$= \left\{(\varphi f)'_i g'_j - (\varphi f)'_j g'_i\right\} \Sigma f_\lambda \Sigma (\psi g)_\lambda + \left\{(\psi g)'_j f'_i - (\psi g)'_i f'_j\right\} \Sigma f_\lambda \Sigma g_\lambda \tag{9}$$

pouvant etre écrite dans la forme

$$(\varphi f)'_i (\varphi f)'_j \left\{\frac{(\psi g)'_j}{(\varphi f)'_j} - \frac{(\psi g)'_i}{(\varphi f)'_i}\right\} \Sigma f_\lambda \Sigma g_\lambda +$$
$$+ f'_i f'_j \left\{\frac{g'_j}{f'_j} - \frac{g'_i}{f'_i}\right\} \Sigma (\varphi f)_\lambda \Sigma (\psi g)_\lambda =$$
$$= f'_i f'_j \left\{\frac{(\psi g)'_j}{f'_j} - \frac{(\psi g)'_i}{f'_i}\right\} \Sigma g_\lambda \Sigma (\varphi f)_\lambda -$$
$$- g'_i g'_j \left\{\frac{(\varphi f)'_j}{g'_j} - \frac{(\varphi f)'}{g'_i}\right\} \Sigma f_\lambda \Sigma (\psi f)_\lambda .$$

Si l'on divise cette équation par $t_j - t_i \neq 0$, puis on laisse $t_k \to t_i (k \neq i)$, ensuite on supprime l'indice i et, enfin, on divise par n^2, on obtient une relation, qui, après quelques transformations, se réduit à l'équation

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\frac{f'}{f} = \frac{\psi''}{\psi} + 2\frac{g'}{g}$$

d'où

$$\varphi' f^2 = C \psi' g^2 \qquad (C \neq 0)^{3)} \tag{10}$$

La dérivation de (9) par rapport à $t_k (k \neq i, j)$ aboutit à une relation, laquelle, après une transformation analogue à celle appliquée ci-dessus à l'équation (9), une division par $t_j - t_i \neq 0$, un passage à la limite pour $t_j, t_k, t_\lambda \to t_i$, la suppression de l'indice i, la division par n et quelques simplifications nécessaires, devient

$$\frac{f'}{f}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\frac{f'}{f}\right) - \frac{f''}{f} = \frac{g'}{g}\left(\frac{\psi''}{\psi'} + 2\frac{g'}{g}\right) - \frac{g''}{g},$$

[3]) D'après la manière dont on a obtenu la relation (10), on voit qu'elle reste valable même pour $n = 2$.

ce qui, d'après (10), devient

$$(f'g - fg')\left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\,\frac{f'}{f}\right) = (f'g - fg')'$$

ou (11)

$$(f'g - fg')\left(\frac{\psi''}{\psi'} + 2\,\frac{g'}{g}\right) = (f'g - fg')'.$$

On a à distinguer deux cas possibles.

Premier cas. Si $f'g - f'g \equiv 0$, (11) est identiquement satisfait et, tenant compte de (10), on a les relations (2) avec $c = 0$.

Deuxième cas. Si $f'g - fg' \not\equiv 0$, les équation (11) peuvent être écrites dans la forme

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2\,\frac{f'}{f} = \frac{\psi''}{\psi'} + 2\,\frac{g'}{g} = \frac{(f'g - fg')'}{f'g - fg'},$$

d'où

$$\varphi = C_1\,\frac{g}{f} + C_2 \qquad (C_1 \neq 0),$$

$$\psi = C_3\,\frac{f}{g} + C_4 \qquad (C_3 = -\,CC_1 \neq 0).$$

Les dernières relations donnent

$$\varphi = \frac{C_2\,\psi + C_1\,C_3 - C_2\,C_4}{\psi - C_4}, \quad f = \frac{1}{C_3}\,g\,(\psi - C_4),$$

donc, (2) avec $c = 1$.

RÉFÉRENCES:

[1] *G. H. Hardy — J. E. Littlewood — G. Polya*, Inequalities, Cambridge University Press, 1952, p. 66, 73 et 74.

[2] *M. Bajraktarević*, Sur quelques cas spéciaux du théorème généralisé de la moyenne, Glasnik mat.-fiz. i astr. **8**, (1953), 125—126.

[3] *M. Bajraktarević*, Sur certaines solutions de deux équations fonctionnelles, Bull. Soc. math. phys. R. P. Serbie, **6**, (1954), 173—175.

O JEDNOJ FUNKCIONALNOJ JEDNAČINI SA SREDNJIM VRIJEDNOSTIMA

Mahmud Bajraktarević, Sarajevo

Sadržaj

Neka je: 1^0 $I = [a_1, a_2]$; 2^0 Φ respektivno F skup svih neprekidnih stvarno monotonih funkcija respektivno svih funkcija stalnog znaka različitog od nule, definisanih na I; 3^0 $E = \bigcup I^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ sa $t' \neq t''$, ako je $t' = (t_1, \ldots, t_l)$, $t'' = (t_1, \ldots, t_{l+m})$, $t_\mu \leqslant I$ $(\mu = 1, \ldots, l)$,

$t_{l+i} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$; 4^0 $M_\varphi(f, t)$ srednja vrijednost od $\varphi \leqslant \Phi$ u odnosu na $f \leqslant F$ u tački $t \leqslant E$ definisana sa (*).

Rezultati ovog članka su dati slijedećim teoremama.

T e o r e m a 1. Funkcionalna jednačina sa srednjim vrijednostima (1) ima rješenje dato relacijama (2), gdje su a, b, c, d, k proizvoljne konstante a g i ψ dvije proizvoljne funkcije.

Za rješenje (2), koje odgovara konstanti $c = 0$, vrijedi štaviše

T e o r e m a 2. Da bi vrijedilo (1) za svako $f \leqslant F$ i svako $t \leqslant E$ sa $f = c\,g$ ($c =$ konst. $\neq 0$), potrebno je i dovoljno da je ispunjeno (3), gdje su a i b konstante, $a \neq 0$.

Ova teorema je samo drugi, za naš predmet zgodniji oblik poznate teoreme ([1], str. 66).

T e o r e m a 3. Jednačina (1) ne mijenja oblik u odnosu na transformaciju (4), gdje su α, β, γ, δ ; λ, μ, ν, ω ; ε, η proizvoljne konstante. Drugim riječima, ako vrijedi (4), tada vrijedi i (5).

T e o r e m a 4. Za $n = 2$, jednačina (1) ima rješenje dato sistemom (6) kao i rješenja koja proizlaze iz transformacije (4) primijenjene na (6).

Specijalan slučaj jednačine (1) sa $f \equiv$ konst. $\neq 0$ tretirao je pisac već ranije (za $n = 2$, [2], str. 125—126; za $n > 2$, [3], str. 173—175).

Pitanje mogućnosti egzistencije i drugih rješenja jednačine (1) ostaje otvoreno. Međutim, može se dati jedna potpuno određena klasa funkcija, u kojoj su sva rješenja te jednačine pretstavljena sa (2). Određivanje ove klase je predmet slijedeće teoreme.

T e o r e m a 5. Ako funkcije φ, ψ, f, g imaju izvode drugog reda i ako je $n \geq 3$, sva rješenja jednačine (1) su data sa (2).

(Primljeno 26. VII. 1958.)