LINEARNA ALGEBRA 2

skripta za nastavničke studije na PMF-MO

Zrinka Franušić, Juraj Šiftar

Sadržaj

Poglavlje 1

Unitarni prostori

1.1 Definicija i osnovna svojstva unitarnih prostora. Primjeri

Prisjetimo se najprije pojma vektorskog prostora. Neka je V neprazan skup i $\mathbb{F}$ polje. Uređena trojka $(V, +, \cdot)$ gdje je

(i) $+$ binarna operacija na V takva da je $(V, +)$ Abelova grupa,

(ii) $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ preslikavanje sa svojstvima

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$,
2. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,
3. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,
4. $1 \cdot a = a$,

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in V$,

naziva se *vektorski* ili *linearni prostor nad poljem* $\mathbb{F}$. Elementi skupa V nazivaju se tada *vektori*, a elementi polja F *skalari*. Tradicionalno, operaciju $+$ zovemo *zbrajanje vektora*, a preslikavanje $\cdot$ zovemo *množenje vektora skalarom*. Nadalje, u našem će slučaju biti $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pa tada govorimo o *realnom* odnosno o *kompleksnom vektorskom prostoru*.

U ovom poglavlju bavit ćemo se vektorskim prostorima koji će biti snabdjeveni još jednom operacijom - operacijom skalarnog množenja. Naglašavamo da su operacije *skalarnog množenja* i *množenja (vektora) skalarom* slične samo svojim nazivom u što ćemo se uvjeriti iz definicije koja slijedi. Stoga, treba biti oprezan i ne miješati ove dvije operacije.

U općem vektorskom prostoru imamo, dakle, dvije operacije te možemo njihovom uzastopnom primjenom dobivati linearne kombinacije vektora. Daljnji pojmovi i relacije odnose se na sve ono što se može izraziti pomoću linearnih kombinacija, npr. linearna nezavisnost i zavisnost skupa vektora, linearna ljuska, potprostor (kao podskup koji je "zatvoren" na linearne kombinacije svojih vektora), baza prostora itd. No, u takvom prostoru općenito nema dodatne geometrijske strukture na kakvu smo navikli u vektorskom prostoru V^2 i V^3 pa tako nema govora o duljini (modulu) vektora, kutu među vektorima, udaljenosti dvaju vektora ili udaljenosti vektora od potprostora itd. Tipični primjer vektorskog računa u elementarnoj geometriji je dokaz da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki i da ta točka dijeli težišnice u omjeru $2 : 1$. Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom omogućuju nam da "odjednom" izvedemo obje navedene tvrdnje za trokut. No, same linearne kombinacije uopće "ne hvataju", primjerice, relaciju okomitosti pravaca pa se samo pomoću njih ne može dokazati da se visine trokuta sijeku u jednoj točki. Nova operacija, skalarno množenje vektora, omogućuje onda ne samo da se izrazi okomitost vektora (tako da im je skalarni produkt jednak 0), nego i ostale prethodno spomenute ("metričke") pojmove, čime se geometrijska struktura prostora bitno obogaćuje.

Definicija 1.1.1. *Neka je V je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $s : V \times V \to \mathbb{F}$ koje svakom uređenom paru vektora pridružuje skalar $s(a, b) = \langle a|b\rangle \in \mathbb{F}$ naziva se* ***skalarno množenje*** *na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

(1) $\langle a|a\rangle \geq 0$, *za sve $a \in V$, pri čemu je $\langle a|a\rangle = 0$ ako i samo ako je $a = 0_V$;* (pozitivna definitnost)

(2) $\langle a|b\rangle = \overline{\langle b|a\rangle}$, *za sve $a, b \in V$;* (hermitska simetričnost)

(3) $\langle \lambda a|b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle$, *za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$;* (homogenost)

(4) $\langle a + b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle$, *za sve $a, b, c \in V$.* (aditivnost)

Skalar $\langle a|b\rangle$ se zove ***skalarni produkt*** *ili* ***umnožak vektora*** *a i b. Uređeni par (V, s) (ili $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$) nazivamo* ***unitarni prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$.*

Napomena. Broj $\overline{\alpha}$ predstavlja konjugirano kompleksni broj od α.

Uočimo da zbog svojstva (1) vrijedi da je $\langle a|a\rangle$ uvijek realan broj bez obzira na to je li V realan ili kompleksan vektorski prostor. Naime, uvjet nenegativnosti ima smisla samo u $\mathbb{R}$. Nadalje, uočimo da smo u definiciji skalarnog množenja pretpostavili da ono ima svojstvo homogenosti i aditivnosti samo u prvom argumentu. Iz Definicije 1.1.1 lako proizlaze i sljedeća svojstva.

Posebno, ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, onda umjesto (2) imamo

(2') $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$, za sve $a, b \in V$,

jer su realni brojevi upravo su oni kompleksni brojevi koji se podudaraju sa svojim konjugirano kompleksnim brojevima.

Propozicija 1.1.2. *Neka je V unitaran prostor nad $\mathbb{F}$. Tada je*

(3') $\langle a|\lambda b\rangle = \overline{\lambda}\langle a|b\rangle$, *za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$,*

(4') $\langle a|b + c\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle$, *za sve $a, b, c \in V$.*

Dokaz. Svojstvo (2') očito slijedi iz (2),

Pokažimo svojstvo (3'). Vrijedi

$$\langle a|\lambda b\rangle = \{\text{prema } (2)\} = \overline{\langle \lambda b|a\rangle} = \{\text{prema } (3)\} = \overline{\lambda\langle b|a\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle b|a\rangle} = \{\text{prema } (2)\} = \overline{\lambda}\langle a|b\rangle.$$

Slično se pokazuje i svojstvo (4'):

$$\begin{aligned}\langle a|b + c\rangle &= \{\text{prema } (2)\} = \overline{\langle b + c|a\rangle} = \{\text{prema } (4)\} = \overline{\langle b|a\rangle + \langle c|a\rangle} \\ &= \overline{\langle b|a\rangle} + \overline{\langle c|a\rangle} = \{\text{prema } (2)\} = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle.\end{aligned}$$

Uočimo da smo se poslužili svojstvima kompleksnih brojeva: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ i $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. □

Primjenom svojstava iz definicije skalarnog množenja možemo izračunati skalarni umnožak bilo kojih dviju linearnih kombinacija vektora iz unitarnog prostora.

Korolar 1.1.3. *Neka je V unitaran prostor nad $\mathbb{F}$, te neka su $a, b \in V$ oblika*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \;\; b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j,$$

za neke vektore $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in V$ i skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle a_i|b_j\rangle.$$

U svakom vektorskom prostoru istaknutu ulogu ima nulvektor 0_V. Njegov skalarni umnožak s bilo kojim vektorom iznosi 0, kako pokazuje sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.1.4. *Neka je V unitaran prostor nad $\mathbb{F}$. Tada je*

$$\langle a|0_V\rangle = 0, \quad \langle 0_V|a\rangle = 0,$$

za sve $a \in V$.

Dokaz. Neka je $\langle 0_V|a\rangle = \alpha \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\alpha = \langle 0_V|a\rangle = \langle 0_V + 0_V|a\rangle = \langle 0_V|a\rangle + \langle 0_V|a\rangle = \alpha + \alpha,$$

pa je nužno $\alpha = 0$. Očito isto vrijedi i za $\langle a|0_V\rangle = 0$. □

Primjer 1. Na kolegiju *Analitička geometrija* bavili smo se klasičnim prostorom vektora V^3 te definirali skalarni umnožak vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3 \backslash \{\vec{0}\}$ kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

odnosno ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ onda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Pokazali smo da ovako definirano množenje zadovoljava svojstva iz Definicije 1.1.1 pa je stoga V^3 jedan realni unitarni prostor. Isto vrijedi i za V^2. Pritom, svojstva (1) i (2) skalarnog množenja slijede vrlo lako iz same definicije, svojstvo (3) također nije teško izvesti, no treba razmotriti slučajeve s obzirom na predznak skalara λ, dok je dokaz svojstva aditivnosti (4) znatno složeniji. Važno je uočiti da je apsolutna vrijednost skalarnog produkta $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jednaka duljini (modulu) ortogonalne projekcije vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$. Aditivnost onda zapravo geometrijski znači da ortogonalna projekcija zbroja dvaju vektora na smjer nekog vektora ima jednaku duljinu kao zbroj ortogonalnih projekcija pojedinih vektora.

♡

Primjer 2. Pomoću skalarnog produkta u V^2 (odnosno V^3) dokazat ćemo da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Neka je ABC dani trokut i neka je točka H sjecište visina iz vrhova A i B. Dovoljno je pokazati da je tada vektor $\overrightarrow{CH}$ okomit na vektor $\overrightarrow{AB}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BH} \\
&= \{\text{zbog } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0\} = \overrightarrow{BH} \cdot (-\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) \\
&= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana, no uočimo još nešto. Ako umjesto H, kao sjecišta visina, uzmemo D kao bilo koju točku izvan ravnine trokuta ABC, imamo tetraedar (trostranu piramidu) $ABCD$. Sada račun potpuno jednak prijašnjem pokazuje da ako su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ međusobno okomiti bridovi te $\overline{BD}$ i $\overline{CA}$ također međusobno okomiti, onda je i treći par bridova $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ međusobno okomit. Dakle, ako su u tetraedru dva para bridova međusobno okomita, onda to isto vrijedi i za treći par bridova, a primjenom skalarnog množenja to se jednostavno pokazuje (bez potrebe razdvajanja slučajeva jesu li vektori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{CD}$ komplanarni s $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ ili nisu).

♡

Uočimo da smo se kod uvođenja skalarnog umnoška u prostoru V^3 služili svojstvima euklidskog prostora E^3 - mjerom udaljenosti i kutom, to jest svojstvima kojima ne raspolažemo u općem vektorskom prostoru. Štoviše, uskoro ćemo vidjeti upravo obrnutu situaciju, a to je da u svakom unitarnom prostoru možemo uvesti mjeru udaljenosti i kuta zahvaljujući operaciji skalarnog množenja.

U sljedećim primjerima definiramo operacije skalarnog produkta na nekim, dobro poznatim vektorskim prostorima. Pritom napominjemo da skalarni produkt na nekom vektorskom prostoru općenito nije jedinstven pa iz tog razloga često ističemo tzv. *standardni* skalarni produkt.

Primjer 3. Na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ definiramo

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Provjerimo svojstva iz Definicije 1.1.1:

(1) $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$, te $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n = 0$, tj. $x = 0$;

(2) $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i = \sum_{i=1}^n y_ix_i = \langle y|x\rangle$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\langle \lambda x|y\rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_iy_i = \lambda\langle x|y\rangle$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(4) $\langle x + y|z\rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^n x_iz_i + \sum_{i=1}^n y_iz_i = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$, za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Dakle, $\mathbb{R}^n$ je jedan realan unitarni prostor. Ovaj skalarni produkt naziva se *standardni* skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

♡

Primjer 4. Slično kao u prethodnom primjeru definiramo i standardni skalarni produkt na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$. Za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{C}^n$ stavljamo

$$\langle x|y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Svojstva skalarnog produkta pokazujemo analogno kao za standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Stoga je $\mathbb{C}^n$ jedan kompleksan unitarni prostor. Uočimo da je

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

♡

Primjer 5. Na prostoru polinoma s realnim koeficijentima $\mathcal{P}$ za skalarni produkt se najčešće uzima preslikavanje

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

za $p, q \in \mathcal{P}$. Svojstva iz Definicije 1.1.1 vrijede zbog svojstava određenog integrala, pa je $\mathcal{P}$ također realan unitarni prostor. Razmislite zašto vrijedi svojstvo pozitivne definitnosti.

Umjesto segmenta $[0,1]$ može se uzeti i neki drugi segment, npr. $[-1,1]$.

♡

Primjer 6. Na vektorskom prostoru matrica $M_{mn}(\mathbb{R})$, odnosno $M_{mn}(\mathbb{C})$, skalarno množenje može se definirati analogno onom u Primjeru 3, odnosno Primjeru 4. Skalarni produkt matrica $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{R})$ zadaje se kao suma umnožaka svih odgovarajućih koeficijenata na jednakim pozicijama:

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij},$$

dok se u slučaju prostora $M_{mn}(\mathbb{C})$ uzimaju kompleksno konjugirani brojevi koeficijenata druge matrice:

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\overline{b_{ij}},$$

Ovi izrazi mogu se sažeto napisati, pomoću traga umnoška matrica, u obliku

$$\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} AB^t,$$

odnosno

$$\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} AB^*.$$

♡

Teorem 1.1.5 (Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog)**.** *Neka je V unitaran prostor. Vrijedi*

$$|\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle, \tag{1.1}$$

za sve $a, b \in V$. Jednakost u (1.1) postiže se ako i samo ako je $\{a, b\}$ linearno zavisan skup.

Dokaz. Za $a = 0_V$ ili $b = 0_V$ očito vrijedi jednakost (1.1). Neka su $a, b \in V \backslash \{0_V\}$, te $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

$$0 \leq \langle a - \lambda b|a - \lambda b\rangle = \langle a|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle - \overline{\lambda}\langle a|b\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle b|b\rangle.$$

Kako prethodna nejednakost vrijedi za svaki skalar λ, onda će vrijediti i posebno za

$$\lambda = \frac{\langle a|b\rangle}{\langle b|b\rangle}.$$

Uočimo da je

$$\overline{\lambda} = \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle},$$

pa stoga dobivamo

$$0 \leq \langle a|a\rangle - \frac{\langle a|b\rangle}{\cancel{\langle b|b\rangle}}\cancel{\langle b|a\rangle} - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}\langle a|b\rangle + \cancel{\frac{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle^2}\langle b|b\rangle} = \langle a|a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}\langle a|b\rangle.$$

Množenjem prethodne nejednakosti s $\langle b|b\rangle > 0$ i sređivanjem slijedi

$$\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle\overline{\langle a|b\rangle} = |\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle.$$

Preostaje ispitati kada nastupa jednakost u (1.1). Jednakost očito vrijedi ako je bar jedan od vektora a i b jednak 0. Pretpostavimo da su a, b oba različita od 0. Ako je skup $\{a, b\}$ linearno zavisan, postoji $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je $a = \lambda b$. Tada vrijedi

$$|\langle a|b\rangle|^2 = |\langle \lambda b|b\rangle|^2 = |\lambda|^2\langle b|b\rangle^2 = \lambda\overline{\lambda}\langle b|b\rangle^2 = \langle \lambda b|\lambda b\rangle\langle b|b\rangle = \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle.$$

Ako je skup $\{a, b\}$ linearno nezavisan, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi $a - \lambda b \neq 0$ što povlači strogu nejednakost $0 < \langle a-\lambda b|a-\lambda b\rangle$. Posebno, to vrijedi i za $\lambda = \frac{\langle a|b\rangle}{\langle b|b\rangle}$ pa prethodno provedeni račun pokazuje da tada vrijedi stroga nejednakost u (1.1). □

U unitarnom prostoru V^3 očito je iz same definicije skalarnog produkta da vrijedi CSB nejednakost (1.1), jer kosinus bilo kojeg kuta po apsolutnoj vrijednosti iznosi najviše 1. Ako radi jednostavnosti uzmemo vektor $\vec{b}$ modula 1, vidimo da CSB nejednakost zapravo znači da je ortogonalna projekcija bilo kojeg vektora $\vec{a}$ "kraća" od $\vec{a}$ ili najviše jednake duljine kao sam vektor $\vec{a}$. Takva interpretacija vrijedi i općenito u unitarnom prostoru.

Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog poprima, dakako, različite oblike s obzirom na različite načine kako je zadan skalarni produkt na pojedinom vektorskom prostoru. Tako je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{\beta_i}\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right),$$

za sve $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$ i svaki n. Također,

$$\left(\int_0^1 p(t)q(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 p^2(t)dt\right)\left(\int_0^1 q^2(t)dt\right),$$

za polinome p i q s realnim koeficijentima.

Primjer 7. U prostoru $\mathbb{R}^2$ sa standardnim skalarnim produktom, CSB nejednakost znači da za bilo koja dva vektora (a_1, b_1) i (a_2, b_2) vrijedi

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2),$$

što je poznata nejednakost koja postaje očita čim se svede na jednostavniji oblik

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

u kojem prepoznajemo nejednakost

$$0 \leq (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Odgovarajuću nejednakost za $n > 2$ nije tako lako dokazati.

♡

Zadatak 1. *Dokažite da za bilo koje realne brojeve a, b, c, d i e vrijede nejednakosti*

(1) $a + 2b + 11c \leq \sqrt{126(a^2 + b^2 + c^2)}$,

(2) $(3a + 6b + 11c + 43d)^2 \leq 2015(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$,

(3) $(19a - 23b + 6c - 27d + 19e)^2 \leq 2016(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$.

U unitarnom prostoru, dakle u vektorskom prostoru opskrbljenom skalarnim produktom, imamo još jednu mogućnost ispitivanja linearne nezavisnosti nekog skupa vektora. U tu svrhu trebat će nam sljedeća definicija.

Definicija 1.1.6. *Neka je V unitaran prostor i $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Matrica reda k dana s*

$$G(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \cdots & \langle x_1|x_k\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \cdots & \langle x_2|x_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle x_k|x_1\rangle & \langle x_k|x_2\rangle & \cdots & \langle x_k|x_k\rangle \end{pmatrix}$$

*zove se **Gramova matrica**. Njena determinanta naziva se **Gramova determinanta** i označava s $\Gamma(x_1, x_2, ..., x_k)$. Dakle,*

$$\Gamma(x_1, x_2, ..., x_k) = \det G(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Propozicija 1.1.7. *Neka je V unitaran prostor i $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Skup S je linearno nezavisan ako i samo ako je*

$$\Gamma(x_1, x_2, ..., x_k) \neq 0.$$

Dokaz. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ je linearno nezavisan u V ako i samo ako jednadžba

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0_V, \tag{1.2}$$

ima jedinstveno rješenje $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Pomnožimo skalarno jednadžbu (1.2) s vektorima x_1, x_2, ..., x_k redom. Zbog homogenosti i aditivnosti skalarnog produkta dobit ćemo jednadžbe

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1\langle x_1|x_1\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_1\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_1\rangle & = & 0, \\ \alpha_1\langle x_1|x_2\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_2\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_2\rangle & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1\langle x_1|x_k\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_k\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_k\rangle & = & 0, \end{array} \tag{1.3}$$

koje možemo shvatiti kao sustav od k linearnih jednadžbi u nepoznanicama α_1, ..., α_k. Dakle, jednadžba (1.2) implicira sustav linearnih jednadžbi (1.3). Vrijedi i obrat. Svaka jednadžba u (1.3) je oblika

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | x_i\rangle = 0,$$

pa množenjem svake od njih s $\overline{\alpha_i}$ i zbrajanjem dobivamo

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | x_i\rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle.$$

Zbog pozitivne definitnosti skalarnog produkta je upravo $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0_V$. Dakle, jednadžba (1.2) je ekvivalentna sustavu linearnih jednadžbi (1.3).

Uočimo da je matrica sustava (1.3) jednaka transponiranoj Gramovoj matrici, $G(x_1, x_2, ..., x_k)^t$. Stoga sustav (1.3) ima jedinstveno trivijalno rješenje ako i samo ako mu je matrica sustava regularna, odnosno ako i samo ako je determinanta matrice sustava različita od 0, $\det G(x_1, x_2, ..., x_k)^t \neq 0$. Kako su determinanta matrice i njoj transponirane matrice jednake, slijedi tvrdnja propozicije. $\square$

Gramova matrica je uvijek simetrična ako je unitarni prostor realan, a hermitski simetrična ako je prostor kompleksan. Na dijagonali su uvijek nenegativni realni brojevi. Dokazali smo da je Gramova determinanta linearno nezavisnog skupa različita od 0, no može se dokazati da je, štoviše, strogo pozitivna za linearno nezavisan skup. Ako se taj skup sastoji od samo 2 vektora, pozitivnost Γ proizlazi izravno iz CSB nejednakosti. Nadalje, vrijednost Gramove determinante ima i dodatni geometrijski smisao jer je $\sqrt{\Gamma(\vec{a},\vec{b})}$ jednak površini paralelograma razapetog (nekolinearnim) vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dok je $\sqrt{\Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$ jednak volumenu paralelepipeda razapetog (nekomplanarnim) vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u prostoru V^3.

Primjer 8. Ispitat ćemo linearnu nezavisnost skupa $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}^3$, gdje su $a = (0, 1, i)$, $b = (1 + i, 1, 1 - i)$, $c = (-1 + i, 1 + i, 1 + 2i)$, koristeći Gramovu determinantu. Ponovimo, skalarni produkt u $\mathbb{C}^3$ je dan s

$$\langle x|y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3},$$

za $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iz $\mathbb{C}^3$. Sada je

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} \langle a|a\rangle & \langle a|b\rangle & \langle a|c\rangle \\ \langle b|a\rangle & \langle b|b\rangle & \langle b|c\rangle \\ \langle c|a\rangle & \langle c|b\rangle & \langle c|c\rangle \end{pmatrix}.$$

Zbog hermitske simetričnosti vrijedi

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} \langle a|a\rangle & \langle a|b\rangle & \langle a|c\rangle \\ \overline{\langle a|b\rangle} & \langle b|b\rangle & \langle b|c\rangle \\ \overline{\langle a|c\rangle} & \overline{\langle b|c\rangle} & \langle c|c\rangle \end{pmatrix} = G(a,b,c)^*,$$

odnosno Gramova matrica je hermitski simetrična, pa je potrebno izračunati sljedećih 6 skalarnih umnožaka:

$$\langle a|a\rangle = 2,\ \langle a|b\rangle = i,\ \langle a|c\rangle = 3,\ \langle b|b\rangle = 5,\ \langle b|c\rangle = -6i,\ \langle c|c\rangle = 9.$$

Sada je

$$\Gamma(a,b,c) = \begin{vmatrix} 2 & i & 3 \\ -i & 5 & -6i \\ 3 & 6i & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

pa zaključujemo da je skup S linearno zavisan.

♡

1.2 Ortogonalni skupovi

Definicija 1.2.1. *Neka su a i b vektori unitarnog prostora V. Kažemo da su vektori a i b međusobno* ***ortogonalni*** *ako vrijedi $\langle a|b\rangle = 0$. Pišemo $a \perp b$.*

Uočimo da je relacija *biti ortogonalan* simetrična, to jest ako $a \perp b$, onda $b \perp a$. Zaista, $\langle a|b\rangle = 0$ je ekvivalentno s $\langle b|a\rangle = 0$. Stoga i govorimo o *međusobnoj* ortogonalnosti. Kraće ćemo za dva vektora reći da su ortogonalni.

Prema Propoziciji 1.1.4 slijedi da je nulvektor ortogonalan na svaki vektor prostora, to jest $0_V \perp a$ za sve $a \in V$. Nadalje, iz (1.1) dobivamo da je $a \perp a$ ako i samo ako je $a = 0_V$.

Definicija 1.2.2. *Neka je V unitarni prostor. Za podskup $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset V \backslash \{0_V\}$ kažemo da je* ***ortogonalan skup*** *(ili* ***sustav****)* ***vektora*** *ako su a_i i a_j međusobno ortogonalni za sve $1 \leq i < j \leq k$. Jednočlan podskup $\{a_1\} \subset V \backslash \{0_V\}$ smatrat ćemo ortogonalnim.*

Propozicija 1.2.3. *Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ortogonalan podskup unitarnog prostora V. Tada je S linearno nezavisan skup. Posebno, ako je S ortogonalan podskup n-dimenzionalnog unitarnog prostora V, onda je $|S| \leq n$.*

Dokaz. Primijenimo kriterij za linearnu nezavisnost pomoću Gramove determinante (Propozicija 1.1.7). Gramova matrica ortogonalnog skupa je dijagonalna, pritom regularna jer su svi elementi dijagonale različiti od 0 pa je $\Gamma(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$. Stoga je ortogonalan skup vektora linearno nezavisan. □

Napomenimo da se dokaz može provesti i tako da se pretpostavi da za neke skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ vrijedi

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0_V$$

pa se onda skalarnim množenjem ove jednakosti redom s a_1, a_2,..., a_k dobiva $\alpha_1 \langle a_1 | a_1 \rangle = 0$, ..., $\alpha_k \langle a_k | a_k \rangle = 0$, odakle je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Definicija 1.2.4. *Neprazni podskupovi S i T unitarnog prostora V su* ***međusobno ortogonalni****, $S \perp T$, ako je svaki vektor skupa S međusobno ortogonalan sa svakim vektorom skupa T.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je V unitarni prostor i $S, T \subseteq V$ međusobno ortogonalni skupovi. Tada je njihov presjek ili prazan ili jednak $\{0_V\}$.*

Dokaz. Ako je $a \in S \cap T$, onda je $\langle a | a \rangle = 0$, pa je $a = 0_V$. □

Definicija 1.2.6. *Za neprazan podskup S unitarnog prostora V definiramo skup*

$$S^{\perp} = \{x \in V \,:\, x \perp a, \, \forall a \in S\}.$$

Ukoliko je S potprostor od V, onda $S^{\perp}$ nazivamo ***ortogonalnim komplementom*** *od S.*

Iz prethodne definicije jasno je da $S^{\perp}$ nikad nije prazan skup jer sigurno sadrži nulvektor.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $S \neq \emptyset$ podskup unitarnog prostora V. Tada je $S^{\perp}$ vektorski potprostor od V.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $x, y \in S^{\perp}$. Tada je $\langle x | a \rangle = 0$ i $\langle y | a \rangle = 0$ za sve $a \in S$. Nadalje, pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $a \in S$. Vrijedi

$$\langle \alpha x + \beta y | a \rangle = \alpha \langle x | a \rangle + \beta \langle y | a \rangle = 0,$$

pa je $\alpha x + \beta y \in S^{\perp}$. Dakle, $S^{\perp} \leq V$. □

Uočavamo da je $S^{\perp}$ potprostor nekog unitarnog prostora V za *bilo koji* neprazan podskup S - ne nužno potprostor. U slučaju kad je je $S \leq V$ potprostor $S^{\perp}$ nazivamo *ortogonalnim komplementom* od S. To će biti opravdano Propozicijom 1.4.4.

Zadatak 2. *Pokažite da za svaki neprazni podskup S unitarnog prostora V vrijedi:*

$$S^{\perp} = [S]^{\perp} = [S^{\perp}].$$

Zadatak 3. *Za podskupove S i T unitarnog prostora V dokažite sljedeće implikacije:*

(a) *Ako je $S \neq \emptyset$ podskup od T, onda je $T^{\perp}$ potprostor od $S^{\perp}$.*

(b) *Ako S sadrži skup izvodnica za V, onda je $S^{\perp} = \{0_V\}$.*

1.3 Norma i metrika

Neka je V realan ili kompleksan unitaran prostor. Budući da je $\langle a|a\rangle \geq 0$ za sve $a \in V$, dobro je definiran broj
$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$
kojeg nazivamo *norma*, *modul* ili *duljina vektora a*. Uočimo da uz ovu oznaku nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog možemo pisati u obliku
$$|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\|. \tag{1.4}$$

Specijalno, ako je *realan* unitaran prostor i a, b vektori iz $V\backslash\{0_V\}$, tada prema (1.4) slijedi
$$\frac{|\langle a|b\rangle|}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1,$$
odnosno
$$-1 \leq \frac{\langle a|b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1.$$
Stoga postoji jedinstven $\varphi \in [0, \pi]$ takav da je
$$\cos\varphi = \frac{\langle a|b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$
Kažemo da je φ *kut između vektora a* i b, te pišemo $\angle(a, b) = \varphi$. Uočimo da vrijedi relacija
$$\langle a|b\rangle = \|a\|\|b\|\cos(\angle(a, b))$$
koja služi kao definicija skalarnog umnoška u prostoru V^3 budući da u njemu imamo definirane pojmove duljine vektora i kuta između vektora. Napomenimo da pojam kuta između vektora a i b *ne* definiramo ako je $a = 0_V$ ili $b = 0_V$.

Općenito se pojam norme definira neovisno o skalarnom produktu.

Definicija 1.3.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Preslikavanje*
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
koje svakom vektoru $a \in V$ pridružuje realan broj $\|a\|$ sa svojstvima

1. $\|a\| \geq 0$*, pri čemu je* $\|a\| = 0$ *ako i samo ako je* $a = 0_V$,
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$,
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, *(nejednakost trokuta)*

za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$, naziva se ***norma*** *na prostoru V.*

Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zove se ***normirani prostor****.*

Uočimo da norma svakom vektoru pridružuje nenegativan realan broj.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitarni prostor. Preslikavanje*
$$a \mapsto \sqrt{\langle a|a\rangle}$$
s prostora V u polje $\mathbb{R}$ je norma na prostoru V.

Dokaz. Označimo s $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$, za $a \in V$. Provjerimo da preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ zadovoljava sva tri svojstva iz Definicije 1.3.1.

Svojstvo (1) slijedi izravno iz pozitivne definitnosti skalarnog produkta. Pokažimo svojstvo (2). Koristeći Definiciju 1.1.1 i Propoziciju 1.1.2 dobivamo

$$\|\lambda a\| = \sqrt{\langle \lambda a|\lambda a\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle a|a\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle a|a\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle a|a\rangle} = |\lambda|\|a\|,$$

za sve $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Za provjeru svojstva (3) koristimo svojstva hermitske simetričnosti i aditivnosti skalarnog produkta. Vrijedi

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \langle a|a\rangle + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle + \langle b|b\rangle = \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a|b\rangle + \|b\|^2.$$

Kako je $\operatorname{Re}\langle a|b\rangle \le |\operatorname{Re}\langle a|b\rangle| \le |\langle a|b\rangle|$ i $|\langle a|b\rangle| \le \|a\|\|b\|$ prema (1.4), slijedi

$$\|a+b\|^2 \le \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2.$$

□

Prema upravo dokazanoj propoziciji zaključujemo da je svaki unitaran prostor i normiran. Još kažemo da je norma oblika $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ *inducirana* skalarnim produktom. Prirodno je pitati se vrijedi li obrat, odnosno može li se u normiranom prostoru uvesti skalarni produkt koji inducira upravo početnu normu. Odgovor je - ne uvijek, a pokazat ćemo uz koji uvjet se to može učiniti.

Propozicija 1.3.3 (Relacija paralelograma)**.** *Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitarni prostor s induciranom normom $\|\cdot\|$. Vrijedi*

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \tag{1.5}$$

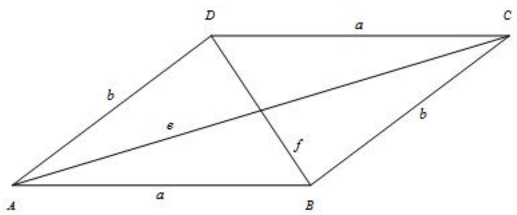
za sve $a, b \in V$.

Dokaz. Relaciju pokazujemo raspisivanjem:

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle+\langle a-b|a-b\rangle = \|a\|^2+\cancel{\langle a|b\rangle}+\cancel{\langle b|a\rangle}+\|b\|^2+\|a\|^2-\cancel{\langle a|b\rangle}-\cancel{\langle b|a\rangle}+\|b\|^2.$$

□

Uočimo da relacija paralelograma izražava poznato svojstvo paralelograma u euklidskoj ravnini koje kaže da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak zbroju kvadrata duljina njegovih stranica. (Prisjetite se dokaza iskazanog svojstva pomoću Pitagorinog poučka.)



Slika 1.1: Svojstvo paralelograma $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$

Propozicija 1.3.4. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Prostor V je unitaran prostor čiji skalarni produkt inducira normu $\|\cdot\|$ ako i samo ako norma $\|\cdot\|$ zadovoljava relaciju paralelograma (1.5).*

Dokaz. Nužnost smo pokazali Propozicijom 1.3.3. Pokažimo obrat. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ stavljamo

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2),$$

a za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) + \frac{i}{4}(\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2).$$

Provjerimo da smo na ovaj način definirali jedno skalarno množenje na V. Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Provjeravamo redom svojstva iz Definicije 1.1.1.

(1) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{4}(\|a+a\|^2 - \|0_V\|^2) = \frac{1}{4}(2\|a\|)^2 = \|a\|^2 \geq 0$, te $\langle a|a\rangle = 0$ ako i samo $\|a\| = 0$, to jest $a = 0_V$.

(2) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) = \frac{1}{4}(\|b+a\|^2 - |-1|^2\|(b-a)\|^2) = \langle b|a\rangle$.

(4) Pokažimo aditivnost. Prema definiciji je

$$\langle a|b+c\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b+c\|^2 - \|a-b-c\|^2).$$

Raspišimo desnu stranu prethodne jednakosti koristeći relaciju paralelograma

$$\begin{aligned}
\|a+b+c\|^2 - \|a-b-c\|^2 &= \underbrace{\|a+b+c\|^2 + \|a+b-c\|^2}_{\text{rel. paral.}} \underbrace{- \|\underbrace{a+b-c}_{=a-c+b}\|^2 - \|\underbrace{a-b-c}_{=a-c-b}\|^2}_{\text{rel. paral.}} \\
&= 2\|a+b\|^2 + 2\|c\|^2 - 2\|a-c\|^2 - 2\|b\|^2 \\
&= \|a+b\|^2 + \underbrace{\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2}_{\text{rel. paral.}} - \|a-b\|^2 + 2\|c\|^2 \\
&\quad - \|a-c\|^2 \underbrace{- \|a-c\|^2 - \|a+c\|^2}_{\text{rel. paral.}} + \|a+c\|^2 - 2\|b\|^2 \\
&= \|a+b\|^2 + \cancel{2\|a\|^2} + \cancel{2\|b\|^2} - \|a-b\|^2 + \cancel{2\|c\|^2} - \|a-c\|^2 - \cancel{2\|a\|^2} - \cancel{2\|c\|^2} + \|a+c\|^2 - \cancel{2\|b\|^2} \\
&= \underbrace{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}_{4\langle a|b\rangle} + \underbrace{\|a+c\|^2 - \|a-c\|^2}_{4\langle a|c\rangle}
\end{aligned}$$

Zbog simetričnosti je i

$$\langle a+b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle.$$

(3) Homogenost slijedi iz aditivnosti, ali ne sasvim jednostavno. Dat ćemo skicu tog dokaza. Zaista,

$$\langle 2a|b\rangle = \langle a+a|b\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|b\rangle = 2\langle a|b\rangle.$$

Induktivno dalje slijedi da je

$$\langle na|b\rangle = n\langle a|b\rangle,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $\lambda = \frac{1}{n}$ prema upravo pokazanom imamo

$$n\langle \lambda a|b\rangle = \langle n\lambda a|b\rangle = \langle a|b\rangle.$$

Množenjem prethodne relacije s λ slijedi

$$\langle \lambda a|b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle.$$

Za $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$ se tvrdnja lako pokaže, pa možemo ustanoviti da prethodna jednakost vrijedi za sve $\lambda = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, to jest za sve $\lambda \in \mathbb{Q}$. Konačno, tvrdnja vrijedi za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ jer je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ (to jest svaki realan broj možemo prikazati kao limes niza racionalnih brojeva). □

Primjer 9. *Neke norme na prostoru* $\mathbb{R}^n$*.* Neka je $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Definiramo:

- $\|a\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}$,
- $\|a\|_1 = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$,
- $\|a\|_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}$,
- $\|a\|_p = (|\alpha_1|^p + \dots + |\alpha_n|^p)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Sva ova preslikavanja zadovoljavaju svojstva norme (što za neke nije očito ni lako za pokazati). Nazivamo ih maks-norma, 1-norma (ili "taxicab" norma), 2-norma (ili euklidska norma) i p-norma, redom. Napominjemo da ovo nisu sve norme koje postoje na $\mathbb{R}^n$.

Ako je $n \geq 2$, među navedenim normama na prostoru $\mathbb{R}^n$ samo je norma $\|\cdot\|_2$ inducirana skalarnim produktom. Pokušajte pronaći primjere vektora za koje ne vrijedi relacija paralelograma za norme $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$.

♡

Napomena 1.3.5. *Neka je* $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *ortogonalan skup nekog unitarnog prostora. Tada je*

$$\|a_1 + a_2 + \dots + a_k\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \dots + \|a_k\|^2,$$

gdje je $\|\cdot\|$ *norma inducirana skalarnim produktom. Za* $k = 2$ *dobivamo relaciju koja u elementarnoj geometriji zapravo predstavlja* Pitagorin poučak *za pravokutni trokut.*

Uočimo da je to poseban slučaj relacije u realnom unitarnom prostoru

$$\|a_1 + a_2\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + 2\langle a_1|a_2\rangle,$$

koja odgovara Kosinusovom poučku *u geometriji trokuta.*

Definicija 1.3.6. *Vektor* a *iz normiranog prostora* V *takav da je*

$$\|a\| = 1$$

zove se ***jedinični*** *ili* ***normirani*** *vektor. Kažemo da smo* ***normirali*** *vektor* $a \in V \backslash \{0_V\}$ *ako smo mu pridružili vektor*

$$a_0 = \frac{1}{\|a\|} a.$$

Pomoću norme lako se može definirati i udaljenost između dva vektora. Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor, te $a, b \in V$. *Udaljenost* vektora a od vektora b smisleno je definirati kao

$$d(a, b) = \|a - b\|. \tag{1.6}$$

Uočimo da smo ovime definirali *funkciju udaljenosti*, odnosno *metriku*, na prostoru V:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Primijetimo još da se u unitarnim prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ ovako definirana udaljenost dva vektora (radijvektora) $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ podudara s euklidskom udaljenosti krajnjih točaka A i B tih radijvektora.

Općenito, pojam metrike se definira za bilo koji neprazan skup i bez strukture vektorskog prostora.

Definicija 1.3.7. *Neka je S bilo koji neprazan skup. Preslikavanje*

$$d : S \times S \to \mathbb{R}$$

naziva se ***metrika*** *na skupu S ako vrijede sljedeća svojstva*

1. $d(x, y) \geq 0$, *za sve* $x, y \in S$,
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *za sve* $x, y \in S$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *za sve* $x, y, z \in S$.

Lako se može ustanoviti da je svaki normirani prostor uistinu i metrički pri čemu je metrika dana s (1.6).

Primjer 10. *Neke metrike na prostoru $\mathbb{R}^n$.* Neka je $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$

- $d(a, b) = \max\{|\alpha_1 - \beta_1|, \ldots, |\alpha_n - \beta_n|\}$,
- $d(a, b) = |\alpha_1 - \beta_1| + \cdots + |\alpha_n - \beta_n|$,
- $d(a, b) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)^2}$,
- $d(a, b) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & a \neq b, \\ 0, & a = b \end{array} \right.$ (diskretna metrika).

Usporedite ove primjere metrika s primjerima normi iz Primjera 9. Može li se svaka od tih metrika dobiti iz neke norme, pomoću relacije (1.6)? ♡

Sljedeće zadatke riješite pomoću CSB nejednakosti (1.1), odnosno Teorema 1.1.5.

Zadatak 4. *Ako je $a = (1 - i, i, 1 + i)$ vektor iz kompleksnog unitarnog prostora $\mathbb{C}^3$, odredite i opišite skup svih vrijednosti skalarnog produkta $\langle a|x\rangle$ pri čemu je x jedinični vektor iz $\mathbb{C}^3$. Skicirajte taj skup u kompleksnoj ravnini.*

Zadatak 5. *Neka je $a = (2, 0, 1, 7)$ vektor iz unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom i neka je S podskup svih jediničnih vektora u $\mathbb{R}^4$. Odredite skup svih vrijednosti skalarnog produkta $\langle a|x\rangle$ za x iz S. Ako je taj skup omeđen, napišite vektore za koje se poprima najveća i najmanja vrijednost.*

Zadatak 6. *Neka su a, b vektori iz unitarnog prostora V te $\| \;\|$ norma zadana skalarnim produktom na V. Ako je $\|a\| = 2$ i $\|b\| = 1$, pokažite da vrijedi: $\|a + b\|\|a - b\| \geq 3$. (Uočite da u prostoru V^2 ova tvrdnja znači da umnožak duljina dijagonala paralelograma sa stranicama duljina 2 i 1 iznosi barem 3).*

1.4 Ortogonalizacija baze. Ortogonalna projekcija

U ovom odjeljku opisat ćemo postupak kojim linearno nezavisan skup vektora nekog unitarnog prostora možemo zamijeniti ortogonalnim skupom normiranih vektora koji razapinju istu ljusku kao i početni skup.

Definicija 1.4.1. *Skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ unitarnog prostora V je **ortonormiran** ako je ortogonalan i $\|a_i\| = 1$, za sve $i = 1, \ldots, k$, to jest ako je*

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij},$$

*za sve $i, j = 1, \ldots, k$. Specijalno, ako je S baza prostora V i uz to ortonormiran skup onda S nazivamo **ortonormiranom bazom** i ponekad kratko pišemo ONB.*

U daljnjem izlaganju bit će vrlo korisno služiti se ortonormiranom bazom unitarnog prostora, odnosno nekog njegovog potprostora, budući da se svaki račun koji obuhvaća skalarno množenje vektora zapisanih u bazi bitno pojednostavljuje ako se izabere upravo ortonormirana baza (ONB). Također, pri dokazivanju nekih činjenica bit će važno poslužiti se upravo s ONB.

Naime, ako su vektori x i y unitarnog prostora V dimenzije n prikazani u nekoj općenitoj bazi $\{a_1, ..., a_n\}$ s

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \;\; y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i,$$

onda je njihov skalarni produkt

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle a_i | a_j \rangle.$$

U načelu imamo n^2 pribrojnika u sumi na desnoj strani prethodne jednakosti. No, ukoliko je ova baza ortonormirana, dakle ako je $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$, ta će se suma svesti na svega n pribrojnika koji ne moraju biti jednaki 0:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Prisjetimo se da je u Primjerima 3 i 4 upravo ovakvom formulom bilo zadano skalarno množenje na prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, a za bazu (- standardnu) u kojoj su prikazani vektori konstatiralo se da je ONB. Sada smo imali obrnutu situaciju. Ako se u proizvoljnom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru poslužimo ortonormiranom bazom, to će rezultirati identičnom formulom kao u navedenim primjerima. Možemo reći da ti primjeri (3 i 4) zapravo daju *tipični oblik skalarnog produkta.* Štoviše, po uzoru na Primjere 3 i 4, možemo formulama jednakog oblika uvesti skalarno množenje na bilo kojem konačnodimenzionalnom prostoru, realnom odnosno kompleksnom. U tu svrhu izaberemo bilo koju bazu $\{a_1, \ldots, a_n\}$ takvog prostora i dalje radimo pomoću koordinata vektora u toj bazi, sasvim analogno kao u Primjeru 3 za realni, odnosno Primjeru 4 za kompleksni prostor. Ovako uvedeno skalarno množenje očito ovisi o izboru baze, a izabrana baza tada je ONB dotičnog unitarnog prostora.

Koeficijenti x_i u prikazu vektora $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ u ortonormiranoj bazi mogu se lako izraziti pomoću skalarnog produkta vektora x s vektorima te ONB, budući da skalarnim množenjem s vektorom a_j dobivamo

$$\langle x | a_j \rangle = x_j \langle a_j | a_j \rangle = x_j$$

za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ pa je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|a_i\rangle a_i.$$

Nadalje, za vektor zapisan u ONB i norma poprima jednostavniji oblik:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

što je upravo oblik norme $\|x\|_2$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ (Primjer 9). Ujedno, uz pomoć prethodno pokazanog, imamo i

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x|a_i\rangle|^2}.$$

Dakako, metrika inducirana normom također poprima poznati oblik (Primjer 10):

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

Kasnije ćemo vidjeti da se i važna operacija ortogonalnog projiciranja vektora na potprostor može znatno pojednostavniti primjenom ONB tog potprostora.

U nekim primjerima unitarnih prostora kojima se najčešće bavimo kanonska baza ujedno je i ONB, npr. u $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$, također i u $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$. U prostoru V^3 odnosno $V^3(O)$ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je standardna oznaka za ONB, no to nije neka čvrsta, uvijek ista baza. Međutim, kanonska baza nije uvijek i ortonormirana, kao npr. u prostorima polinoma sa skalarnim množenjem zadanim pomoću integrala na segmentu (Primjer 5). Uvjerite se računom kako npr. $\{1, t, t^2\}$ nije ONB u prostoru $\mathcal{P}_2$ (- prostoru polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg od 3) sa skalarnim produktom iz Primjera 5.

Zbog navedenog, nećemo uvijek imati "gotovu" ONB kojom se možemo poslužiti nego ćemo trebati konstruirati takvu bazu. Posebno, često ćemo trebati ONB koja nije standardna (kanonska ili podskup kanonske, ako je riječ o potprostoru), nego takvu ONB koja je prikladna za pojedinu situaciju. Primjerice, kod ortogonalne projekcije na potprostor trebat ćemo ONB tog potprostora, a za ortogonalni komplement potprostora bit će korisna ONB prostora dobivena proširivanjem ONB potprostora. Dakle, općenito ne će nam biti dostatno samo poznavati neku ONB prostora, nego nam treba postupak kojim bilo koji linearno nezavisni podskup unitarnog prostora možemo povezati s ortonormiranim skupom, tako da oba ta skupa razapinju istu linearnu ljusku, dakle potprostor. Taj će se postupak odvijati u više "etapa", tako da se u svakoj od njih sačuva linearna ljuska tj. potprostor razapet vektorima polaznog skupa.

Prisjetimo se što smo naučili na kolegiju *Analitička geometrija*. Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linearno nezavisan skup u prostoru V^3. Dakle, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni vektori. Vektor

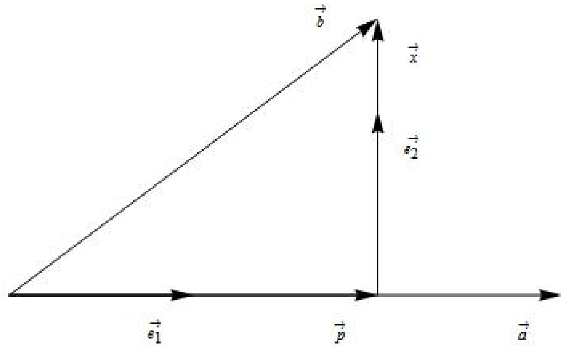
$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\, \vec{a}$$

predstavlja ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b}$ u smjeru vektor $\vec{a}$. Uočimo da je

$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\, \vec{a},$$

ortogonalan na smjer vektora $\vec{a}$. Zaista,

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}(\vec{a}\cdot\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}|^2=0.$$



Slika 1.2: Ortogonalna projekcija vektora $\vec{b}$ u smjeru vektora $\vec{a}$

Normirajmo vektore $\vec{a}$ i $\vec{x}$:

$$\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{e_2}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Uočimo da je $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ ortonormiran skup, te vrijedi

$$[\vec{a}]=[\vec{e_1}],\ [\vec{a},\vec{b}]=[\vec{e_1},\vec{e_2}],$$

jer je očito $\vec{e_2}\in[\vec{a},\vec{b}]$. Stoga smo od linearno nezavisnog skupa $\{\vec{a},\vec{b}\}$ došli do ortonormiranog skupa $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ koji je sačuvao linearnu ljusku.

Sličan postupak možemo napraviti i za tri nekomplanarna vektora, to jest linearno nezavisan skup $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ u V^3. Prva dva ortonormirana vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ dobivamo upravo opisanim postupkom. Dakle,

$$\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

te

$$\vec{e_2}=\frac{\vec{b'}}{|\vec{b'}|},\ \vec{b'}=\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}.$$

Treći vektor dobit ćemo tako da od vektora $\vec{c}$ oduzmemo njegovu ortogonalnu projekciju na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno ravninu razapetu vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, to jest vektor

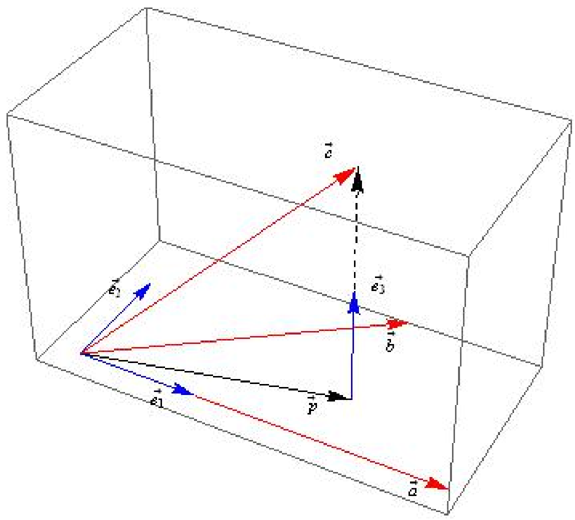
$$\vec{p}=(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}+(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}.$$

Dakle,

$$\vec{c'}=\vec{c}-\vec{p}=\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e_1})\vec{e_1}-(\vec{c}\cdot\vec{e_2})\vec{e_2}.$$

Vektor $\vec{c'}$ je ortogonalan na vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, pa ga još samo moramo normirati,

$$\vec{e_3}=\frac{\vec{c'}}{|\vec{c'}|}.$$



Slika 1.3: Ortogonalna projekcija vektora $\vec{c}$ na $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}]$

Opisanim postupkom došli smo do ortonormiranog skupa, štoviše i ortonormirane baze za V^3, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ za koju vrijedi

$$[\vec{a}] = [\vec{e_1}],\ [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}],\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}] = V^3.$$

Opisani postupak ćemo generalizirati za proizvoljan linearno nezavisan podskup nekog konačno-dimenzionalnog unitarnog prostora, te će taj generalizirani postupak poslužiti i kao dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 1.4.2. *Neka je V unitarni prostor, te $\{a_1, \dots, a_k\}$ linearno nezavisan podskup od V. Tada postoji ortonormirani podskup $\{e_1, \dots, e_k\}$ u V takav da je*

$$[a_1, \dots, a_j] = [e_1, \dots, e_j],$$

za sve $j = 1, \dots, k$.

Dokaz. Najprije uočimo da je $a_1 \neq 0_V$ jer je element linearno nezavisnog podskupa. Sada stavimo

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}.$$

Jasno, $[a_1] = [e_1]$. Neka je nadalje

$$b_2 = a_2 - \langle a_2|e_1\rangle e_1.$$

Uočimo da je

$$\langle b_2|e_1\rangle = \langle a_2|e_1\rangle - \langle a_2|e_1\rangle \underbrace{\langle e_1|e_1\rangle}_{=1} = 0,$$

odnosno $b_2 \perp e_1$. Ustanovimo da je $b_2 \neq 0_V$. Zaista, u suprotnom bi vrijedilo $a_2 = \langle a_2|e_1\rangle e_1$, odnosno $a_2 \in [e_1] = [a_1]$ što nije moguće jer je skup $\{a_1, a_2\}$ linearno nezavisan. Normiranjem vektora b_2 dobivamo vektor

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|},$$

koji je jedinični i ortogonalan na e_1. Dakle, $\{e_1, e_2\}$ je ortogonalan skup i očito vrijedi $[a_1, a_2] = [e_1, e_2]$.

Pretpostavimo da smo za neki $1 < l < k$ konstruirali ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_l\}$ sa svojstvom

$$[a_1, \ldots, a_j] = [e_1, \ldots, e_j],$$

za sve $j = 1, \ldots, l$. Treba odrediti jedinični vektor koji je ortogonalan na skup $\{e_1, \ldots, e_l\}$, a nalazi se u potprostoru $[a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}]$. Uočimo da je taj potprostor jednak $[e_1, \ldots, e_l, a_{l+1}]$. Stoga možemo najprije potražiti vektor, označimo ga s b_{l+1}, kao linearnu kombinaciju vektora $e_1, \ldots, e_l, a_{l+1}$ i zatim iskoristiti postavljeni uvjet ortogonalnosti. Dakle, skalarni umnožak vektora

$$b_{l+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_l e_l + \lambda_{l+1} a_{l+1}$$

s vektorima e_j za sve $1 \leq j \leq l$ treba biti jednak nuli. Time dobivamo homogeni sustav od l linearnih jednadžbi u $l + 1$ nepoznanici:

$$\lambda_j + \lambda_{l+1} \langle a_{l+1} | e_j \rangle = 0, \ j = 1, \ldots, l$$

koji ima 1-parametarsko rješenje

$$\lambda_{l+1} = \mu, \ \lambda_j = -\mu \langle a_{l+1} | e_j \rangle, \ j = 1, \ldots, l.$$

Stoga vektor

$$b_{l+1} = -\mu \langle a_{l+1} | e_1 \rangle e_1 - \mu \langle a_{l+1} | e_2 \rangle e_2 - \cdots - \mu \langle a_{l+1} | e_l \rangle e_l + \mu a_{l+1} = \mu (a_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle a_{l+1} | e_i \rangle e_i)$$

ispunjava uvjet ortogonalnosti na skup $\{e_1, \ldots, e_l\}$ za svaki skalar μ. Primijetimo da je vektor

$$a_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle a_{l+1} | e_i \rangle e_i$$

različit od 0_V, jer je $\{e_1, \ldots, e_l, a_{l+1}\}$ linearno nezavisan skup. Stoga je $b_{l+1} \neq 0_V$ za $\mu \neq 0$.

Normiranjem vektora b_{l+1} dobivamo vektor

$$e_{l+1} = \frac{a_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle a_{l+1} | e_i \rangle e_i}{\| a_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle a_{l+1} | e_i \rangle e_i \|} \tag{1.7}$$

i time smo konstruirali ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}\}$.

Provjerimo još da vrijedi

$$[a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}] = [e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}].$$

Iz (1.7) lako se vidi da se vektor a_{l+1} nalazi u linearnoj ljusci $[e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}]$ pa je onda, zbog pretpostavke $[a_1, \ldots, a_l] = [e_1, \ldots, e_l]$, ispunjeno $[a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}] \leq [e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}]$. Budući da su to potprostori jednake dimenzije $l + 1$, moraju se podudarati.

Konačno, tvrdnja teorema slijedi primjenom principa matematičke indukcije. □

Postupak opisan u dokazu Teorema 1.4.2 naziva se *Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije*. Dakle, algoritam za ortonormiranje linearno nezavisnog skupa $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset V$ glasi:

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|},$$

$$e_{j+1} = \frac{a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle a_{j+1} | e_i \rangle e_i}{\| a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle a_{j+1} | e_i \rangle e_i \|}, \ j = 1, \ldots, k-1.$$

Korolar 1.4.3. *U svakom konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru postoji ortonormirana baza.*

Dokaz. Prema Teoremu 1.4.2 svaki linearno nezavisan skup, pa stoga i baza prostora može se Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirati do ortonormirane baze. □

Za neprazan podskup S unitarnog prostora V u odjeljku 1.2 definirali smo

$$S^\perp = \{x \in V \,:\, \langle x|y\rangle = 0, \forall y \in S\},$$

te pokazali da je $S^\perp$ potprostor od V. Sada ćemo se baviti ortogonalnim komplementom $L^\perp$ nekog potprostora L.

Propozicija 1.4.4. *Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor, te L njegov potprostor. Tada je $L^\perp$ direktni komplement potprostora L, to jest*

$$L \dotplus L^\perp = V.$$

Dokaz. Prisjetimo se, M je direktni komplement potprostora L ako je $L \cap M = \{0_V\}$ i $L + M = V$. Kako su L i $L^\perp$ ortogonalni skupovi prema Propoziciji 1.2.5 slijedi da je $L \cap L^\perp = \{0_V\}$. (Uočimo da njihov presjek ne može biti prazan jer su L i $L^\perp$ potprostori.) Sada pokazujemo da je $L + L^\perp = V$. Razlikujemo dva slučaja, trivijalni i netrivijalni:

1. *slučaj.* Ako je $L = \{0_V\}$, onda je $L^\perp = V$, pa je $L + L^\perp = V$. Nadalje, ako je $L = V$, onda je $L^\perp = \{0_V\}$, pa vrijedi isto.

2. *slučaj.* Neka je $\dim L^\perp = k$, $1 \leq k \leq n-1$, te $\{a_1, \ldots, a_l\}$ neka baza za L. Nadopunimo tu bazu do baze za V,

$$\{a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_n\},$$

te ju ortonormiramo Gram-Schmidtovim postupkom,

$$\{e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_n\}.$$

Prema Teoremu 1.4.2 vrijedi da je $\{e_1, \ldots, e_l\}$ baza za L jer je

$$[e_1, \ldots, e_l] = [a_1, \ldots, a_l] = L.$$

Nadalje, prema svojstvu ortogonalne baze

$$\langle e_i|e_j\rangle = 0,$$

za sve $i = 1, \ldots, l$, $j = l+1, \ldots, n$, pa je

$$\langle x|e_j\rangle = 0,$$

za sve $x \in L$ i $j = l+1, \ldots, n$, odnosno

$$e_{l+1}, \ldots, e_n \in L^\perp.$$

Dakle, $\{e_{l+1}, \ldots, e_n\}$ je linearno nezavisan podskup od $L^\perp$ pa je $n - l \leq \dim L^\perp = k$. S druge strane, suma potprostora L i $L^\perp$ je direktna, pa iz $L \dotplus L^\perp \leq V$ slijedi $l + k \leq n$, odnosno $k \leq n - l$. Stoga je $k = n - l$ i $\dim(L \dotplus L^\perp) = n = \dim V$, to jest $L \dotplus L^\perp = V$. □

Korolar 1.4.5. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora. Vrijedi*

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Dokaz. Neka je $x \in L$. Tada je $\langle x|y\rangle = 0$ za sve $y \in L^\perp$ pa slijedi i da je $x \in (L^\perp)^\perp$, dakle $L \subseteq (L^\perp)^\perp$.

S druge strane, za $x \in (L^\perp)^\perp$ prema Propoziciji 1.4.4 vrijedi da je $x = a + b$ za $a \in L$ i $b \in L^\perp$. Kako je $\langle x|y\rangle = 0$ za sve $y \in L^\perp$, to za $y = b$ imamo $\langle a + b|b\rangle = 0$, odnosno $\langle a|b\rangle + \langle b|b\rangle = 0$. Otud je $\langle b|b\rangle = 0$ jer su a i b ortogonalni. Stoga $b = 0_V$ i $x = a \in L$, to jest $(L^\perp)^\perp \subseteq L$. □

Napomenimo da se suma međusobno ortogonalnih potprostora M i L zove *ortogonalna suma* i označava s $M \oplus L$. Dakle, prema Propoziciji 1.4.4 imamo da je $L \oplus L^\perp = V$. Uočimo da je ortogonalni komplement uvijek jedinstven (za razliku od direktnog komplementa). Nadalje, kako se svaki vektor $x \in V$ može jedinstveno prikazali u obliku

$$x = a + b,$$

gdje je $a \in L$ i $b \in L^\perp$, možemo definirati pridruživanje

$$V \ni x \mapsto a \in L.$$

Ovo preslikavanje naziva se *ortogonalna projekcija* na potprostor L i označava s $p : V \to L$, a vektor $p(x) = x_L$ zovemo *ortogonalnom projekcijom* vektora x na potprostor L.

Prikaz bilo kojeg vektora u ONB prostora lako je izračunati, jer koeficijenti u tom prikazu jednaki su njegovim skalarnim umnošcima s pojedinim vektorima iz ONB. Također, ortogonalnu projekciju vektora na potprostor možemo izravno izračunati ako već imamo ili odredimo neku ortonormiranu bazu tog potprostora. Zapravo smo još u postupku ortogonalizacije vidjeli kako se zadani vektor rastavlja u zbroj dva vektora, od kojih se jedan nalazi u potprostoru razapetom ortonormiranom bazom, a drugi je ortogonalan na taj potprostor.

Propozicija 1.4.6. *(a) Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Tada vektor $x \in V$ ima u toj bazi prikaz*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

(b) Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i neka je $\{e_1, \dots, e_l\}$ ortonormirana baza tog potprostora L. Ako je x bilo koji vektor prostora V, njegova ortogonalna projekcija $p(x) = x_L$ na potprostor L određena je s

$$x_L = \sum_{i=1}^{l} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

Dokaz. (a) Za prikaz vektora x u ONB, kao što je već napisano u uvodu, dovoljno je skalarno pomnožiti linearnu kombinaciju $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ redom s vektorima e_j, $j = 1, 2, \dots, n$ pa se dobije $x_i = \langle x|e_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(b) Postupimo kao u 2. slučaju u dokazu Propozicije 1.4.4. Bazu $\{e_1, \dots, e_l\}$ potprostora L nadopunimo do ortonormirane baze $\{e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_n\}$ prostora V, a onda je iz prikaza vektora x u toj bazi jasno da je upravo vektor $x_L = \sum_{i=1}^{l} \langle x|e_i\rangle e_i$ ortogonalna projekcija x na potprostor L. Naime, $x = x_L + (x - x_L)$ i pritom je $x_L \in L$, a $x - x_L$ je ortogonalan na svaki vektor iz baze od L, time i ortogonalan na L. □

Kad raspolažemo pojmom udaljenosti vektora, možemo mjerenje udaljenosti proširiti i na udaljenost pojedinog vektora od različitih podskupova vektorskog prostora, najčešće potprostora. To odgovara poznatim pojmovima udaljenosti točke od pravca ili od ravnine u euklidskom prostoru. Uzmemo li, primjerice, neku točku T euklidskog prostora i ravninu Σ te promatramo vrijednosti $d(T,P)$ za sve točke P ravnine Σ, udaljenost $d(T,\Sigma)$ definiramo kao najmanju od svih tih vrijednosti. Udaljenost točke od ravnine shvaćamo, dakle, kao najkraću među udaljenostima točke T i svih točaka ravnine, a onda se pokazuje da se ta najmanja vrijednost postiže točno onda kad se izabere ortogonalna projekcija T' točke T na ravninu Σ.

Sasvim analogno postupa se općenito u metričkom prostoru (X,d). Udaljenost točke $T \in X$ od podskupa $Y \subseteq X$ definira se s

$$d(T,Y) = \inf\{d(T,P) \,:\, P \in Y\}.$$

Uzima se infimum, dakle najveća donja međa skupa brojeva $d(T,P)$ jer je taj skup svakako omeđen odozdo s 0, a općenito se infimum ne mora postići za neku određenu točku podskupa Y, tj. taj skup brojeva ne mora sadržavati najmanju vrijednost. Primjerice, u metričkom prostoru $\mathbb{R}^2$ (euklidskoj ravnini), uzmemo li otvoreni jedinični krug $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 < 1\}$, udaljenost točke $T = (2,0)$ od tog podskupa iznosi 1, ali ne postoji točka P skupa K takva da vrijedi $d(T,P) = 1$.

Sasvim analogno postupamo u normiranom i, posebno, unitarnom vektorskom prostoru $(V, \|\;\|)$ odnosno $(V, \langle\,|\,\rangle)$. Obično nas zanima udaljenost vektora $a \in V$ od nekog potprostora $L \leq V$. Definira se

$$d(a,L) = \inf\{d(a,x) : x \in L\}.$$

Naravno, $a \in L$ ako i samo ako je $d(a,L) = 0$.

Ako je V konačnodimenzionalni unitarni prostor, možemo biti sigurni da postoji najmanji realni broj u skupu vrijednosti $\{d(a,x) \,:\, x \in L\}$, a geometrijsko tumačenje najkraće udaljenosti vektora od potprostora potpuno odgovara onom u euklidskom prostoru. To je iskazano sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.4.7. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i $a \in V$. Tada je*

$$d(a,L) = d(a,a_L),$$

gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L.

Dokaz. Za $a \in V$ i $x \in L$ vrijedi

$$d(a,x) = \|a-x\| = \|a_L + a' - x\|,$$

pri čemu je $a = a_L + a'$ za $a_L \in L$ i $a' \in L^\perp$. Nadalje,

$$\|a_L + a' - x\| = \|\underbrace{a_L - x}_{\in L} + \underbrace{a'}_{\in L^\perp}\| \geq \|a'\| = \|a - a_L\|,$$

jer je $(a_L - x) \perp a'$ pa vrijedi $\|(a_L - x) + a'\|^2 = \|a_L - x\|^2 + \|a'\|^2 \geq \|a'\|^2$. □

Korolar 1.4.8. *Neka je L potprostor unitarnog prostora V i $a \in V$. Tada je*

$$d(a,L^\perp) = \|a_L\|,$$

gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L.

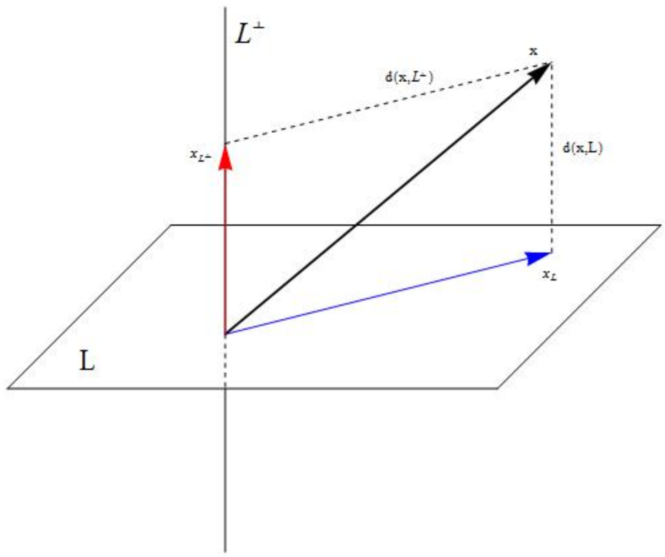
Dokaz. Prema Propoziciji 1.4.7 je

$$d(a, L^{\perp}) = d(a, a_{L^{\perp}}),$$

gdje je $a_{L^{\perp}}$ ortogonalna projekcija vektora a na potprostor $L^{\perp}$. Zbog jedinstvenosti prikaza $a = a_L + a'$ za $a_L \in L$ i $a' \in L^{\perp}$ (Propozicija 1.4.4) je $a' = a_{L^{\perp}}$, pa je

$$d(a, a_{L^{\perp}}) = d(a, a') = \|a - a'\| = \|a_L\|.$$

□



Slika 1.4: Udaljenost vektora x od potprostora L i $L^{\perp}$

Primjer 11. *Odredimo udaljenost vektora* $a = (-3, 7, 4, 0)$ *od potprostora* $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} \leq \mathbb{R}^4$.

Rješenje. Uočimo da je $L = [b]$ za $b = (1, 1, 1, 1)$. Vrijedi da je $d(a, L) = \|a - a_L\|$ gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L. Za vektor a_L vrijedi

$$a_L = \langle a|e_1\rangle e_1,$$

gdje je $\{e_1\}$ ortonormirana baza potprostora L, to jest $e_1 = \frac{b}{\|b\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Stoga je $a_L = (2, 2, 2, 2)$ i

$$d(a, L) = \sqrt{(-3-2)^2 + (7-2)^2 + (4-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{58}.$$

Možemo riješiti zadatak i na drugi način. Vrijedi

$$d(a, L) = \inf\{\|(-3, 7, 4, 0) - (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)\| \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Funkcija

$$f(\lambda) = \|(-3, 7, 4, 0) - (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)\|^2 = 4\lambda^2 - 16\lambda + 74$$

postiže minimum za $\lambda = 2$, $f(2) = 58$. ♡

Napomena 1.4.9. *Naglasimo još jedanput da Propozicija 1.4.7 pokazuje da se u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru udaljenost bilo kojeg vektora a od potprostora L* efektivno postiže, *to jest da je infimum iz definicije $d(a, L)$ zapravo i najmanja vrijednost među svim udaljenostima vektora a i pojedinih vektora iz potprostora L. Svojstvo konačnodimenzionalnosti ovdje je bitno za primjenu Propozicije 1.4.7. U unitarnom prostoru koji nije konačnodimenzionalan to svojstvo ne vrijedi općenito.*

Napomena 1.4.10. *Propozicija 1.4.7 govori da je ortogonalna projekcija vektora na potprostor njemu najbliži vektor u tom potprostoru. Ta se činjenica koristi za određivanje najbolje aproksimacije vektora pomoću vektora iz nekog potprostora, koji se odlikuje stanovitim posebnim svojstvom. U Primjeru 11 to je potprostor $L = [(1, 1, 1, 1)]$ u kojem svi vektori imaju jednake koordinate, a vektoru $a = (-3, 7, 4, 0)$ najbliži je u tom potprostoru vektor $a_L = (2, 2, 2, 2)$. Nije slučajnost da je skalar 2 upravo aritmetička sredina koordinata vektora a. Ovu činjenicu nije teško pokazati općenito za vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i njegovu "najbolju aproksimaciju" vektorom kojem su sve koordinate jednake.*

Primijetimo još da se ortogonalni komplement potprostora L u ovom primjeru sastoji od svih vektora kojima je zbroj koordinata jednak 0. Najbolja aproksimacija vektora $a = (-3, 7, 4, 0)$ takvim vektorom stoga je vektor $a - a_L = (-5, 5, 2, -2)$.

U sljedećim zadacima vidjet ćemo još neke primjere najboljih aproksimacija pomoću ortogonalne projekcije na posebni potprostor.

Zadatak 7. *U Linearnoj algebri 1 važan primjer rastava vektorskog prostora u direktnu sumu potprostora bio je rastav prostora kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{R})$ kao sume potprostora simetričnih i antisimetričnih matrica.*

(a) Provjerite da je ta suma ujedno i ortogonalna suma potprostora, uz standardni skalarni produkt.

(b) Odredite simetričnu i antisimetričnu matricu koje su najbliže matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ u odgovarajućim potprostorima te usporedite udaljenosti matrice A od oba potprostora. (Pritom, budući da znamo jednostavni rastav kvadratne matrice kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice, nije potrebno posebno izračunavati ortogonalne projekcije pomoću ortonormiranih baza).

(c) Odredite neku matricu iz prostora $M_2(\mathbb{R})$, različitu od nulmatrice, koja je jednako udaljena od potprostora simetričnih i antisimetričnih matrica.

Zadatak 8. *Odredite najbolju aproksimaciju funkcije $f(x) = \sin x$ pomoću polinoma stupnja najviše 3, u unitarnom prostoru neprekidnih funkcija na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa standardnim skalarnim produktom. (Prostor nije konačnodimenzionalan, ali dovoljno je promatrati potprostor razapet funkcijom f i polinomima stupnja najviše 3).*

Zadatak 9. *Neka je V unitarni prostor i L njegov potprostor. Pretpostavimo da je a takav vektor da za normu njegove ortogonalne projekcije a' na L vrijedi $\|a'\| \leq 5/2$, a za normu njegove ortogonalne projekcije a'' na $L^\perp$ vrijedi $\|a''\| \leq 3/2$. Kolika može biti najveća vrijednost $\|a\|$? Obrazložite.*

Zadatak 10. *Neka je (e_1, e_2, e_3, e_4) ortonormirana baza realnog unitarnog prostora V i neka je $a \in V$ takav da udaljenost a od svakog od potprostora $[\{e_i, e_j\}]$, $1 \leq i < j \leq 4$, iznosi 3. Izračunajte normu vektora a.*

Zadatak 11. *Za* $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0\} < \mathbb{R}^4$, *odredite skup* $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : d(x, L) = d(x, L^\perp)\}$. *Je li* S *potprostor od* $\mathbb{R}^4$*? Obrazložite.*

Poglavlje 2

Linearni operatori

2.1 Definicija i osnovna svojstva

U proučavanju matematičkih struktura posebno važnu ulogu redovito imaju preslikavanja koja su karakteristična za te strukture time što su "usklađena" s operacijama i relacijama na tim strukturama. Kod vektorskih prostora takva preslikavanja nazivaju se *linearni operatori.* Izraz *operator* tradicionalno se uzima za preslikavanje u kontekstu vektorskih prostora. Kroz brojne i raznovrsne primjere uvjerit ćemo se da su mnoga, otprije nam poznata preslikavanja, zapravo linearni operatori kad ih promatramo na odgovarajućim vektorskim prostorima. Taj pristup omogućit će nam da lakše uočimo zajednička svojstva takvih preslikavanja i da naučimo kako ih korisno primjenjivati.

Linearne operatore najčešće ćemo označavati velikim slovima poput A, B, C, ... ali sama oznaka za neko preslikavanje, bila ona A, B ili uobičajeno f, g, ne će sama po sebi podrazumijevati da je riječ o linearnom operatoru, ako se to izričito ne pretpostavi.

Definicija 2.1.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje*

$$A : V \to W$$

*naziva se **linearni operator** s V u W ako vrijede svojstva*

(1) $A(a + b) = A(a) + A(b)$, (aditivnost)

(2) $A(\alpha a) = \alpha A(a)$, (homogenost)

za sve $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Skup svih linearnih operatora s V u W označavat ćemo s $\mathcal{L}(V, W)$.

Uočimo da je pretpostavka da su V i W vektorski prostori nad istim poljem bitna zbog toga što u svojstvu homogenosti (2) na lijevoj strani imamo množenje skalarom vektora iz V, a na desnoj množenje istim tim skalarom vektora iz W. Nadalje, moguće je, dakako, da isti prostor V bude i domena i kodomena linearnog operatora. U tom slučaju skup svih linearnih operatora s V u V označavamo jednostavno s $\mathcal{L}(V)$. Primijetimo i to da iz same definicije još ne vidimo postoji li uvijek za bilo koje vektorske prostore V i W nad istim poljem neki linearni operator s V u W, ali to će uskoro postati jasno iz nekih jednostavnih primjera.

Korisno je uočiti da su svojstva aditivnosti i homogenosti, uzeta zajedno, ekvivalentna svojstvu

(3) $A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b)$. (linearnost)

Provjerite sami da iz svojstava (1) i (2) slijedi (3), i obrnuto!

Dakle, $A : V \to W$ je linearni operator ako i samo ako vrijedi svojstvo (3) za sve $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Nadalje, svaki linearni operator linearnu kombinaciju vektora preslikava u linearnu kombinaciju slika tih vektora i to s jednakim koeficijentima. To znači da vrijedi

$$A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(a_i),$$

što se lako pokazuje matematičkom indukcijom po broju vektora (k). (Učinite to!)

Propozicija 2.1.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator. Tada je*

(i) $A(0_V) = 0_W$,

(ii) $A(-a) = -A(a)$, *za sve* $a \in V$.

Dokaz. Pokažimo svojstvo (i),

$$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = \{\text{aditivnost}\} = A(0_V) + A(0_V),$$

pa je $A(0_V) = 0_W$.

Svojstvo (ii) slijedi zbog svojstva homogenosti za $\alpha = -1$. To svojstvo možemo dokazati i bez primjene homogenosti, ako se poslužimo već dokazanim svojstvom (i). Naime, za bilo koji a iz V imamo

$$A(a + (-a)) = A(a) + A(-a)$$

pa budući da je

$$A(a + (-a)) = A(0_V) = 0_W,$$

vrijedi $A(a) + A(-a) = 0_W$, odakle slijedi da je $A(-a) = -A(a)$, suprotni vektor u grupi $(W, +)$. □

Primjer 12. *Nuloperator.* Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, te $c \in W$. Konstantno preslikavaje

$$C : V \to W, \quad C(x) = c, \quad \forall x \in V,$$

linearni je operator ako i samo ako je $c = 0_W$. Zaista, ako je C linearan operator, onda tvrdnja slijedi izravno iz Propozicije 2.1.2(i), a obrat provjerom svojstava iz definicije linearnog operatora.

Konstantno preslikavanje koje svakom vektoru iz V pridružuje nulvektor prostora W je linearni operator kojeg nazivamo *nuloperator s V u W*.

♡

Spomenuli smo da postojanje linearnog operatora nije očito iz same definicije, 2.1.1. Iz Primjera 12 zaključujemo da skup $\mathcal{L}(V, W)$ sadrži nuloperator, odnosno $\mathcal{L}(V, W)$ je neprazan za bilo koja dva vektorska prostora V i W nad istim poljem. Uskoro ćemo vidjeti (kroz primjere) da je skup $\mathcal{L}(V, W)$ zapravo znatno "bogatiji", čim kodomena W nije trivijalni prostor koji sadrži samo nulvektor. No, nuloperator je jedini univerzalni primjer linearnog operatora kojem su domena i kodomena bilo koja dva vektorska prostora nad istim poljem.

Na temelju Definicije 2.1.1 riješite sljedeći zadatak.

Zadatak 12. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno zavisan podskup prostora V. Dokažite da je onda i $\{A(a_1), \ldots, A(a_n)\}$ linearno zavisan podskup prostora W.*

Navedimo još dvije propozicije koje pokazuju da se svojstvo linearnosti operatora "dobro ponaša" s obzirom na kompoziciju preslikavanja, a u slučaju kad je linearni operator bijektivan, svojstvo linearnosti ima i inverzni operator.

Propozicija 2.1.3. *Kompozicija linearnih operatora je linearni operator.*

Dokaz. Neka su $A : U \to V$ i $B : V \to W$ linearni operatori. Tada za preslikavanje $B \circ A : U \to W$ vrijedi

$$\begin{aligned}(B \circ A)(\alpha a + \beta b) &= B(A(\alpha a + \beta b)) = \{A \text{ je l.o.}\} = B(\alpha A(a) + \beta A(b)) \\ &= \{B \text{ je l.o.}\} = \alpha B(A(a)) + \beta B(A(b)) = \alpha(B \circ A)(a) + \beta(B \circ A)(b).\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.1.4. *Neka je $A : V \to W$ bijektivan linearan operator. Tada je njegov inverz $A^{-1} : W \to V$ također linearan operator.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in W$, te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Tada postoje jedinstveni $x_1, x_2 \in V$ za koje je $A(x_i) = y_i$, odnosno $x_i = A^{-1}(y_i)$ za $i = 1, 2$. Vrijedi

$$\begin{aligned}A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1) &= A^{-1}(\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)) = \{A \text{ je l.o.}\} = \underbrace{A^{-1}A}_{=I}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}(y_1) + \alpha_2 A^{-1}(y_2).\end{aligned}$$

□

Kod (linearnih) operatora uobičajen je izraz da operator A *djeluje na vektor* $x \in V$ tako da mu pridruži vektor $y \in W$. To samo znači da $A(x) = y$.

Primjerice, nuloperator djeluje tako da svakom vektoru pridruži nulvektor. Skalarni operator djeluje tako da svaki vektor pomnoži zadanim skalarom.

2.2 Primjeri linearnih operatora

Primjer 13. *Skalarni operator.* Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $\lambda \in F$. Preslikavanje $A : V \to V$ dano s

$$A(x) = \lambda x,$$

je linearan operator. Zaista, zbog svojstava operacije množenja skalarom u vektorskom prostoru, te komutativnosti množenja u polju vrijedi

$$\begin{aligned}A(\alpha x + \beta y) &= \lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y) = (\lambda\alpha)x + (\lambda\beta)y = (\alpha\lambda)x + (\beta\lambda)y \\ &= \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \alpha A(x) + \beta A(y).\end{aligned}$$

Operator A se naziva *skalarni operator s koeficijentom* λ.

Specijalno, za $\lambda = 0$ imamo operator koji svaki vektor iz V preslikava u nulvektor, to jest $A(x) = 0_V$, odnosno *nuloperator* o kojem je već bilo govora u Primjeru 12.

Za $\lambda = 1$, operator se naziva *jedinični operator* ili *identiteta* i označava s $I : V \to V$, $I(x) = x$, za svaki $x \in V$.

♡

Prethodni primjer u slučaju prostora $V^2(O)$ i $\lambda \neq 0$ opisuje poznatu nam *homotetiju euklidske ravnine*, sa središtem u odabranom ishodištu O i s koeficijentom λ. U Primjeru 16 vidjet ćemo da su još neka poznata preslikavanja euklidske ravnine i prostora, promatrana kao preslikavanja odgovarajućih prostora radijvektora, također linearni operatori na tim prostorima.

Primjer 14. *Skalarno množenje.* Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te a neki vektor iz V. Preslikavanje

$$S : V \to \mathbb{F}, \quad S(x) = \langle x|a\rangle, \quad \forall x \in V,$$

je linearni operator što slijedi direktno iz svojstava (3) i (4) Definicije 1.1.1, odnosno iz svojstava homogenosti i aditivnosti skalarnog produkta. Je li i preslikavanje $x \mapsto \langle a|x\rangle$ linearni operator s V u $\mathbb{F}$?

♡

Primjer 15. *Vektorsko množenje.* Neka je $\vec{a}$ vektor iz prostora V^3. Preslikavanje

$$C : V^3 \to V^3, \quad C(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}, \quad \forall \vec{x} \in V^3,$$

je linearni operator zbog svojstava kvaziasocijativnosti i distributivnosti prema zbrajanju operacije vektorskog množenja. Je li i preslikavanje $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ linearni operator na V^3? ♡

Primjer 16. *Transformacije ravnine.* Na kolegiju *Analitička geometrija* obrađene su neke geometrijske transformacije ravnine kao što su osna simetrija (zrcaljenje), centralna simetrija, rotacija i translacija. Sada ćemo ustanoviti da su neka od navedenih preslikavanja linearni operatori. Napomenimo da ćemo ova preslikavanja shvatiti kao preslikavanja s $V^2(O)$ u $V^2(O)$, to jest na prostoru radijvektora, umjesto na euklidskom prostoru E^2. Naglasimo da su pravci kroz ishodište O tada 1-dimenzionalni potprostori. Analogno vrijedi i za $V^3(O)$ gdje su ravnine kroz ishodište O 2-dimenzionalni potprostori.

(a) Neka je $Z : V^2(O) \to V^2(O)$ *zrcaljenje*, to jest *osna simetrija* s obzirom na pravac kroz ishodište $y = kx$. Tada je

$$\frac{Z(\vec{v}) + \vec{v}}{2} = \vec{p},$$

gdje je $\vec{p}$ ortogonalna projekcija na pravac $y = kx$, odnosno na vektor $\vec{s} = (1, k) = \vec{i} + k\vec{j}$. Dakle,

$$\vec{p} = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s},$$

odnosno

$$Z(\vec{v}) = 2\frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s} - \vec{v}. \tag{2.1}$$

Zapis zrcaljenja je jednostavniji ako umjesto vektora $\vec{s}$ koristimo jedinični vektor, odnosno njemu normirani vektor $\vec{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$:

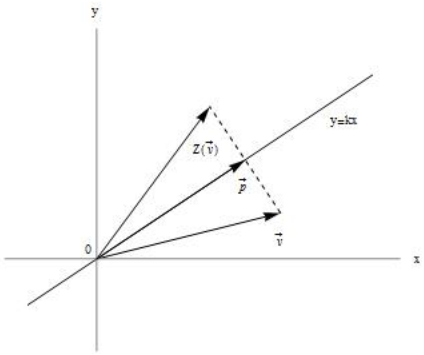
$$Z(\vec{v}) = 2(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - \vec{v}.$$

Zbog svojstava u unitarnom prostoru $V^2(O)$ vrijedi

$$Z(\vec{v} + \vec{w}) = 2(\vec{s_0} \cdot (\vec{v} + \vec{w}))\vec{s_0} - (\vec{v} + \vec{w}) = 2(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} + 2(\vec{s_0} \cdot \vec{w})\vec{s_0} - \vec{v} - \vec{w} = Z(\vec{v}) + Z(\vec{w}),$$

te

$$Z(\alpha\vec{v}) = 2(\vec{s_0} \cdot (\alpha\vec{v}))\vec{s_0} - (\alpha\vec{v}) = 2\alpha(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - (\alpha\vec{v}) = \alpha((2\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - \vec{v}) = \alpha Z(\vec{v}),$$



Slika 2.1: Zrcaljenje s obzirom na pravac $y = kx$

za sve $\vec{v}, \vec{w} \in V^2(O)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, Z je linearan operator. (Prisjetite se koja svojstva operacija u $V^2(O)$ su potrebna da bi se pokazale prethodne dvije jednakosti.)

Za $\vec{v} = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ iz (2.1) dobivamo sljedeću formulu

$$Z(a\vec{i} + b\vec{j}) = \frac{(1-k^2)a + 2kb}{1+k^2}\vec{i} + \frac{2ka + (k^2-1)b}{1+k^2}\vec{j}. \tag{2.2}$$

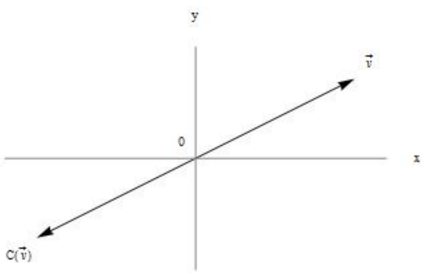
Specijalno, zrcaljenje s obzirom na x-os (to jest za $k = 0$) dano je s

$$Z_x(a\vec{i} + b\vec{j}) = a\vec{i} - b\vec{j},$$

a s obzirom na y-os (što možemo shvatiti kao limes kad k teži u ∞) s

$$Z_y(a\vec{i} + b\vec{j}) = -a\vec{i} + b\vec{j}.$$

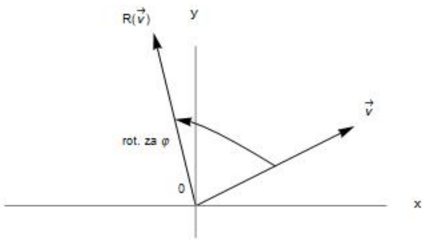
(b) *Centralna simetrija* s obzirom na ishodište je preslikavanje $C : V^2(O) \to V^2(O)$, $C(\vec{v}) = -\vec{v}$. Očito je i C linearan operator. Specijalno, to je homotetija s koeficijentom -1.



Slika 2.2: Centralna simetrija s obzirom na ishodište

(c) *Rotacija* oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smjeru (obrnuto smjeru kazaljke na satu) je preslikavanje $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$,

$$R_\varphi(a\vec{i} + b\vec{j}) = (a\cos\varphi - b\sin\varphi)\vec{i} + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)\vec{j}. \tag{2.3}$$



Slika 2.3: Rotacija oko ishodišta za kut φ

Rotaciju smo mogli zapisati i u obliku

$$R_\varphi(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{r_1})\vec{i} + (\vec{v}\cdot\vec{r_2})\vec{j},$$

gdje su $\vec{r_1} = (\cos\varphi)\vec{i} + (-\sin\varphi)\vec{j}$ i $\vec{r_2} = (\sin\varphi)\vec{i} + (\cos\varphi)\vec{j}$. Iz ovog oblika rotacije lako možemo zaključiti da je R_φ linearan operator. Zaista, skalarni produkt je homogena i aditivna operacija (ili vidi Primjer 14), a operacija množenja vektora skalarom zadovoljava svojstva kvaziasocijativnosti i distributivnosti prema zbrajanju vektora.

Uočimo da je rotacija za kut $\varphi = \pi$ jednaka centralnoj simetriji, $R_\pi = C$, dok je rotacija za kut $\varphi = 2\pi$ identiteta, $R_{2\pi} = I$.

(d) *Translacija* za vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ je preslikavanje $T : V^2(O) \to V^2(O)$, $T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$. Kada bi T bio linearan operator onda bi prema Propoziciji 2.1.2 trebalo vrijediti $T(\vec{0}) = \vec{0}$, no $T(\vec{0}) = \vec{u} \neq \vec{0}$. Dakle, translacija T **nije** linearan operator, osim u trivijalnom slučaju kada je $\vec{u} = \vec{0}$ i $T = I$ (identiteta).

Općenito, uvijek trebati pripaziti ostavlja li pojedina transformacija ishodište čvrstim (tj. preslikava li ishodište O u sebe) kako bi pripadno preslikavanje radijvektora preslikavalo nulvektor sam u sebe, što je nužan uvjet za linearni operator (ali ne i dovoljan).

♡

Primjer 17. Neka je A matrica tipa (m,n) s elementima iz polja $\mathbb{F}$, to jest $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Preslikavanje $L : M_{n,1}(\mathbb{F}) \to M_{m,1}(\mathbb{F})$ dano s

$$L(X) = AX$$

očito je linearan operator jer je množenje matrica kvaziasocijativno i distributivno prema zbrajanju matrica. No, vrijedi i više. Uskoro ćemo pokazati da se djelovanje svakog linearnog operatora čija su domena i kodomena konačnodimenzionalni vektorski prostori može reprezentirati kao umnožak odgovarajuće matrice i stupčane matrice (vektora).

♡

Primjer 18. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Realna funkcija realne varijable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oblika $f(x) = ax+b$ naziva se *linearna funkcija.* Budući da se svako polje može shvatiti i kao vektorski prostor nad samim sobom, možemo se pitati je li linearna funkcija f ujedno i linearan operator. Očito to ne će biti za $b \neq 0$. Zaista, $f(0) = b \neq 0$, pa nije ispunjen uvjet iz Propozicije 2.1.2 za linearan operator. Dakle, funkcija oblika $f(x) = ax + b$ jest linearan operator ako i samo ako je $b = 0$. Funkcija $x \mapsto ax + b$, $b \neq 0$, spada među tzv. *afine funkcije* a možemo na nju gledati i kao kompoziciju linearnog operatora i translacije.

♡

Primjer 19. *Deriviranje i integriranje na prostoru polinoma.* Neka je $\mathcal{P}$ prostor polinoma. Preslikavanje $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ svakom polinomu pridružuje njegovu derivaciju, odnosno $D(p) = p'$. Ako je $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, tada je

$$(D(p))(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}.$$

Zbog svojstava deriviranja (ili izravnom provjerom prethodne formule), slijedi da je D linearan operator kojeg nazivamo *operator deriviranja.* U ovom kolegiju smo se ograničili samo na rad s konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, pa ćemo operator deriviranja uglavnom promatrati kao preslikavanje $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$.

Slično, preslikavanje $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ svakom polinomu pridružuje njegov integral,

$$(S(p))(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau,$$

odnosno za $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$,

$$(S(p))(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k t^{k+1}$$

je linearan operator kojeg nazivamo *operator integriranja.* Uglavnom ćemo se baviti njegovom restrikcijom $S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$.

♡

Primjer 20. *Kompleksno konjugiranje.* Prisjetimo se, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom, ali i kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ kojeg označavamo s $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Neka je $K : \mathbb{C}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}_\mathbb{R}$ preslikavanje koje svakom kompleksnom broju pridružuje njegov konjugirano kompleksni broj, to jest $K(z) = \overline{z}$. Za $z, w \in \mathbb{C}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$K(\alpha z + \beta w) = \overline{\alpha z + \beta w} = \overline{\alpha z} + \overline{\beta w} = \overline{\alpha}\,\overline{z} + \overline{\beta}\,\overline{w} = \{\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \alpha\,\overline{z} + \beta\,\overline{w} = \alpha K(z) + \beta K(w),$$

pa je K linearan operator.

Uvjerite se da $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $K(z) = \overline{z}$, nije linearan operator.

♡

Navedimo i neka preslikavanja čiju smo važnost dosad mogli uočiti u linearnoj algebri, a koja nisu linearni operatori.

Primjer 21. *Determinanta.* Preslikavanje $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koje kvadratnoj matrici A pridružuje skalar $\det A$ nije linearni operator, čim je $n > 1$. Ponajprije, svojstvo aditivnosti ne vrijedi. Uvjerite se sami da postoje takve matrice A i B za koje $\det(A+B)$ nije jednako $\det A + \det B$. Zašto ne vrijedi ni svojstvo homogenosti?

♡

Primjer 22. *Norma.* U normiranom vektorskom prostoru $(V, \|\cdot\|)$ preslikavanje $V \to \mathbb{R}$ koje vektoru a pridružuje $\|a\|$ nije linearni operator osim u trivijalnom slučaju kada V sadrži samo nulvektor. (Zašto?)

♡

2.3 Zadavanje linearnog operatora djelovanjem na bazu. Matrični prikaz.

U ovom odsječku pretpostavljamo da su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Sljedećom tvrdnjom pokazat ćemo važnu činjenicu da je *svaki linearan operator s V u W jednoznačno zadan svojim djelovanjem na (bilo kojoj) bazi prostora V.*

Propozicija 2.3.1. *Neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora V, te $b_1, \dots, b_n$ vektori iz prostora W, ne nužno različiti. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ za kojeg vrijedi*

$$A(e_i) = b_i,\ \ i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Iz uvjeta postavljenih na traženo preslikavanje $A : V \to W$, dakle da to bude linearni operator koji vektore odabrane baze prostora V preslikava redom u (po volji) zadane vektore prostora W, možemo lako ustanoviti kako bi A morao djelovati na *svaki* vektor iz prostora V.

Ako vektor $x \in V$ ima prikaz

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

u zadanoj bazi (e), onda za linearni operator A vrijedi

$$A(x) = A(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A(e_1) + \cdots + \alpha_n A(e_n) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n. \tag{2.4}$$

Budući da je prikaz vektora u bazi jedinstven, formulom (2.4) na jednoznačan način zadano je jedno preslikavanje $V \to W$. Kaže se da je to preslikavanje zadano *proširenjem po linearnosti* s djelovanja na bazu do djelovanja na cijelom prostoru V.

Preostaje samo provjeriti da je tako zadano preslikavanje linearni operator. (Uočimo da zasad znamo da je nužno da linearni operator koji ima tražena svojstva, ako postoji, djeluje baš na taj način, ali da to samo po sebi još ne znači da je preslikavanje A linearno). Bude li to ispunjeno, preslikavanje A bit će i jedinstveni linearni operator s traženim svojstvom, budući da je preslikavanje (funkcija) općenito jednoznačno zadano svojom domenom, kodomenom i djelovanjem na svaki element domene. Neka su $x, y \in V$ pri čemu su

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \ y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

njihovi jedinstveni prikazi u bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Prema definiciji preslikavanja A je

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i,\ \ A(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i.$$

Vrijedi

$$A(x+y) = A(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i) = \{\text{def. od } A\} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i = A(x)+A(y),$$

te za $\lambda \in \mathbb{F}$

$$A(\lambda x) = A(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i) = \{\text{def. od } A\} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)b_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = \lambda A(x).$$

Dakle, A zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti, odnosno A je linearan operator. $\square$

Zahvaljujući tvrdnji Propozicije 2.3.1, linearni operator možemo identificirati kao neki poznati nam operator već na temelju njegova djelovanja na bilo koju bazu. Primjerice, na prostoru $V^2(O)$ postoji beskonačno mnogo preslikavanja koja dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ preslikavaju u vektore $\vec{a'}$ i $\vec{b'}$ takve da je $\|a'\| = \|a\|$, $\|b'\| = \|b\|$ i $\angle(\vec{a}, \vec{a'}) = \angle(\vec{b}, \vec{b'}) = \pi/3$. No, postoji jedan jedini *linearni operator* na tom prostoru koji tako djeluje na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To je operator rotacije za kut $\pi/3$ i on svaki vektor tog prostora preslikava u vektor dobiven njegovom rotacijom za isti kut.

Slično, ako neki *linearni* operator na prostoru $\mathcal{P}_2$ (polinoma stupnja najviše 2) djeluje tako da polinomu $t - t^2$ pridružuje polinom $1 - 2t$, polinomu $t + t^2$ pridružuje polinom $1 + 2t$, a polinomu $3 + 2t + t^2$ pridružuje $2 + 2t$, onda je taj operator nužno operator deriviranja (jer na elemente jedne baze djeluje kao operator deriviranja).

Na temelju prethodne Propozicije 2.3.1 uvest ćemo sada matrični prikaz linearnog operatora. Taj prikaz bit će posebno praktičan za račune koji obuhvaćaju djelovanje linearnih operatora, a pritom će se steći i potpuniji uvid u međusobnu povezanost linearnih operatora, matrica i sustava linearnih jednadžbi. Ovdje pretpostavljamo da su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, $\dim V = n \geq 1$, $\dim W = m \geq 1$, nad istim poljem $\mathbb{F}$. Nije isključeno da se V i W podudaraju, no u slučaju $V = W$ moguć je izbor različitih baza za V kao domenu i za V kao kodomenu linearnog operatora.

Uočimo da Propozicija 2.3.1 pokazuje da je djelovanje linearnog operatora, uz navedene pretpostavke, jednoznačno određeno s mn skalara, čim su izabrane baze za V i W. Naime, operator je zadan slikama vektora baze domene V, a to je n vektora iz prostora W od kojih je svaki određen s m koeficijenta u svom prikazu u bazi prostora W. Tih mn skalara bit će raspoređeno u m redaka i n stupaca matrice na način kako slijedi.

Neka je $A : V \to W$ linearan operator,

$$(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

baza za V, te

$$(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$$

baza za W. Iako smo bazu definirali kao podskup, npr. $\{e_1, \ldots, e_n\}$, podrazumijevat ćemo da se radi o uređenom skupu, dakle o n-torki $(e_1, \ldots, e_n)$ u kojoj je poredak bitan. Ustanovili smo da je linearan operator jedinstveno određen svojim djelovanjem na bazi, to jest da je određen vektorima $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ iz W. Svaki od tih vektora jedinstveno prikazujemo u bazi (f). Dakle, za vektor $A(e_j)$, $1 \leq j \leq n$, postoje jedinstveni skalari $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ takvi da je

$$A(e_j) = \alpha_{1j} f_1 + \alpha_{2j} f_2 + \cdots + \alpha_{mj} f_m.$$

Oznake koeficijenata ovdje su prilagođene zapisu matrice tipa (m, n) tako da u j-tom stupcu budu upisani koeficijenti u prikazu vektora $A(e_j)$ u bazi (f). Time smo linearnom operatoru A na jednoznačan način pridružili matricu

$$[A]_{(f,e)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica $[A]_{(f,e)}$ naziva se *matrica linearnog operatora* A u paru baza (e) i (f), odnosno *matrični zapis (prikaz ili reprezentacija) linearnog operatora* A u paru baza (e) i (f). Naglasimo da matrični zapis linearnog operatora A bitno ovisi o izboru para baza (e) i (f). Zato nazive tih baza eksplicitno navodimo u oznaci matričnog zapisa operatora A, s tim da pišemo (f, e) baš u tom redoslijedu (najprije baza kodomene pa zatim baza domene) iz razloga koji će postati jasan iskazom sljedeće propozicije.

Uočimo još važnu činjenicu da je preslikavanje $A \mapsto [A]_{(f,e)}$ bijekcija s $\mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{F})$. (Obrazložite tu tvrdnju!)

Svaki vektor $x \in V$ prikazuje se jedinstveno kao linearna kombinacija vektora baze za V, tj. postoje jedinstveni skalari $x_1, \ldots, x_n$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Stoga je vektor x potpuno određen stupčanom matricom

$$[x]_{(e)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{F}).$$

Uočimo da smo na ovaj način dobro definirali bijektivno preslikavanje $x \mapsto [x]_{(e)}$, $V \to M_{n,1}(\mathbb{F})$. Taj postupak, odnosno i samo preslikavanje, nazivamo *koordinatizacijom prostora V*. Matricu $[x]_{(e)} = (x_i)$ zvat ćemo *matričnim zapisom* ili *koordinatnom matricom* ili kratko *matricom vektora x u bazi (e)*.

Nadalje će posebno biti važno kako se djelovanje linearnog operatora na vektor može realizirati množenjem odgovarajućih matričnih zapisa.

Propozicija 2.3.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator, $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V, te $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza prostora W. Tada vrijedi*

$$[A(x)]_{(f)} = [A]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)}.$$

Dokaz. Neka je $[A]_{(f,e)} = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, te $[x]_{(e)} = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{F})$. Vrijedi

$$A(x) = A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) f_i.$$

Stoga je matrični zapis vektora $A(x)$ u bazi (f) jednak

$$[A(x)]_{(f)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [A]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)}.$$

□

Primjer 23. *Matrični zapisi nekih linearnih operatora iz odjeljka 2.2.*

- Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V, $\lambda \in \mathbb{F}$, te $A : V \to V$, $A(x) = \lambda x$ *operator homotetije*. Jer je

$$A(e_i) = \lambda e_i, \; i = 1, \ldots, n,$$

dobivamo

$$[A]_{(e,e)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I.$$

Uočimo da bez obzira na izbor baze za prostor V, operator A ima uvijek isti matrični zapis λI.

- Neka je $Z : V^2(O) \to V^2(O)$ *zrcaljenje* s obzirom na pravac $y = kx$, te $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza za $V^2(O)$. Prema (2.2) je

$$Z(\vec{i}) = \frac{1-k^2}{1+k^2}\vec{i} + \frac{2k}{1+k^2}\vec{j},\ Z(\vec{j}) = \frac{2k}{1+k^2}\vec{i} + \frac{k^2-1}{1+k^2}\vec{j},$$

pa je

$$[Z]_{(e,e)} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}.$$

Ako za bazu prostora $V^2(O)$ odaberemo $(f) = \{\vec{s}, \vec{t}\}$ gdje je $\vec{s} = (1, k) = \vec{i} + k\vec{j}$ i $\vec{t} = (-k, 1) = -k\vec{i} + \vec{j}$, dobit ćemo sljedeći matrični zapis operatora zrcaljenja

$$[Z]_{(f,f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zaista, $Z(\vec{s}) = \vec{s}$ jer je $\vec{s}$ vektor u smjeru pravca $y = kx$, a $Z(\vec{t}) = -\vec{t}$ jer je $\vec{t}$ okomit na spomenuti pravac. (To isto možemo dobiti i direktnim uvrštavanjem u formulu (2.2).) Matrice $[Z]_{(e,e)}$ i $[Z]_{(f,f)}$ se razlikuju (osim kada je $k = 0$) pa je za zaključiti da **matrični zapis operatora ovisi o izboru baza**.

- Neka je $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$ *rotacija* oko ishodišta za kut φ, te $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, tada je prema (2.3)

$$[R_\varphi]_{(e,e)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- Neka su $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ i $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ operatori deriviranja i integriranja na konkretnim prostorima polinoma. Želimo odrediti njihove matrične zapise u paru kanonskih baza $(\mathcal{E}_3) = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ i $(\mathcal{E}_2) = \{p_0, p_1, p_2\}$, gdje je $p_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Kako je

$$D(p_0) = 0,\ D(p_k) = k \cdot p_{k-1},\ k = 1, 2, 3$$

imamo

$$[D]_{(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrica operatora integriranja u istom paru baza glasi

$$[S]_{(\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

♡

2.4 Rang i defekt linearnog operatora

Za razumijevanje djelovanja linearnog operatora na vektorskom prostoru posebno je važno proučiti kakva svojstva ima operator u odnosu na potprostore, kako svoje domene tako i kodomene. Već na temelju definicije i osnovnih svojstava linearnog operatora ("čuvanje" linearnih kombinacija) možemo očekivati "dobro ponašanje" prema potprostorima. Tako će slika svakog potprostora domene biti potprostor kodomene, a posebno je i slika cijele domene potprostor kodomene. U konačnodimenzionalnom slučaju kao važan parametar pojavit će se *rang linearnog operatora*, a to je dimenzija njegove slike i u uskoj je vezi s rangom matričnog prikaza linearnog operatora, zapravo jednak je rangu matrice pridružene operatoru u bilo kojem paru baza.

Uzmimo opet situaciju koju nam je geometrijski najlakše predočiti, kad imamo linearni operator na prostoru $V^3(O)$. Osim nulpotprostora, koji se svakako preslika u nulpotprostor, potprostori su zapravo pravci kroz O (1-dimenzionalni potprostori), ravnine kroz O (2-dimenzionalni potprostori) i cijeli $V^3(O)$. Kakav god bio linearni operator, on će bilo koji potprostor preslikati opet u potprostor, pri čemu dimenzija slike ne može biti veća od dimenzije originala. Tako se ravnina može preslikati ili u ravninu ili u pravac ili u točku (nulvektor), pravac se može preslikati u pravac ili u točku, ali ne u ravninu, dok slika cijele domene $V^3(O)$ može biti bilo koji potprostor. Vrijednost ranga - 0, 1, 2 ili 3 - pokazuje nam u kakav će se potprostor preslikati domena.

No, važna pravilnost kod djelovanja linearnog operatora može se uočiti i u "obrnutom smjeru". Praslika svakog potprostora kodomene bit će neki potprostor domene. Opet u primjeru $V^3(O)$, skup svih vektora čija slika pripada nekoj ravnini kroz O bit će ili ravnina kroz O ili cijeli prostor $V^3(O)$. Npr. kod zrcaljenja, praslika ravnine također je ravnina, dok kod projekcije na ravninu praslika ravnine je cijeli prostor.

Naročito je značajna praslika nulpotprostora kodomene. Vidjet ćemo da je u konačnodimenzionalnom slučaju određivanje praslike nulvektora ekvivalentno rješavanju homogenog sustava linearnih jednadžbi. Treba, naime, odrediti skup svih vektora x takvih da ih linearni operator A preslika u nulvektor, tj. da vrijedi $Ax = 0$, a primjenom matričnog prikaza dobiva se matrična jednadžba $AX = 0$, ekvivalentna homogenom sustavu linearnih jednadžbi.

Kao ključni rezultat ovog odjeljka pokazat će se *Teorem o rangu i defektu linearnog operatora*, usko povezan s osnovnim rezultatom o prostoru rješenja homogenog linearnog sustava koji smo naučili u Linearnoj algebri 1.

Definicija 2.4.1. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator.* ***Slika*** *linearnog operatora A je skup*

$$S(A) = \{A(x) \, : \, x \in V\}.$$

Slika se još ponekad označava s $A(V)$ ili $Im\, A$ (od engl. image-*slika).*

Jezgra *linearnog operatora A je skup*

$$J(A) = \{x \in V \, : \, A(x) = 0_W\}.$$

Jezgra se još označava s $A^{-1}(0_W)$ ili $Ker\, A$ (od engl. kernel - *jezgra).*

Propozicija 2.4.2. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te L potprostor od V i M potprostor od W. Tada je $A(L)$ potprostor od W i $A^{-1}(M)$ potprostor od V.*

Dokaz. Najprije uočimo da su $A(L)$ i $A^{-1}(M)$ neprazni podskupovi od W i V, respektivno, jer svaki od njih sadrži nulvektor odgovarajućeg vektorskog prostora.

Neka su $y_1, y_2 \in A(L)$. Tada postoje $x_1, x_2 \in L$ takvi da je $A(x_1) = y_1$ i $A(x_2) = y_2$. Za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \{A \text{ je l.o.}\} = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Kako je $L \leq V$ slijedi da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L$, pa je $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in A(L)$ čime smo pokazali da je $A(L)$ potprostor od W.

Neka su $x_1, x_2 \in A^{-1}(M)$. Tada je $A(x_1), A(x_2) \in M$. Za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ je i $\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) \in M$ jer je M potprostor od W. Kako je $M \ni \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, slijedi da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A^{-1}(M)$, odnosno da je $A^{-1}(M)$ potprostor od V. $\square$

Korolar 2.4.3. *Slika linearnog operatora $A : V \to W$ je potprostor od W, a jezgra je potprostor od V.*

Dokaz. Tvrdnje slijede iz prethodne propozicije, jer je $S(A) = A(V)$ i $V \leq V$, te $J(A) = A^{-1}(\{0_W\})$ i $\{0_W\}$ je potprostor od W. $\square$

Prethodnom tvrdnjom opravdamo sljedeću definiciju.

Definicija 2.4.4. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator. Ako je slika operatora A, to jest $S(A)$ konačnodimenzionalan potprostor od W, tada je* ***rang*** *linearnog operatora A dimenzija potprostora $S(A)$. Pišemo*

$$r(A) = \dim S(A).$$

Ako je jezgra operatora A, to jest $J(A)$ konačnodimenzionalan potprostor od V, tada je ***defekt*** *linearnog operatora A dimenzija potprostora $J(A)$. Pišemo*

$$d(A) = \dim J(A).$$

Napomena 2.4.5. *U Definiciji 2.4.4 smo rang i defekt linearnog operatora definirali samo uz pretpostavku da su slika i jezgra konačnodimenzionalni potprostori domene i kodomene, respektivno. To će, dakako, biti ispunjeno ako su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori. Štoviše, kasnije ćemo vidjeti (Propozicija 2.4.9) da je slika linearnog operatora konačnodimenzionalan potprostor kodomene čim je domena operatora konačnodimenzionalan prostor (dok kodomena to može biti, ali ne mora).*

Primjer 24. *Odredite rang i defekt sljedećim linearnim operatorima:*

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1)$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$,

(c) $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

Rješenje. **(a)** Slika operatora A je potprostor

$$S(A) = \{(x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1) \,:\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,1,1) + x_2(1,-1,0) \,:\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

čija je baza skup $\{(1,1,1), (1,-1,0)\}$, pa je $r(A) = 2$. Jezgra operatora A je potprostor

$$J(A) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 = 0\} = \{(0,0,0)\},$$

te slijedi $d(A) = 0$.

(b) Slika operatora B je

$$\begin{aligned} S(B) &= \{(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) \,:\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1) + x_2(-1,1) + x_3(1,2) \,:\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = [(1,1), (-1,1), (1,2)]. \end{aligned}$$

Očito je $S(B) = \mathbb{R}^2$ i $r(B) = 2$. Jezgra operatora B je

$$J(B) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Skup rješenja sustava $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ je $\{(3,1,-2)t \,:\, t \in \mathbb{R}\}$, pa zaključujemo da je $\{(3,1,-2)\}$ baza za potprostor $J(B)$. Dakle, $d(B) = 1$.

(c) Lakim računom dobivamo da je $S(C) = \mathbb{R}^2$ i $J(C) = \{(0,0)\}$, odnosno $r(C) = 2$ i $d(C) = 0$. ♡

Zadatak 13. *Odredite sliku, jezgru, rang i defekt linearnih operatora iz Primjera 14 i 15.*

Do važnih rezultata dovest će nas ispitivanje svojstava injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti linearnog operatora. Prisjetimo se. Funkcija f je *injekcija* (ili *1-1* preslikavanje) ako različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene. Injektivnost funkcije se operativno lakše pokazuje korištenjem obrata po kontrapoziciji prethodne tvrdnje. Dakle, f je injekcija ako i samo ako za x_1 i x_2 iz domene takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Funkcija f je *surjekcija* (ili preslikavanje *na*) ako je slika od f jednaka kodomeni. Funkcija f je *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija. Drukčije rečeno, f je bijektivno preslikavanje ako i samo ako za svaki y iz kodomene postoji jedinstven x iz domene takav $f(x) = y$.

Definicija 2.4.6. *Injektivan linearan operator naziva se* ***monomorfizam****, surjektivan linearan operator naziva se* ***epimorfizam****, a bijektivan -* ***izomorfizam****.*

Zadatak 14. *Ustanovite je li neki od operatora iz Primjera 24 monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam.*

Propozicija 2.4.7. *Linearni operator je monomorfizam ako i samo ako mu je defekt jednak nuli.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ monomorfizam. Prema svojstvu injektivnosti, ako je $x \neq 0_V$, onda je $A(x) \neq A(0_V) = 0_W$. Dakle, niti jedan nenul vektor iz V ne može se preslikati u nulvektor iz W pa je $J(A) = \{0_V\}$ i $d(A) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $d(A) = 0$, odnosno $J(A) = \{0_V\}$. Ako je $A(x_1) = A(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in V$, onda je $0_W = A(x_1) - A(x_2) = A(x_1 - x_2)$. Stoga je $x_1 - x_2 \in J(A) = \{0_V\}$ i $x_1 = x_2$. Znači, preslikavanje A je injektivno. □

Kriterij injektivnosti linearnog operatora dan u prethodnoj Propoziciji 2.4.7 je vrlo praktičan jer, za razliku od općenitih preslikavanja, za linearni operator dovoljno je provjeriti injektivnost "samo na nulvektoru".

Propozicija 2.4.8. *Linearni operator je monomorfizam ako i samo ako svaki linearno nezavisan podskup domene preslikava u linearno nezavisan podskup kodomene.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V,W)$ monomorfizam, te $\{x_1,\dots,x_k\}$ linearno nezavisan skup u V. Trebamo pokazati da je $\{A(x_1),\dots,A(x_k)\}$ linearno nezavisan skup u W. U tu svrhu pretpostavimo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(x_i) = 0_W,$$

za neke $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Zbog svojstva linearnosti od A je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(x_i) = A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i),$$

a zbog injektivnosti od A nužno slijedi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_k = 0_V$. Kako je $\{x_1,\dots,x_k\}$ linearno nezavisan skup u V, slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Time smo pokazali da je skup $\{A(x_1),\dots,A(x_k)\}$ linearno nezavisan.

Dovoljnost tvrdnje pokazujemo pomoću obrata po kontrapoziciji. Pretpostavimo da A svaki linearno nezavisan podskup od V preslikava u linearno nezavisan podskup od W, ali da A *nije monomorfizam.* Tada prema Propoziciji 2.4.7 u jezgri $J(A)$ postoji neki vektor x različit od 0_V. Stoga je $A(x) = 0_W$ pa A preslikava linearno nezavisan skup $\{x\}$ u linearno zavisan skup $\{0_W\}$. Dobili smo proturječje s pretpostavkom, što znači da linearni operator A mora biti monomorfizam ako ima svojstvo da svaki linearno nezavisan podskup domene preslika u linearno nezavisan podskup kodomene. □

S obzirom na tvrdnju prethodne propozicije kažemo još da injektivan operator *čuva linearnu nezavisnost.*

Propozicija 2.4.9. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V,W)$ i G sustav izvodnica za V. Tada je $A(G)$ sustav izvodnica za sliku operatora $S(A)$.*

Posebno, ako je A epimorfizam, onda je $A(G)$ sustav izvodnica za W.

Dokaz. Očito je je $[A(G)] = \{A(a) : a \in G\} \subseteq S(A)$. Pokažimo inkluziju $S(A) \subseteq [A(G)]$. Neka je $y \in S(A)$. Tada postoji $x \in V$ takav da je $y = A(x)$. Kako je $[G] = V$, onda za x postoje vektori $a_1,\dots,a_k \in G$ i skalari $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$. Iz

$$A(x) = A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(a_i)$$

slijedi da je $A(x) \in [A(G)]$ pa smo pokazali da je $S(A) \subseteq [A(G)]$, te stoga $S(A) = [A(G)]$. □

Napomenimo da svaki linearan operator A bazu domene, $\{e_1,\dots,e_n\}$, preslika u skup $\{A(e_1),\dots,A(e_n)\}$ što je sustav izvodnica za sliku $S(A)$. Taj će skup biti i baza za sliku ako i samo ako je A injekcija. Štoviše, lako možemo ustanoviti da smo do sada pokazali sljedeći teorem.

Teorem 2.4.10. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V,W)$. Vrijedi:*

(i) *A je monomorfizam ako i samo ako svaki linearno nezavisan podskup od V preslikava u linearno nezavisan podskup od W.*

(ii) *A je epimorfizam ako i samo ako svaki sustav izvodnica za V preslikava u sustav izvodnica za W.*

(iii) *A je izomorfizam ako i samo ako svaku bazu za V preslikava u bazu za W.*

Tvrdnju (iii) bit će dovoljno provjeriti za *neku* bazu. Naime, može se pokazati da ako operator *neku* bazu za V preslikava u bazu za W, onda će preslikati i *svaku* bazu za V u bazu za W. (Dokažite izrečenu tvrdnju!)

Teorem 2.4.11 (Teorem o rangu i defektu)**.** *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Tada vrijedi*

$$r(A) + d(A) = \dim V.$$

Dokaz. Ako je $\dim V = 0$, to jest $V = \{0_V\}$, tada je i $r(A) = d(A) = 0$.

Pretpostavimo da je $\dim V = n > 0$. Tvrdnju teorema pokazujemo u dva slučaja.

1. slučaj. Neka je A monomorfizam. Tada je $d(A) = 0$ prema Propoziciji 2.4.7. Nadalje, $A : V \to S(A)$ je izomorfizam, pa prema Teoremu 2.4.10(iii) slijedi da operator A bazu za V, $\{b_1, \ldots, b_n\}$, preslika u bazu $\{A(b_1), \ldots, A(b_n)\}$ za $S(A)$. Dakle, $n = \dim S(A) = r(A)$ i $r(A) + d(A) = n + 0 = n = \dim V$.

2. slučaj. Pretpostavimo da A nije monomorfizam, to jest $d(A) = m \geq 1$. Neka je $\{a_1, \ldots, a_m\}$ baza za jezgru $J(A)$. Proširimo tu bazu do baze za čitav prostor V,

$$\{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}.$$

Promotrimo skup $\{A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)\}$. Pokazat ćemo da je taj skup baza za sliku $S(A)$.

(i) Skup $\{A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)\}$ je sustav izvodnica za $S(A)$. Zaista, neka je $y \in S(A)$. Postoji $x \in V$ takav da je $y = A(x)$. Prikažimo vektor x u bazi $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A(x) &= A(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \underbrace{\alpha_1 A(a_1) + \cdots + \alpha_m A(a_m)}_{=0_W} + \alpha_{m+1} A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n) \\ &= \alpha_{m+1} A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n), \end{aligned}$$

jer su vektori $a_1, \ldots, a_m$ iz jezgre operatora A. Dakle, $y \in [A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)]$, odnosno skup $\{A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)\}$ razapinje sliku $S(A)$.

(ii) Skup $\{A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)\}$ je linearno nezavisan skup u W. U tu svrhu promatramo linearnu kombinaciju

$$\alpha_{m+1} A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n) = 0_W.$$

Zbog linearnosti je stoga $\displaystyle\sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i \in J(A)$ te postoje skalari $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i = \sum_{j=1}^m \beta_j a_j,$$

odnosno

$$\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m + (-\alpha_{m+1}) a_{m+1} + \cdots + (-\alpha_n) a_n = 0_V.$$

Budući je $\{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$ baza za V slijedi sa su svi skalari nula pa posebno i $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Pokazali smo da je $\{A(a_{m+1}), \ldots, A(a_n)\}$ baza za $S(A)$ što povlači $r(A) = n - m$. Dakle, i u ovom slučaju vrijedi

$$r(A) + d(A) = m + (n - m) = n = \dim V.$$

□

Uočimo da u prvom slučaju tvrdnja teorema proizlazi odatle što je domena V *izomorfna* potprostoru $S(A)$ kodomene W. (Za definiciju izomorfnih prostora vidi Definiciju 2.5.1.) U drugom slučaju zapravo smo prikazali domenu V kao direktnu sumu jezgre $J(A)$ i jednog potprostora od V koji je izomorfan potprostoru $S(A)$. Tako u oba slučaja jednakost $\dim V = d(A)+r(A)$ slijedi iz prikaza V kao *direktne sume* jezgre operatora A i jednog potprostora koji je izomorfan slici operatora A.

Korolar 2.4.12. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V,W)$ i $\dim V = \dim W = n$. Tada su ekvivalentne tvrdnje:*

(i) *A je monomorfizam,*

(ii) *A je epimorfizam,*

(iii) *A je izomorfizam.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$ (ii): Ako je A je monomorfizam, onda je $d(A) = 0$, pa je prema Teoremu 2.4.11 $r(A) = n$. Kako je $\dim W = n$, slijedi da je $S(A) = W$, to jest da je A epimorfizam.
(ii)$\Rightarrow$ (iii): Ako je A epimorfizam, onda je $r(A) = \dim W = n$, pa prema Teoremu 2.4.11 slijedi da je $d(A) = 0$, odnosno A je monomorfizam pa je i izomorfizam.
(iii)$\Rightarrow$ (i): Trivijalno. □

Vratimo se još jedanput na Primjer 17. Važno je i korisno odrediti defekt i rang linearnog operatora L iz tog primjera, gdje je najprije izabrana matrica A, a zatim je zadan linearni operator s $L(X) = AX$. Jezgra tog operatora određuje se stoga rješavanjem matrične jednadžbe $AX = 0$, a ona je ekvivalentna homogenom sustavu od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Matrica tog sustava upravo je matrica A. Iz Linearne algebre 1 znamo da skup rješenja tog sustava čini potprostor dimenzije $n - r(A)$. (To je potprostor prostora $\mathbb{F}^n$ ako promatramo sustav, odnosno prostora jednostupčanih matrica $M_{n,1}(\mathbb{F})$ kad promatramo matričnu jednadžbu $AX = 0$). Dakle, za defekt operatora L imamo $d(L) = n - r(A)$. Primjenom Teorema o rangu i defektu stoga izravno dobivamo da je rang operatora L jednak $r(A)$, dakle upravo rangu matrice pomoću koje je zadan operator L.

Uočimo sada sljedeće. Budući da se svaki linearni operator kojem su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori može prikazati matrično, Primjer 17 zapravo predstavlja "tipični" oblik takvog linearnog operatora. Veza se ostvaruje bilo kakvim izborom para baza domene i kodomene (Propozicija 2.3.2).

Ako je L zadani linearni operator, a matrica A njemu pridružena matrica u nekom paru baza, imamo $d(L) = n - r(A)$, kao u prethodnom razmatranju. Po Teoremu o rangu i defektu opet slijedi da je $r(L) = r(A)$. Pritom, kako je slika linearnog operatora, a time i njezina dimenzija, po samoj definiciji neovisna o matričnom prikazu, vidimo da je $r(L)$ jednak rangu matrice pridružene operatoru L u bilo kojem paru baza.

Ovdje smo se za taj zaključak poslužili Teoremom o rangu i defektu, a u odjeljku 2.7, gdje će se detaljno razraditi veza između matrica pridruženih linearnom operatoru u različitim parovima baza, istu tvrdnju o jednakosti rangova izvest ćemo i na nešto drukčiji način. Dakle, pojmovi ranga matrice i ranga linearnog operatora, premda definirani posve nezavisno, usko su povezani: s jedne strane linearni operator prikazujemo pomoću matrice, a s druge strane pomoću izabrane matrice možemo zadati linearni operator (Primjer 17). U oba slučaja vrijednosti ranga se podudaraju.

Zadatak 15. *Neka je A linearni operator ranga r s n-dimenzionalnog prostora V u m-dimenzionalni prostor W. Pokažite da tada postoji par baza prostora V i W takav da je u tom paru baza* *matrica operatora A kanonska matrica tipa (m, n) i ranga r. (Dakle, matrica za koju su koeficijenti $a_{i,i} = 1$ za $i = 1, 2, \dots, r$, a svi ostali a_{ij} su 0.)*

Zadatak 16. *Navedite primjer linearnog operatora ranga 2 kojem se jezgra i slika podudaraju. (Treba navesti domenu, kodomenu i zadati djelovanje takvog operatora).*

Zadatak 17. *Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Koji su nužni i dovoljni uvjeti za $\dim V$ i $\dim W$ da bi u skupu $\mathcal{L}(V, W)$ postojao*

(a) monomorfizam,

(b) epimorfizam,

(c) izomorfizam?

2.5 Izomorfizam vektorskih prostora

Među mnogim primjerima vektorskih prostora koje smo dosad upoznali mogli smo uočiti da su neki prostori vrlo "slični" u određenom smislu, iako su definirani na posve različitim skupovima, a i operacije zbrajanja i množenja skalarom na njima sasvim su drukčije prirode. Već smo, primjerice, naviknuti da su realni vektorski prostori $\mathbb{R}^2$ i $V^2(O)$ toliko "srodni" da ćemo, pri rješavanju zadataka, bez posebnog razmišljanja preći s radijvektora ("strelica" sa zajedničkim ishodištem u točki O) na uređene parove realnih brojeva i dobiti traženi rezultat na način koji nam je već praktičniji za računanje. Umjesto zbrajanja "strelica" po pravilu paralelograma odnosno njihovog "rastezanja" ili "stezanja" pomoću stanovitog realnog faktora jednostavno ćemo zbrajati uređene parove realnih brojeva na prirodan način, a tako ćemo i množiti uređene parove skalarom - po komponentama.

Sasvim analogno, kad u bilo kojem n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nad nekim poljem $\mathbb{F}$ izaberemo bazu, vektore iz V moći ćemo na jednoznačan način prikazati uređenim n-torkama iz skupa F^n. Štoviše, operacije s vektorima iz V izvodit ćemo jednostavnije kao operacije na prostoru $\mathbb{F}^n$. Kad radimo na taj način, postaje svejedno je li polazni prostor V bio npr. prostor realnih polinoma stupnja najviše 3 ili možda prostor realnih kvadratnih matrica reda 2. I jedan i drugi su vektorski prostori dimenzije 4 nad poljem $\mathbb{R}$ pa će se u njima, prelaskom na prikaz u nekoj bazi, računati kao s uređenim četvorkama realnih brojeva. Riječ je o vektorskim prostorima koji jesu različiti, ali su "jednakog oblika" u sasvim određenom smislu, koji ćemo točno definirati pomoću pojma *izomorfnosti* vektorskih prostora (od grčkog *iso* - jednak, *morph* - oblik).

Definicija 2.5.1. *Vektorski prostor V je* ***izomorfan*** *vektorskom prostoru W su ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Pišemo $V \simeq W$.*

Iz same definicije izomorfnih prostora jasno je da su to vektorski prostori nad istim poljem.

Propozicija 2.5.2. *Relacija* biti izomorfan *je relacija ekvivalencije na skupu svih vektorskih prostora nad nad istim poljem $\mathbb{F}$.*

Dokaz. (1) Relacija biti izomorfan je *refleksivna* jer je identiteta $I : V \to V$, $I(x) = x$ izomorfizam. Dakle, $V \simeq V$.
(2) Pretpostavimo da je $V \simeq W$. Stoga postoji izomorfizam $A : V \to W$. No, za svako bijektivno preslikavanje postoji inverz (bijekcija) $A^{-1} : W \to V$ za koji smo u Propoziciji 2.1.4 pokazali da je linearan operator. Dakle, postoji izomorfizam $W \to V$, pa je $W \simeq V$, odnosno

relacija biti izomorfan je *simetrična*.
(3) Pokažimo *tranzitivnost* ove relacije. Pretpostavimo da je $V \simeq W$ i $W \simeq Z$, odnosno da postoje izomorfizmi $A : V \to W$ i $B : W \to Z$. Njihova kompozicija $B \circ A : V \to Z$ je bijekcija, ali i linearan operator prema Propoziciji 2.1.3, stoga i izomorfizam. Zaključujemo da je $V \simeq Z$, što je i trebalo pokazati. □

Budući da je relacija "biti izomorfan" simetrična, često ćemo umjesto formulacije iz Definicije 2.5.1 kratko reći da su vektorski prostori V i W izomorfni.

Pojmovi izomorfizma među strukturama, odnosno bijektivnog preslikavanja koje "prenosi" sva osnovna svojstva s jedne strukture na drugu, i izomorfnosti struktura, kao relacije među strukturama određenog tipa ako se između njih može uspostaviti izomorfizam, važni su u matematici jer se pomoću njih izvodi klasifikacija, razvrstavanje struktura u klase "bitno različitih", neizomorfnih. Unutar jedne klase nalaze se strukture "jednakog oblika" i one nisu bitno različite s obzirom na promatranu strukturu. Primjerice, polinomi su objekti sasvim različite prirode od npr. radijvektora, ali ako se promatraju samo operacije u vektorskom prostoru (a ne, recimo, množenje polinoma), onda se prostor realnih polinoma stupnja najviše 2 nalazi u istoj klasi kao prostor $V^3(O)$ i prostor $\mathbb{R}^3$. U vezi s Propozicijom 2.5.2 prisjetimo se da se relacija ekvivalencije naziva još i relacijom klasifikacije.

Korisno je imati jednostavan kriterij za utvrđivanje jesu li dva vektorska prostora nad istim poljem izomorfna ili ne, budući da efektivno traženje izomorfizma, kao konkretnog preslikavanja, nije uvijek praktično. Za konačnodimenzionalne prostore kriterij je doista vrlo jednostavan, a intuitivno je jasan već iz uvoda ovog odjeljka. Evo tog kriterija:

Teorem 2.5.3. *Konačnodimenzionalni vektorski prostori su izomorfni ako i samo ako su im dimenzije jednake.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $V \simeq W$, te $A : V \to W$ izomorfizam. Tada je $d(A) = 0$, pa je $r(A) = \dim V$ prema Teoremu o rangu i defektu (2.4.11). Kako je A i epimorfizam, vrijedi $r(A) = \dim W$, pa smo pokazali da je $\dim V = \dim W$.

Neka je $\dim V = \dim W = n > 0$, te $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za V i $\{b_1, \dots, b_n\}$ baza za W. Definiramo linearni operator $A : V \to W$ djelovanjem na bazi, $A(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Budući da operator A preslikava bazu za V u bazu za W, slijedi da je A izomorfizam (Teorem 2.4.10), odnosno da su V i W izomorfni prostori.

U trivijalnom slučaju je $\dim V = \dim W = 0$ i $V = \{0_V\}$, $W = \{0_W\}$. □

Korolar 2.5.4. *Svaki vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ je izomorfan prostoru $\mathbb{F}^n$.*

Primjer 25. *(a)* Svi realni vektorski prostori dimenzije 6 su međusobno izomorfni, npr. prostori matrica $M_{2,3}(\mathbb{R})$ i $M_{3,2}(\mathbb{R})$ izomorfni su s $\mathbb{R}^6$, a također i s potprostorom simetričnih matrica u prostoru $M_3(R)$ kvadratnih matrica reda 3. (Znamo da simetrične matrice reda n čine potprostor dimenzije $n(n+1)/2$ prostora $M_n(\mathbb{R})$.) S njima je izomorfan i prostor antisimetričnih matrica reda 4 jer antisimetrične matrice reda n čine potprostor dimenzije $n(n-1)/2$ prostora $M_n(\mathbb{R})$. Nadalje, $\mathbb{C}^3$ je dimenzije 6 kao realni vektorski prostor pa je također izomorfan prethodno navedenima, kao i prostor $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ realnih polinoma stupnja najviše 5.

U svim ovim primjerima vidimo da se u vektorima pojavljuje po 6 realnih koeficijenata koji se mogu birati nezavisno, a onda nije teško prepoznati neku bazu te zadati izomorfizam između takvih prostora po načelu "preslikavanja baze u bazu" (što je zapravo dokaz jednog smjera u Teoremu 2.5.3) *(b)* Pitanje izomorfnosti postavlja se, dakako, i za vektorske prostore koji nisu konačnodimenzionalni, a tada je redovito i znatno teže. Razlog nemogućnosti uspostavljanja izomorfizma može biti već u tome da uopće ne postoji bijekcija između neka dva skupa na kojima su zadane operacije vektorskog prostora. Takvim se pitanjima ovdje nećemo baviti.

♡

Zadatak 18. *Neka je $A : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora te neka je $L \leq V$, $M \leq W$. Dokažite da tada vrijedi $L \simeq A(L)$ i $M \simeq A^{-1}(M)$.*

2.6 Prostor linearnih operatora. Dualni prostor.

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Na skupu svih linearnih operatora s V u W, $\mathcal{L}(V, W)$, možemo uvesti strukturu vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{F}$ uz operaciju zbrajanja operatora, te operaciju množenja operatora skalarom. Svrha uvođenja tih *operacija s operatorima* može nam biti jasnija kad uzmemo u obzir da su nam već poznate odgovarajuće operacije s matricama, a da se linearnim operatorima na konačnodimenzionalnim prostorima pridružuje matrični prikaz. Zbrajanje linearnih operatora i množenje operatora skalarom prirodno se definira pomoću djelovanja na vektorima, kao što se, primjerice, zbrajanje realnih funkcija definira "po točkama" (to znači da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ za $x \in \mathbb{R}$). Dakle, za $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ stavljamo

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x),\ (\lambda A)(x) = \lambda\, A(x),\ x \in V.$$

Lako se provjeri da su $A + B, \lambda A \in \mathcal{L}(V, W)$, te da vrijede aksiomi vektorskog prostora, pa je $\mathcal{L}(V, W)$ vektorski prostor na poljem $\mathbb{F}$.

Zadatak 19. *Dokažite da ako su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, onda je $\mathcal{L}(V, W)$ vektorski prostor na poljem $\mathbb{F}$.*

Sada je smisleno pokušati odrediti dimenziju prostora $\mathcal{L}(V, W)$. To možemo učiniti ako su V i W konačnodimenzionalni, jer tada je i $\mathcal{L}(V, W)$ konačnodimenzionalan vektorski prostor.

Teorem 2.6.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori. Tada je $\mathcal{L}(V, W)$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.*

Dokaz. Ovu tvrdnju dokazujemo tako što efektivno konstruiramo bazu za prostor $\mathcal{L}(V, W)$. U tu svrhu prisjetimo se vrlo jednostavne, kanonske baze za matrice tipa (m, n). Za $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, matrica E_{ij} kanonske baze ima točno jedan element jednak 1 i to onaj na presjeku i-tog retka i j-tog stupca, a ostali elementi su jednaki 0. Ideja za sastavljanje baze prostora $\mathcal{L}(V, W)$ sada je u tome da se uzmu upravo oni operatori kojima su, u nekom paru baza, pridružene matrice E_{ij}. Radi jednostavnosti, za te operatore uzet ćemo istu oznaku.

Neka su $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V i W, respektivno. Iz matrice E_{ij} vidimo da se vektor e_j preslikava u vektor f_i, dok se svi ostali vektori e_k, za $k \neq j$, preslikavaju u 0_W. Djelovanje operatora $E_{ij} : V \to W$ možemo onda sažeto zapisati ovako:

$$E_{ij}(e_k) = \left\{ \begin{array}{ll} f_i, & k = j, \\ 0_W, & k \neq j \end{array} \right. ,\ k \in \{1, \ldots, n\},$$

za $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ustanovit ćemo da je skup $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathcal{L}(V, W)$. Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Želimo prikazati taj operator kao linearnu kombinaciju operatora E_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Budući da je operatoru A u izabranom paru baza pridružena matrica $[A]_{(f,e)} = [\alpha_{ij}]$, a za tu matricu znamo njezin prikaz u kanonskoj bazi prostora $M_{mn}(\mathbb{F})$:

$$[A]_{(f,e)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

očekujemo da će i operator A imati prikaz jednakog oblika, naime s istim tim koeficijentima, kao linearna kombinacija operatora E_{ij}. Provjerimo to. Dovoljno je provjeriti da operator A i linearna kombinacija $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$ jednako djeluju na svaki vektor e_k iz baze. Prvo, izravno iz matrice $[A]_{(f,e)}$ vidimo

$$A(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \ k = 1, \dots, n.$$

S druge strane,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}(e_k) = \{\text{po definiciji operatora } E_{ij}\} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dakle, operator A podudara se s operatorom napisanim kao $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$ jer jednako djeluju na vektore baze. Odakle vidimo da je skup $\{E_{ij} \,:\, i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n\}$ sustav izvodnica prostora $\mathcal{L}(V, W)$.

Preostaje provjeriti linearnu nezavisnost tog skupa. Neka je

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} E_{ij} = \mathbf{0},$$

pri čemu smo s $\mathbf{0}$ označili nuloperator u $\mathcal{L}(V, W)$. Djelujemo operatorom zapisanim na lijevoj strani na vektor baze e_k za $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} E_{ij}\Big)(e_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \underbrace{E_{ij}(e_k)}_{\substack{f_i, k = j, \\ 0_W, k \neq j}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i.$$

S druge strane, $\mathbf{0}(e_k) = 0_W$, pa je

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i = 0_W.$$

Kako je $\{f_1, \dots, f_m\}$ baza za W slijedi da je $\alpha_{1k} = \alpha_{2k} = \dots = \alpha_{mk} = 0$. Provedbom ovog postupka za svaki $k \in \{1, \dots, n\}$ dobivamo da je $\alpha_{ij} = 0$ za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Budući da smo pokazali da je $\{E_{ij} \,:\, i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n\}$ baza prostora $\mathcal{L}(V, W)$, slijedi da je $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$. □

Upravo dokazani teorem pokazuje nam da je $\dim \mathcal{L}(V, W) = nm$, ako označimo $\dim V = n$, $\dim W = m$, a time je $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M_{mn}(\mathbb{F})$. Imamo prostore jednakih dimenzija, nad poljem $\mathbb{F}$ pa su oni po Teoremu 2.5.3 izomorfni.

Primijetimo da smo se zapravo u dokazu Teorema 2.6.1 i poslužili jednim izomorfizmom kako bismo konstruirali bazu prostora $\mathcal{L}(V,W)$ polazeći od otprije poznate baze prostora matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$. Prirodno, izomorfizam između prostora $\mathcal{L}(V,W)$ i $M_{mn}(\mathbb{F})$ uspostavlja se tako da se linearnom operatoru pridruži njegova matrica u izabranom paru baza, a njemu inverzni izomorfizam (njime smo se i poslužili) u biti je određivanje linearnog operatora na temelju zadane matrice.

Zadatak 20. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Označimo s Φ preslikavanje*

$$\Phi : \mathcal{L}(V,W) \to M_{m,n}(\mathbb{F}),\ \Phi(A) = [A]_{(f,e)}.$$

Dokažite da je Φ izomorfizam.
Uputa: Za linearnost preslikavanja Φ zapravo treba provjeriti da je $[A+B]_{(f,e)} = [A]_{(f,e)} + [B]_{(f,e)}$, $[\lambda A]_{(f,e)} = \lambda [A]_{(f,e)}$, za $A, B \in \mathcal{L}(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Za injektivnost Φ dovoljno je odrediti njegovu jezgru, a provjera surjektivnosti Φ znači da za svaku matricu postoji linearni operator kojem je pridružena upravo ta matrica. Ovo posljednje ujedno pokazuje i kako djeluje inverzno preslikavanje Φ^{-1} - njime se iz matrice "pročita" linearni operator.

Specijalno, prostori $\mathcal{L}(V)$ i $M_n(\mathbb{F})$ su izomorfni i vrijedi $\Phi(A \circ B) = \Phi(A)\Phi(B)$, odnosno

$$[A \circ B]_{(e)} = [A]_{(e)}[B]_{(e)},$$

što slijedi direktno iz Propozicije 2.3.2. Štoviše, vrijedi i općenitije. Ako su $A \in \mathcal{L}(V,W)$, $B \in \mathcal{L}(W,Z)$, te (e), (f) i (g) baze za V, W i Z, respektivno, onda je

$$[B \circ A]_{(g,e)} = [B]_{(g,f)}[A]_{(f,e)}.$$

(Prethodnu jednakost pokažite primjenom Propozicije 2.3.2 na $B \circ A(x)$, za svaki $x \in V$.)

Posebno ćemo još razmotriti linearne operatore čija je kodomena polje. Prisjetimo se, svako polje $\mathbb{F}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom. Jasno je da za bazu možemo uzeti bilo koji skalar λ različit od nule, no najjednostavnije je uzeti $\lambda = 1$. Tu ćemo bazu u $\mathbb{F}$ prirodno označiti s (1).

Definicija 2.6.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Vektorski prostor linearnih operatora $V \to \mathbb{F}$, odnosno $\mathcal{L}(V,F)$ naziva se **dualni prostor prostora** V i označava s V^*. Elementi prostora V^* nazivaju se **linearni funkcionali**.*

Korolar 2.6.3. *Ako je V n-dimenzionalni vektorski prostor, onda je $\dim V^* = n$.*

Neka je $f \in V^*$, te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Tada postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je $f(e_i) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Prema tome matrica linearnog funkcionala f je

$$[f]_{(1,e)} = (\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_n) \in M_{1n}(\mathbb{F}).$$

Ako je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, onda

$$f(x) = [f(x)]_{(1)} = [f]_{(1,e)}[x]_{(e)} = (\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

Uočili smo da ako je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, onda je $\dim V^* = \dim V$. Stoga su V i V^* izomorfni prostori. Želimo uspostaviti što jednostavniji izomorfizam među njima.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ njegova baza. Za $1 \leq i \leq n$ definiramo funkcional

$$e_i^* : V \to \mathbb{F},$$

svojim djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

Opazimo da je funkcional e_i^* zapravo jednak operatoru E_{1i} kojeg smo definirali u dokazu Teorema 2.6.1 (u slučaju kada je $\dim W = 1$). Stoga je $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ baza dualnog prostora V^*, a nazivamo ju *dualna baza* za bazu (e). Sada izomorfizam između prostora V i njegovog duala V^* možemo definirati kao

$$\Phi : V \to V^*, \ \Phi(e_i) = e_i^*, \ i = 1, \ldots, n.$$

Primijetimo da ovaj izomorfizam ovisi o izboru baze za prostor V.

Pogledajmo kako funkcional e_k^* djeluje na vektor x, koji je prikazan u bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$e_k^*(x) = e_k^*(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_k^*(e_i) = x_k$$

Dakle, k-ti funkcional iz dualne baze pridružuje vektoru x njegovu k-tu koordinatu u prikazu u bazi (e). Matrični prikaz tog funkcionala u paru baza $(e, 1)$ je $(0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0)$ gdje je 1 na k-tom mjestu.

Primjer 26. U Primjeru 14 bio je zadan linearni operator na prostoru $V^3(O)$ koji djeluje tako da svaki vektor pomnoži skalarno s unaprijed određenim vektorom a. Budući da je kodomena tog linearnog operatora polje $\mathbb{R}$, riječ je o linearnom funkcionalu.

Lako možemo uvidjeti da je taj primjer linearnog funkcionala na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru zapravo tipičan, dakle da se na takvom prostoru djelovanje bilo kojeg linearnog funkcionala može izraziti pomoću skalarnog množenja jednim određenim vektorom. Već smo izračunali da linearni funkcional f na konačnodimenzionalnom prostoru V svakom vektoru x pridružuje skalar $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$, pri čemu je x prikazan u bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, a $f(e_i) = \alpha_i$.

Pretpostavimo da je V realan unitaran prostor i da je (e) ortonormirana baza. Označimo li s a vektor $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, pri čemu je ponovno $\alpha_i = f(e_i)$, vidimo da je $f(x) = \langle x|a \rangle$, dakle skalarni produkt x s vektorom a koji ovisi samo o linearnom funkcionalu f (i, dakako, o izboru baze). U slučaju kompleksnog unitarnog prostora razlika je samo u tome što bismo vektor a definirali kao $\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$.

U ovom primjeru funkcional e_k^* iz dualne baze djeluje kao skalarno množenje vektorom e_k.

♡

Napomena 2.6.4. *Budući da se pridruživanjem dualnog prostora V^* konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V dobiva prostor jednake dimenzije, dakle izomorfan s V, nastavljanjem postupka "dualizacije" nastaje prostor $(V^*)^*$ također izomorfan s V. Između prostora V i njegovog tzv.* biduala $(V^*)^* = V^{**}$ *može se ustanoviti* prirodni *izomorfizam, tj. izomorfizam koji ne ovisi o izboru baze:*

$$\Psi : V \to V^{**}, \ \Psi(a) = u_a, \ a \in V,$$

gdje je $u_a : V^* \to \mathbb{F}$, $u_a(f) = f(a)$.

Otud se zapravo vidi da se daljnjom dualizacijom ne dobivaju "bitno novi" prostori, jer se bidual V^{**} može prirodno poistovjetiti s prostorom V.

Zadatak 21. *Odredite dualnu bazu baze $\{a, b, c\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $a = (1, 1, -1)$, $b = (1, -1, 1)$, $c = (-1, 1, 1)$.*

Uputa: Linearni funkcional a^* možemo izračunati kao linearnu kombinaciju funkcionala e_1^*, e_2^*, e_3^* koji čine bazu dualnu kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Neka je $a^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*$. Koeficijente α_i odredimo iz sustava linearnih jednadžbi koji dobijemo tako da s a^* redom djelujemo na vektore a, b i c. Te jednadžbe su $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ i $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Rješenje glasi: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 0$. Stoga je

$$a^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} e_1^*(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} e_2^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Analogno odredimo b^* i c^*.

2.7 Matrični zapis linearnog operatora u različitim bazama

Propozicija 2.7.1. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$, te $[A]_{(f,e)} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrični prikaz operatora A u paru baza (e) i (f) za prostore V i W. Tada je rang operatora A jednak rangu matrice $[A]_{(f,e)}$, to jest*

$$r(A) = r([A]_{(f,e)}).$$

Dokaz. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V i W. Prisjetimo se, rang operatora A je dimenzija slike operatora A, odnosno $r(A) = \dim S(A)$. Prema Propoziciji 2.4.9 znamo da je skup $\{A(e_1), \dots, A(e_n)\}$ sustav izvodnica za sliku $S(A)$ jer je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V. Stoga je

$$r(A) = \dim[A(e_1), \dots, A(e_n)].$$

S druge strane, rang matrice $[A]_{(f,e)}$ se definira kao

$$r([A]_{(f,e)}) = \dim[S_1, \dots, S_n],$$

gdje je $(S_1, \dots, S_n) \subset M_{m1}(\mathbb{F})^n$ stupčana reprezentacija matrice $[A]_{(f,e)}$. Sada ustanovimo preslikavanje

$$\Phi : W \to M_{m1}(\mathbb{F}), \Phi(y) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

gdje je $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i \in W$ prikaz vektora y u bazi (f). Očito je Φ izomorfizam (jer preslikava bazu prostora W u bazu prostora $M_{m1}(\mathbb{F})$). Nadalje, Φ preslikava

$$A(e_1) \mapsto S_1, \dots, A(e_n) \mapsto S_n,$$

a kako je Φ izomorfizam, potprostor $[A(e_1), \dots, A(e_n)]$ preslikava se u njemu izomorfan potprostor $[S_1, \dots, S_n]$ (- vidi Zadatak 18). Stoga slijedi

$$\dim[A(e_1), \dots, A(e_n)] = \dim[S_1, \dots, S_n],$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Definicija 2.7.2. *Neka su* $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *i* $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *baze vektorskog prostora* V *nad poljem* $\mathbb{F}$. *Matrica*

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}),$$

gdje su elementi matrice T *koeficijenti iz prikaza vektora* e'_j *u bazi* (e), *odnosno*

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} e_i, \ j = 1, \ldots, n,$$

naziva se ***matrica prijelaza*** *iz baze* (e) *u bazu* (e').

Matrica prijelaza T je regularna matrica. Naime, možemo ju shvatiti kao matricu operatora s V u V koji preslikava $e_i \mapsto e'_i$, $i = 1, \ldots, n$ u bazi (e). Budući je tako definiran operator izomorfizam, slijedi da mu je rang jednak n, pa prema Propoziciji 2.7.1 zaključujemo da je i matrica T ranga n, odnosno punog ranga, odnosno regularna.

Uočimo da matricu T možemo shvatiti i kao matrični zapis jediničnog operatora $I : V \to V$ u paru baza (e) i (e'), odnosno

$$T = [I]_{(e,e')}.$$

Pretpostavimo sada da vektor $x \in V$ ima sljedeće prikaze u bazi (e), odnosno (e'),

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j.$$

Ispitat ćemo u kakvoj su vezi *stare* koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ s *novim* koordinatama $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Vrijedi

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x'_j) e_i.$$

Dakle,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x'_j, \ i = 1, \ldots, n,$$

što matrično možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ili kraće

$$[x]_{(e)} = T \cdot [x]_{(e')}.$$

Budući da je T regularna matrica možemo izvesti jednostavnu formulu za određivanje novih koordinata vektora x.

Propozicija 2.7.3. *Neka su* (e) *i* (e') *dvije baze konačnodimenzionalnog vektorskog prostora* V, *te* T *matrica prijelaza iz baze* (e) *u bazu* (e'). *Tada je*

$$[x]_{(e')} = T^{-1} \cdot [x]_{(e)}.$$

Vidimo da se koordinate vektora u "novoj" bazi lako izračunavaju, ali treba pripaziti da se stupac koordinata u "staroj" bazi pritom množi *inverznom* matricom matrice prijelaza. Ujedno, T^{-1} je očito matrica prijelaza iz baze (e') u bazu (e).

Za izvod prethodnih relacija isto tako može nam poslužiti Propozicija 2.3.2 u kojoj imamo općenitu formulu za djelovanje operatora $A : V \to W$ pomoću njegovog matričnog prikaza u paru baza (e) i (f). Ovdje promatramo posebni slučaj u kojem jedinični operator $I : V \to V$ ima matricu $T = [I]_{(e,e')}$ pa vrijedi

$$[I(x)]_{(e)} = [I]_{(e,e')}[x]_{(e')},$$

odnosno

$$[x]_{(e)} = T[x]_{(e')}.$$

Analogno,

$$[I(x)]_{(e')} = [I]_{(e',e)}[x]_{(e)},$$

odnosno

$$[x]_{(e')} = T^{-1}[x]_{(e)}.$$

Nadalje, izvest ćemo relaciju između matričnih prikaza linearnog operatora u dvama različitim parovima baza, dakle u općem slučaju kad je moguća promjena i baze domene i baze kodomene. U toj će se relaciji morati onda pojaviti dvije matrice prijelaza.

Propozicija 2.7.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, (e) i (e') baze za V, te (f) i (f') baze za W. Ako je $A \in \mathcal{L}(V,W)$, tada vrijedi*

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1} \cdot [A]_{(f,e)} \cdot T,$$

gdje je $T \in M_n(\mathbb{F})$ matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'), a $S \in M_m(\mathbb{F})$ matrica prijelaza iz baze (f) u bazu (f').

Dokaz. Prema Propoziciji 2.7.3 za $x \in V$ i $Ax \in W$ vrijedi

$$[x]_{(e)} = T \cdot [x]_{(e')},\ [Ax]_{(f')} = S^{-1} \cdot [Ax]_{(f)}.$$

Nadalje,

$$[Ax]_{(f')} = [A]_{(f',e')}[x]_{(e')},\ [Ax]_{(f)} = [A]_{(f,e)}[x]_{(e)},$$

pa je

$$[A]_{(f',e')}[x]_{(e')} = S^{-1}([A]_{(f,e)}[x]_{(e)}) = S^{-1}([A]_{(f,e)}T[x]_{(e')}) = (S^{-1}[A]_{(f,e)}T)[x]_{(e')}.$$

Kako prethodna jednakost vrijedi za svaki $x \in V$, odnosno $[x]_{(e')} \in M_{n1}(\mathbb{F})$, vrijedi

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1}[A]_{(f,e)}T.$$

Naglasimo da izjednačavanje matrica na lijevoj i desnoj strani prethodno dobivene jednakosti ne možemo provesti nikakvim "skraćivanjem" s vektor-stupcem $[x]_{(e')}$ koji se pojavljuje s obje strane. Bitno je da jednakost vrijedi za svaki vektor x, a time i za svaki vektor stupac $[x]_{(e')}$. Naime, ako su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ takve da je $AX = BX$ za sve $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, tada je prostor rješenja jednadžbe $(A - B)X = 0$, to jest odgovarajućeg homogenog sustava, jednak čitavom prostoru $M_{n1}(\mathbb{F})$, odnosno dimenzije je n. Dakle, rang matrice $A - B$ je 0, to jest $A - B$ je nulmatrica. $\square$

Primjer 27. Neka na prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ djeluje operator deriviranja D. Za kodomenu možemo uzeti prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ jer se deriviranjem snižava stupanj polinoma. Dakle, $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. U paru kanonskih baza, $(e) = \{1, t, t^2, t^3\}$ i $(f) = \{1, t, t^2\}$ operatoru D pridružena je matrica

$$[D]_{(f,e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kao bazu (e') prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ uzmimo potencije polinoma $t-2$, dakle $\{1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3\}$. Matrica prijelaza T iz (e) u (e') glasi:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za bazu (f') prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ izaberimo bazu $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$. (Inače, to je ortogonalna baza u skalarnom produktu zadanom pomoću integrala na segmentu $[-1, 1]$, što ovdje nema posebnu važnost, samo je izabrana kao baza koja se katkad doista primjenjuje). Matrica prijelaza S iz (f) u (f') je

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

U paru baza (e'), (f') operator D ima matrični prikaz $S^{-1}D_{(f,e)}T$. Kako je

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dobivamo:

$$[D]_{(f',e')} = S^{-1}[D]_{(f,e)}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Testirajmo ovaj rezultat na jednom konkretnom polinomu, npr. za

$$p(t) = 1 + (t-2) + (t-2)^2 + (t-2)^3.$$

Deriviranjem polinoma p dobivamo

$$(Dp)(t) = 1 + 2(t-2) + 3(t-2)^2 = 9 - 10t + 3t^2.$$

S druge strane, množenjem matrice $[D]_{(f',e')}$ vektor stupcem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ koji predstavlja zapis polinoma p u bazi (e') dobivamo

$$[D]_{(f',e')}[p]_{(e')} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

U bazi (f') ovo je zapis polinoma $10 - 10t + 3(t^2 - \frac{1}{3}) = 9 - 10t + 3t^2$, što se podudara s već izračunatim polinomom $(Dp)(t)$.

♡

Tvrdnju Propozicije 2.7.4 mogli smo dokazati i pomoću kompozicije operatora $A \in \mathcal{L}(V, W)$ s jediničnim operatorima na V i W, I_V i I_W . Naime,

$$A = A \circ I_V = I_W \circ A,$$

te

$$[A \circ I_V]_{(f',e)} = [I_W \circ A]_{(f',e)}.$$

Dakle,

$$[A]_{(f',e')}[I_V]_{(e',e)} = [I_W]_{(f',f)}[A]_{(f,e)}. \tag{2.5}$$

Već smo uočili da se matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e') može interpretirati kao

$$T = [I_V]_{(e,e')},$$

pa je analogno matrica prijelaza iz baze (f) u bazu (f') jednaka

$$S = [I_W]_{(f,f')}.$$

Stoga, (2.5) pišemo kao

$$[A]_{(f',e')}T^{-1} = S^{-1}[A]_{(f,e)},$$

to jest

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1}[A]_{(f,e)}T.$$

Prema Propoziciji 2.7.4 zaključujemo da su matrični zapisi istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V, W)$ *ekvivalentne* matrice. Iz Linearne algebre 1 znamo da su matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentne ako postoje regularne matrice $S \in M_m(\mathbb{F})$ i $T \in M_n(\mathbb{F})$ za koje je $B = SAT$. Ekvivalentne matrice imaju isti rang pa bi se rang linearnog operatora mogao definirati i kao rang nekog (bilo kojeg) njegovog matričnog prikaza. Za veličine koje se linearnom operatoru mogu pridružiti uz pomoć baza pa onda i izračunavati uz pomoć baza, ali ne ovise o izboru baza, kažemo da su *invarijante* linearnog operatora. Uskoro ćemo upoznati još neke od njih.

Ako je $A \in \mathcal{L}(V)$, onda iz Propozicije 2.7.4 izravno slijedi:

Korolar 2.7.5. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te (e) i (e') baze za V. Ako je $A \in \mathcal{L}(V)$, tada vrijedi*

$$[A]_{(e')} = T^{-1} \cdot [A]_{(e)} \cdot T,$$

gdje je T matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e').

Definicija 2.7.6. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica A* ***slična*** *matrici B ako postoji regularna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi*

$$B = T^{-1}AT.$$

Često ćemo kratko reći da su matrice A i B slične, jer se lako vidi da je relacija sličnosti na $M_n(\mathbb{F})$ simetrična. Nadalje, iz same definicije sličnosti matrica slijedi da su slične matrice i ekvivalentne, dok obrat očito ne vrijedi. Primjerice, jedinična matrica I reda n slična je samo sama sebi, jer za bilo koju regularnu matricu T reda n vrijedi $T^{-1}IT = I$, dok je I ekvivalentna svakoj regularnoj matrici reda n, budući da su matrice jednakog tipa ekvivalentne ako i samo ako imaju isti rang. Dakako, slične matrice imaju jednaki rang.

Iz Korolara 2.7.5 slijedi da su matrični zapisi istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V)$ slične matrice. To je vrlo važna činjenica na koju ćemo se često pozivati.

Iz Linearne algebre 1 također znamo da je ekvivalentnost matrica relacija ekvivalencije na skupu matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ za bilo koje $m, n \in \mathbb{N}$. Pojedinu klasu ekvivalencije tada čine sve matrice tipa (m, n) kojima se podudara rang. Standardni predstavnik pojedine klase je kanonska matrica određenog ranga r. Sad ćemo pokazati da je i sličnost kvadratnih matrica jedna relacija ekvivalencije, dakako na skupu $M_n(\mathbb{F})$, za bilo koji n, a zatim ćemo usporediti klase ekvivalencije relacije sličnosti s prethodno spomenutim klasama za relaciju ekvivalentnosti matrica.

Propozicija 2.7.7. *Relacija* biti sličan *je relacija ekvivalencije na skupu svih kvadratnih matrica istog reda.*

Dokaz. Pokažimo redom svojstva relacije ekvivalencije.
Refleksivnost. Matrica A je slična samoj sebi jer je $A = I^{-1}AI$, I jedinična matrica.
Simetričnost. Ako su A i B slične matrice onda postoji regularna matrica T takva da je $B = T^{-1}AT$. Množenjem prethodne jednakosti s T^{-1} s desna, te s T lijeva slijedi $TBT^{-1} = A$, odnosno $A = (T^{-1})^{-1}BT^{-1} = A$, pa su B i A slične.
Tranzitivnost. Ako je A slična s B, te B slična s C, onda postoje regularne matrice T, S takve da je $B = T^{-1}AT$ i $C = S^{-1}BS$. Kako je i TS regularna matrica, te $C = S^{-1}(T^{-1}AT)S = (TS)^{-1}A(TS)$, zaključujemo da je i A slična s C. □

Razmotrimo kako relacija sličnosti rastavlja skup $M_n(\mathbb{F})$ u klase ekvivalencije. Relacija sličnosti "finija" je od relacije u kojoj sve matrice iz $M_n(\mathbb{F})$ kojima je rang jednak čine jednu klasu. Unutar skupa matrica jednakog ranga r nalaze se i matrice koje jesu slične, kao i neke matrice koje nisu slične. To vidimo već na primjeru kvadratnih matrica punog ranga n. Svaka skalarna matrica αI, $\alpha \neq 0$, slična je samo sebi pa je jedini član svoje klase. S druge strane, sve te matrice pripadaju istoj klasi ekvivalentnih matrica ranga n. Možemo to dodatno protumačiti ako matrice promatramo kao matrične prikaze linearnih operatora iz $\mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$. Svaki bijektivni linearni operator ima, u bilo kojoj bazi, matricu punog ranga n, ali različiti bijektivni operatori djeluju na bitno različite načine koji se nipošto ne mogu odrediti samo podatkom o rangu. Tek sličnost pridruženih matrica, kao znatno "finiji" podatak, pokazuje jesu li to matrice pridružene istom linearnom operatoru, samo u različitim bazama.

Primjer 28. Sljedeće matrice reda 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

imaju rang 2 i međusobno su ekvivalentne, ali nikoje dvije od njih nisu slične. To nas i ne čudi, uzmemo li u obzir njihov geometrijski smisao ako su pridružene na standardni način operatorima: zrcaljenja, centralne simetrije (ili rotacije za kut π) i rotacije za kut $\pi/3$ na prostoru $V^2(O)$. Promjenom baze tog prostora prva i treća matrica bit će zamijenjene nekim drugim, ali njima sličnim matricama, dok će operatoru centralne simetrije u bilo kojoj bazi pripadati ista matrica $-I$, slična jedino sama sebi.

♡

Važno je pitanje kako prepoznati to jest izračunati jesu li neke dvije kvadratne matrice slične, dakle mogu li biti pridružene jednom te istom linearnom operatoru, a da pritom, po mogućnosti, ne moramo efektivno određivati matricu prijelaza T pomoću koje je ostvarena sličnost. Vidjet ćemo da slične matrice imaju još neka zajednička svojstva koja su nužni, premda ne i dovoljni uvjeti za sličnost. Zapravo je riječ o *invarijantama* linearnog operatora, veličinama odnosno funkcijama koje moraju poprimati istu vrijednost za sve slične matrice, budući da su pridružene jednom linearnom operatoru.

Propozicija 2.7.8. *Slične matrice imaju jednaku determinantu.*

Dokaz. Neka su A i B slične matrice, te T regularna matrica za koju je $B = T^{-1}AT$. Tada zbog *Binet-Cauchyjevog teorema* dobivamo

$$\det B = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A(\det T^{-1} \det T) = \det A \det(T^{-1}T) = \det A.$$

□

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Na primjer, matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

imaju jednaku determinantu. Ako bi one bile slične, postojala bi regularna matrica T takva da je $A = T^{-1}IT = I$, što je očita neistina.

Budući da su matrice istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V)$ u različitim bazama slične, Propozicija 2.7.8 nam omogućava definiciju još jedne invarijante linearnog operatora.

Definicija 2.7.9. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, te (e) neka baza za V. Tada se* ***determinanta linearnog operatora*** *A definira kao determinanta matričnog zapisa operatora A u bazi (e), to jest*

$$\det A = \det[A]_{(e)}.$$

Vidimo, dakle, da je linearnom operatoru A na prostoru V na ovaj način pridružena vrijednost determinante kao determinanta njegove matrice u bilo kojoj bazi i ta je definicija korektna jer, zahvaljujući Propoziciji 2.7.8 , $\det A$ ne ovisi o izboru baze.

Primjer 29. Analogno kao za determinantu, linearnom operatoru na konačnodimenzionalnom prostoru V može se pridružiti i *trag*, kao trag njegovog matričnog zapisa u bilo kojoj bazi (e). Prisjetimo se, trag kvadratne matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ definira se kao zbroj svih elemenata dijagonale:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definicija traga linearnog operatora bit će korektna ako se vrijednosti traga sličnih matrica podudaraju. Provjerite to.
(*Uputa*: Nije teško provjeriti da za bilo koje matrice $A, T \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA)$. Posebno, ako je T regularna matrica, primijenite prethodnu jednakost na matrice AT i T^{-1}.)

♡

Zadatak 22. *Pronađite, ako je moguće, matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ takve da vrijedi $r(A) = r(B)$, $\det A = \det B$ i $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, ali da A i B nisu slične.*

Zadatak 23. *Odredite skup svih realnih antisimetričnih matrica reda 2 koje su slične:*

(a) svojoj transponiranoj matrici,

(b) svojoj inverznoj matrici.

Uputa. Svaka antisimetrična matrica A reda 2 slična je transponiranoj. Izravno se odrede regularne matrice T takve da vrijedi $AT = TA$. Svaka antisimetrična matrica reda 2, osim nulmatrice, regularna je pa se može tražiti takva regularna matrica T da vrijedi $T^{-1}AT = A^{-1}$, odnosno ekvivalentno tome da $ATA = T$.)

2.8 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, pri čemu je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, ne nužno konačnodimenzionalan. Neki vektori iz prostora V i neki skalari iz $\mathbb{F}$ mogu imati posebno istaknutu ulogu za djelovanje operatora A. Poznavanje takvih vektora i skalara može u velikoj mjeri doprinijeti tumačenju kako djeluje linearni operator te kako izabrati bazu prostora V, ako je konačnodimenzionalan, da bi matrični prikaz operatora bio što jednostavniji.

Riječ je o vektorima $x \in V$ takvima da slika Ax ima jednak "smjer" kao vektor x, to jest takvima da postoji neki $\lambda \in \mathbb{F}$ sa svojstvom da je $Ax = \lambda x$. Pritom nulvektor 0_V nije od interesa jer se uvijek preslika u 0_V pa se isključuje iz razmatranja, odnosno iz definicije koja će uslijediti nakon primjera.

Uzmimo geometrijski primjer zrcaljenja A s obzirom na neki 2-dimenzionalni potprostor L prostora $V^3(O)$. Za svaki $\vec{x} \in L$ vrijedi $A\vec{x} = \vec{x}$, a za svaki $\vec{x}$ ortogonalan na L vrijedi $A\vec{x} = -\vec{x}$. Dakle, zrcaljenje "čuva" svaki smjer u potprostoru L (na jednostavan način, restrikcija na L mu je jedinični operator), kao i smjer ortogonalan na L, preslikavajući svaki $\vec{x} \in L^{\perp}$ u njemu suprotni vektor. U ovom primjeru, ako bazu prostora V izaberemo tako da su prva dva vektora iz L, a treći ortogonalan na L, djelovanje operatora A u potpunosti je prepoznatljivo kao zrcaljenje, a matrični prikaz u takvoj bazi je dijagonalna matrica $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Naravno, da nam je isti operator zadan matricom u nekoj općenitoj bazi čiji vektori nemaju posebnu ulogu za njegovo djelovanje, imali bismo dosta posla da ustanovimo kako zapravo djeluje taj operator i da prepoznamo zrcaljenje.

Definicija 2.8.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathcal{L}(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je* ***svojstvena*** *ili* ***karakteristična vrijednost*** *operatora A ako postoji vektor $x \in V$, različit od 0_V, takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. Taj vektor naziva se* ***svojstveni*** *ili* ***karakteristični vektor*** *operatora A, pridružen svojstvenoj (karakterističnoj) vrijednosti λ.*

(Za svojstveni vektor, odnosno svojstvenu vrijednost još se rabe nazivi *vlastiti* vektor, odnosno *vlastita* vrijednost. Engleski naziv za ove pojmove je *eigenvector* i *eigenvalue.*)

Uočimo da smo u primjeru zrcaljenja lako prepoznali svojstvene vrijednosti 1 i -1. Svaki vektor iz L, različit od 0_V, svojstveni je vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, a svaki vektor iz $L^{\perp}$ različit od 0_V, svojstveni je vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti -1. Geometrijski je jasno, a može se i izračunati, da su to jedine svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori zrcaljenja. Naime, svaki $\vec{v} \in V^3(O)$ može se prikazati kao $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$, pri čemu $\vec{y} \in L$, $\vec{z} \in L^{\perp}$. Zato je $A\vec{v} = A\vec{y} + A\vec{z} = \vec{y} - \vec{z}$. Ako bi postojao neki $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, imali bismo $\vec{y} - \vec{z} = \lambda(\vec{y} + \vec{z})$ i odatle $(1 - \lambda)\vec{y} = (1 + \lambda)\vec{z}$. To je moguće samo ako je $\lambda = 1$ i $\vec{z} = \vec{0}$ ili ako $\lambda = -1$ i $\vec{y} = \vec{0}$, odnosno ako $\vec{y} = \vec{z} = \vec{0}$, no tada je $\vec{v} = \vec{0}$ pa $\vec{v}$ u tom slučaju nije svojstveni vektor.

Definicija 2.8.2. *Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora A naziva se* ***spektar*** *i označava sa $\sigma(A)$.*

Iz same definicije je jasno da je spektar podskup polja $\mathbb{F}$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. No, spektar može biti i prazan skup kao što ćemo vidjeti na primjeru rotacije u $V^2(O)$ za kut različit od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Naime, zakret svakog vektora za kut koji nije višekratnik od π očito svaki vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ preslika u vektor smjera različitog od $\vec{v}$.

Napomenimo da smo u definiciji pojmova svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora mogli krenuti i obrnuto, to jest: Za vektor $x \in V$, $x \neq 0_V$, kažemo da je *svojstveni* ili *karakteristični vektor* operatora A ako postoji skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. No, ako je $\lambda \in \sigma(A)$ i x bilo koji svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, onda x nije jedinstven nego je i svaki αx, $\alpha \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$, također svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Štoviše, svakom $\lambda \in \sigma(A)$ pridružen je na taj način cijeli potprostor (vidi Propoziciju 2.8.6).

Sada ćemo se pozabaviti određivanjem svojstvenih vrijednosti danog operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Dakle, neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V)$. Tražimo $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je

$$A(x) = \lambda x \tag{2.6}$$

za neki $x \in V\backslash\{0_V\}$. Odatle je

$$A(x) - \lambda x = 0_V,$$

odnosno

$$A(x) - \lambda I(x) = 0_V,$$

gdje je I jedinični operator na V. Po definiciji zbrajanja i množenja skalarom na prostoru $\mathcal{L}(V)$ vrijedi

$$(A - \lambda I)(x) = 0_V,$$

gdje je $A - \lambda I$ linearan operator, odnosno element prostora $\mathcal{L}(V)$. Zaključujemo da ako postoji vektor $x \neq 0_V$ takav da vrijedi (2.6), onda je on nužno iz jezgre operatora $A - \lambda I$. Nadalje vidimo da jezgra operatora $A - \lambda I$ nije trivijalna, odnosno operator $A - \lambda I$ nije monomorfizam pa mu je defekt pozitivan, odnosno $d(A - \lambda I) \geq 1$. Stoga, $A - \lambda I$ nije regularan operator pa mu je determinanta jednaka nuli, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Konačno možemo rezimirati:

Propozicija 2.8.3. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$. Ako je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A, onda je λ_0 rješenje algebarske jednadžbe $\det(A - \lambda I) = 0$.*

Prisjetimo se, determinanta linearnog operatora definira se kao determinanta matričnog zapisa tog operatora u nekoj bazi. Dakle, ako je (e) baza za V tada je

$$\det(A - \lambda I) = \det[A - \lambda I]_{(e)} = \det([A]_{(e)} - \lambda I),$$

gdje smo s I označili i jediničnu matricu. Ovdje je važno uočiti da $\det(A - \lambda I)$ predstavlja jedan polinom stupnja $n = \dim V$ u varijabli λ. Naime, pri izračunavanju ove determinante λ će se pojaviti u svakom članu koji sadrži barem jedan element dijagonale budući da su svi oni oblika $a_{ii} - \lambda$. Prvi član determinante jednak je umnošku po dijagonali: $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ u kojem se stoga pojavljuje $(-\lambda)^n = (-1)^n \lambda^n$ i to je vodeći član polinoma, budući da se samo u prvom članu determinante λ pojavljuje u svakom faktoru.

Definicija 2.8.4. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se* ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom*** *operatora A.*

Ova definicija pojma koji je vezan uz linearni operator $A \in \mathcal{L}(V)$ korektna je stoga što ne ovisi o izboru baze pomoću koje se izračunava razmatrani polinom (kao i primjerice definicija determinante takvog operatora). Naime, ako je $[A]_{(e')}$ matrica operatora A u nekoj drugoj bazi (e'), onda su matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ slične, a odatle lako slijedi da su slične i matrice $[A - \lambda I]_{(e)}$ i $[A - \lambda I]_{(e')}$. Zaista, ako je T regularna matrica takva da je

$$[A]_{(e')} = T^{-1}[A]_{(e)}T,$$

imamo

$$T^{-1}[A - \lambda I]_{(e)}T = T^{-1}[A]_{(e)}T - \lambda T^{-1}IT = [A]_{(e')} - \lambda I = [A - \lambda I]_{(e')}.$$

Prema Propoziciji 2.7.8

$$\det[A - \lambda I]_{(e)} = \det[A - \lambda I]_{(e')}$$

pa karakteristični polinom operatora A ne ovisi o izboru baze pomoću koje je izračunat. Vidimo, dakle, da je i karakteristični polinom jedna invarijanta linearnog operatora $A \in \mathcal{L}(V)$. Naglasimo da to posebno znači da je svaki koeficijent karakterističnog polinoma invarijanta operatora A. (Vidi primjer 32.)

Smisleno je i za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ definirati *karakteristični polinom matrice A*:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Teorem 2.8.5. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathcal{L}(V)$. Skalar λ_0 je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako je λ_0 nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$ i $\lambda_0 \in \mathbb{F}$.*

Dokaz. Nužnost je pokazana Propozicijom 2.8.3.

Sada pretpostavimo da je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$, odnosno $\det(A - \lambda_0 I) = 0$. Stoga operator $A - \lambda_0 I$ nije regularan što je ekvivalentno s činjenicom da nije monomorfizam (prema Korolaru 2.4.12). Dakle, $J(A - \lambda_0 I) \neq \{0_V\}$, pa postoji $x \in J(A - \lambda_0 I)$, $x \neq 0_V$. Imamo $(A - \lambda_0 I)x = 0_V$, odnosno $Ax = \lambda_0 x$, što zbog $x \neq 0_V$ upravo znači da je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. □

Primjer 30. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ zadan svojim djelovanjem na kanonskoj bazi:

$$A(1,0) = (3,2),\ A(0,1) = (2,3).$$

Odredimo mu karakteristični polinom i spektar.

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Očito su nultočke karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Dakle, $\sigma(A) = \{1, 5\}$.

U prethodnom primjeru linearni operator A zadan je na realnom vektorskom prostoru, a obje nultočke karakterističnog polinoma su realni brojevi. Stoga ta dva broja jesu svojstvene vrijednosti operatora A, jer ispunjavaju uvjete iz Teorema 2.8.5.

Obratimo pozornost na uvjet da nultočka λ_0 karakterističnog polinoma mora biti skalar iz polja $\mathbb{F}$, nad kojim je definiran vektorski prostor V, kako bi taj skalar bio svojstvena vrijednost linearnog operatora. Naime, karakteristični polinom ne mora općenito imati sve svoje nultočke u polju $\mathbb{F}$, štoviše, ne mora imati nijednu nultočku u tom polju, premda može imati nultočku u nekom polju koje sadrži $\mathbb{F}$. Tipični i za nas najvažniji primjeri odnose se na polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Po osnovnom teoremu algebre, svaki polinom stupnja barem 1 s kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nultočku u polju kompleksnih brojeva. Poznato nam je, međutim, da postoje polinomi s realnim koeficijentima koji nemaju nijednu realnu nultočku. Takvi su, primjerice, polinomi t^2+1 i t^4+3. Sljedeći primjer pokazat će se kako se takav polinom može pojaviti kao karakteristični polinom linearnog operatora, dobro poznatog iz geometrije euklidske ravnine.

Primjer 31. Neka je $R \in \mathcal{L}(V^2(O))$ rotacija za $\pi/3$ oko O. Odredimo joj karakteristični polinom i spektar. Kako je

$$[R]_{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

pri čemu je (e) kanonska baza za $V^2(O)$, karakteristični polinom od R je

$$k_R(\lambda) = \det(R-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}-\lambda)^2 + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Očito $k_R(\lambda)$ nema realnih nultočaka pa je $\sigma(R) = \emptyset$. Ovaj račun u skladu je s prijašnjim zaključkom da rotacija ravnine za kut različit od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nema svojstvenih vrijednosti.

♡

Primjer 32. Već je naglašeno kako invarijantnost karakterističnog polinoma linearnog operatora znači da je svaki pojedini koeficijent tog polinoma invarijanta dotičnog operatora. Pogledajmo pobliže neke od tih koeficijenata, jer su nam otprije poznati kao invarijante linearnog operatora.

(a) Neka je $\dim V = 2$ i $A \in \mathcal{L}(V)$ te neka je matrica $[a_{ij}]$ pridružena tom operatoru u nekoj bazi (e). Tada vrijedi:

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A.$$

(Provjerite to računom). Dakle, determinanta i trag (to jest, $-\operatorname{tr} A$) pojavljuju se kao koeficijenti u $k_A(\lambda)$ ako je $n = 2$.

(b) Rezultat za $n = 2$ nije iznimka. Uzmimo $n \geq 2$. U bilo kojem polinomu $p(t)$ slobodni član možemo dobiti tako da uvrstimo $t = 0$. Uvrstimo li $\lambda = 0$ u $k_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ dobivamo

$$k_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$$

pa je općenito slobodni član karakterističnog polinoma operatora A jednak upravo $\det A$. Posebno, slobodni član jednak je 0 ("iščezava") ako i samo ako je $r(A) < n$. Nadalje, koeficijent uz λ^{n-1} općenito je jednak $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$. To nije teško vidjeti iz $\det(A-\lambda I)$ budući da član determinante sadrži λ^{n-1} ako i samo ako se nalazi u umnošku $(a_{11} -$

$\lambda) \cdots (a_{nn}-\lambda)$ tako da se iz bilo kojih $n-1$ faktora izabere $-\lambda$, a iz preostalog odgovarajući a_{jj}. U zbroju onda imamo

$$(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A\lambda^{n-1}.$$

Dakle,

$$k_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A\lambda^{n-1} + \cdots + \det A.$$

♡

Zadatak 24. *Neka je* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *prvi stupac kvadratne matrice. Može li se drugi stupac popuniti tako da to bude matrica nekog zrcaljenja na prostoru* $V^2(O)$*? Ima li više rješenja?*

Uputa. Kako mora izgledati karakteristični polinom zrcaljenja u $V^2(O)$?

Zadatak 25. *Napišite karakteristični polinom:*

(a) ortogonalnog projektora na 1*-dimenzionalan potprostor prostora* $V^3(O)$,

(b) zrcaljenja na 2*-dimenzionalnom potprostoru prostora* $V^3(O)$.

Uputa. Kako karakteristični polinom ne ovisi o izboru baze, možemo izabrati standardne matrice zadanih tipova operatora i izračunati njihove karakteristične polinome.

Propozicija 2.8.6. *Neka je* V *vektorski prostor i* $A \in \mathcal{L}(V)$*. Ako je* $\lambda \in \sigma(A)$*, onda je skup*

$$V_A(\lambda) = \{x \in V \,:\, Ax = \lambda x\}.$$

potprostor od V*.*

Dokaz. Očito je $V_A(\lambda) = J(A - \lambda I)$. No, dokaz se može provesti i izravnom provjerom. Ako su $x, y \in V_A(\lambda)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada je

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y),$$

pa zaključujemo $\alpha x + \beta y \in V_A(\lambda)$. □

Definicija 2.8.7. *Neka je* $A \in \mathcal{L}(V)$*, te* $\lambda \in \sigma(A)$*. Potprostor* $V_A(\lambda)$ *naziva se* ***svojstveni potprostor*** *pridružen svojstvenoj vrijednosti* λ*. Ako je* $V_A(\lambda)$ *konačnodimenzionalan, njegova dimenzija naziva se* ***geometrijska kratnost*** *svojstvene vrijednosti* λ*.*

Budući da je svojstveni potprostor $V_A(\lambda_0)$ jednak jezgri operatora $A - \lambda_0 I$, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 upravo je jednaka defektu $d(A - \lambda_0 I)$. Ako je V konačnodimenzionalan i $\dim V = n$, po Teoremu o rangu i defektu znamo da je geometrijska kratnost jednaka $n - r(A - \lambda_0 I)$. Pritom možemo primijetiti da se problem određivanja svojstvenih vrijednosti i njihovih geometrijskih kratnosti svodi na tip zadatka kakav se često rješavao u Linearnoj algebri 1 u vezi s rangom matrice: Odredite rang zadane matrice u ovisnosti o parametru (katkad označavanom upravo s λ, katkad drukčije). Za operator A, odnosno njegovu matricu, ovdje izračunavamo rang matrice $A - \lambda I$, u ovisnosti o parametru λ. Od interesa su nam sve vrijednosti λ za koje $r(A - \lambda I)$ nije n, to jest puni rang, a pripadne vrijednosti $n - r(A - \lambda I)$ tada su geometrijske kratnosti odgovarajućih svojstvenih vrijednosti.

U skladu s Teoremom 2.8.5 svojstvene vrijednosti tražimo kao nultočke karakterističnog polinoma, dakle kao rješenja algebarske jednadžbe n-tog stupnja. To je ekvivalentno određivanju vrijednosti λ za koje je $r(A - \lambda I) < n$, a povoljno je utoliko što je uvjet izražen jednom jednadžbom. Međutim, čim je ta jednadžba stupnja većeg od 2, njezino rješavanje općenito nije jednostavno.

Vratimo se karakterističnom polinomu. Svaki polinom f stupnja n, za $n \geq 1$, ima točno n nultočaka u polju $\mathbb{C}$, pri čemu brojimo i kratnost svake nultočke. Podsjetimo se da je kompleksni broj x_0 nultočka polinoma f kratnosti k ako vrijedi $f(x_0) = 0$ i postoji polinom g takav da je $f(x) = \alpha(x - x_0)^k g(x)$, pri čemu $g(x_0) \neq 0$. (α je kompleksni broj različit od 0 i predstavlja koeficijent u vodećem članu polinoma f). Drugim riječima, kratnost k nultočke x_0 polinoma $f(x)$ najveći je eksponent za koji polinom $(x - x_0)^k$ dijeli polinom $f(x)$. Neka su kompleksni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve različite nultočke polinoma f stupnja $n \geq 1$, a prirodni brojevi $k_1, k_2, \ldots k_m$ njihove pripadne kratnosti kao nultočaka. Tada je $m \leq n$ i $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Ukratko, polinom f s kompleksnim koeficijentima stupnja n, $n \geq 1$, nad poljem $\mathbb{C}$ može se prikazati kao

$$f(x) = \alpha(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_m)^{k_m}.$$

Pojam kratnosti nultočke odnosi se i na realne nultočke, posebno i u slučaju polinoma s realnim koeficijentima. Zbroj kratnosti realnih nultočaka općenito nije jednak n, nego može poprimiti bilo koju cjelobrojnu vrijednost od 0 do n. Stoga, ako polinom f stupnja $n \geq 1$ nad poljem $\mathbb{R}$ ima realne nultočke $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s pripadnim kratnostima $k_1, k_2, \ldots, k_m$, onda je

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_m)^{k_m} g(x), \;\; k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leq n,$$

gdje je g polinom stupnja k, $0 \leq k \leq n$, koji nema realnih nultočki.

Definicija 2.8.8. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, te $\lambda_0 \in \sigma(A)$.* ***Algebarska kratnost*** *svojstvene vrijednosti λ_0 je kratnost koju λ_0 ima kao nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$.*

Napomena. Kod određivanja nultočaka karakterističnog polinoma važno je voditi računa o tome nad kojim je poljem definiran vektorski prostor na kojem djeluje promatrani linearni operator. Ako je to polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, nultočke iz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ nisu svojstvene vrijednosti operatora. Korisno je podsjetiti se da ako karakteristični polinom ima samo realne koeficijente, onda se sve nultočke iz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ pojavljuju u kompleksno konjugiranim parovima. Zbog toga polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima sigurno ima barem jednu realnu nultočku. Budući da se mnogi nama važni primjeri odnose na 3-dimenzionalni realni prostor $V^3(O)$, zaključujemo da karakteristični polinom linearnog operatora na tom prostoru ima ili jednu ili tri realne nultočke (ne nužno različite).

Nastavimo razmatranjem algebarske i geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Te dvije kratnosti mogu, ali ne moraju biti jednake. Dakako, ako je algebarska kratnost jednaka barem 1, onda je i geometrijska kratnost jednaka barem 1, što lako slijedi iz Teorema 2.8.5 i Propozicije 2.8.6. U mogućnost različitosti algebarske i geometrijske kratnosti uvjerimo se odmah na primjerima dva jednostavna operatora na prostoru $\mathbb{R}^2$:

Primjer 33. Jedinični operator $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ima karakteristični polinom $(\lambda - 1)^2$, s jedinom nultočkom 1, čija su i algebarska i geometrijska kratnost jednake 2 (jer čitav $\mathbb{R}^2$ je svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1, zbog $Ix = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}^2$). S druge strane, neka je

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ zadan djelovanjem na bazu (e_1, e_2) s $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$. Tada je

$$[A]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je $k_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ i ponovno je $\lambda_0 = 1$ jedina nultočka, algebarske kratnosti 2. Međutim, $r(A - \lambda_0 I) = r(A - I) = 1$ pa je geometrijska kratnost za $\lambda_0 = 1$ jednaka $d(A - I) = 1$. Operator A ima samo jedan svojstveni potprostor i to dimenzije 1 (očito je to $[e_1]$).

♡

Općenita relacija između algebarske i geometrijske kratnosti iskazana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 2.8.9. *Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nekog linearnog operatora nije veća od algebarske kratnosti.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Označimo s g geometrijsku kratnost od λ_0, odnosno

$$1 \leq g = \dim V_A(\lambda_0) \leq n.$$

Bazu za $V_A(\lambda_0)$ čini g svojstvenih vektora za λ_0. Ako tu bazu proširimo da baze čitavog prostora, (b), dobit ćemo bazu u kojoj operator A ima matrični prikaz oblika

$$[A]_{(b)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

U matrici $[A - \lambda I]_{(b)}$ imamo onda elemente $\lambda_0 - \lambda$ na prvih g mjesta dijagonale, što će kod računanja determinante dati $(\lambda_0 - \lambda)^g$. O izgledu preostalih $n - g$ stupaca ne može se zaključiti ništa posebno, osim da će se na daljnjim mjestima na dijagonali pojavljivati koeficijenti koji sadrže $-\lambda$. To nam je dovoljno da bismo vidjeli kako će u $\det[A - \lambda I]_{(b)}$ posljednjih $n - g$ stupaca dati doprinos oblika nekog polinoma $p(\lambda)$ stupnja $n - g$ u varijabli λ. Skalar λ_0 može, ali ne mora biti nultočka polinoma $p(\lambda)$. Dakle, imamo

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^g p(\lambda)$$

pa je algebarska kratnost nultočke λ_0 veća od g ili jednaka g, ovisno o tome je li λ_0 nultočka polinoma $p(\lambda)$ ili nije. □

U uvodu ovog odjeljka spomenuli smo da se poznavanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru može iskoristiti kako bi se izabrala baza prostora u kojoj je matrični prikaz operatora čim jednostavniji. Jedan mogući cilj pojednostavljivanja je pridruživanje dijagonalne matrice zadanom operatoru, ako je to moguće ili barem matrice koja "djelomično" izgleda kao dijagonalna. Naime, izvođenje operacija s dijagonalnim matricama, posebno množenje pa time i potenciranje, značajno je lakše nego s općenitim matricama.

Već u dokazu Propozicije 2.8.9 razabire se osnovna zamisao: birati bazu prostora tako da se u njoj nalazi što je više moguće svojstvenih vektora zadanog operatora A. Čim je za j-ti vektor baze izabran svojstveni vektor v pridružen nekom $\lambda_0 \in \sigma(A)$, zbog $Av = \lambda_0 v$ u j-tom stupcu matrice operatora bit će λ_0 na poziciji (j, j), dok će svi ostali elementi tog stupca biti jednaki 0.

Definicija 2.8.10. *Kažemo da se operator $A \in \mathcal{L}(V)$ može* ***dijagonalizirati****, odnosno da je* ***dijagonalizabilan****, ako postoji baza prostora V u kojoj A ima dijagonalnu matricu.*

Propozicija 2.8.11. *Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V)$ može se dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza prostora V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.*

Dokaz. Ako se operator A dijagonalizira u bazi $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$, onda postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$[A]_{(b)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

odnosno vrijedi

$$A(b_i) = \lambda_i b_i,$$

pa je λ_i svojstvena vrijednost s pripadnim svojstvenim vektorom b_i. Stoga je (b) baza prostora V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.

Obrat slijedi direktno iz definicije svojstvenog vektora, odnosno svojstvene vrijednosti. □

Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{L}(V)$ i

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

pri čemu su svojstvene vrijednosti λ_i međusobno različite. Ukoliko je zbroj pripadnih algebarskih kratnosti ovih svojstvenih vrijednosti manji od n, to jest ako $a_1 + \cdots + a_k < n$ tada je prema Propoziciji 2.8.9

$$g_1 + \cdots + g_k \leq a_1 + \cdots + a_k < n,$$

gdje su g_i pripadne geometrijske kratnosti, odnosno dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora. Stoga možemo zaključiti da u ovom slučaju *ne možemo* imati bazu za V koja se sastoji od svojstvenih vektora. Dakle, nužni uvjet da se operator može dijagonalizirati jest da *zbroj algebarskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti bude jednak $n = \dim V$*. Praktično, u zadacima, ovaj uvjet obično znači da za operator na realnom n-dimenzionalnom prostoru V njegov karakteristični polinom mora imati svih n nultočaka (računajući s njihovim kratnostima) u polju $\mathbb{R}$. Čim je barem jedna nultočka kompleksni broj koji nije realan, ne će biti dostatno svojstvenih vektora za sastavljanje baze pa se operator ne će moći dijagonalizirati.

Nadalje, ako je $g_i < a_i$ za neku svojstvenu vrijednost λ_i, onda je ponovo

$$g_1 + \cdots + g_k < n,$$

pa niti u ovom slučaju nije moguće sastaviti bazu od svojstvenih vektora operatora A. Stoga, još jedan nužan uvjet dijagonalizabilnosti operatora jest da je *algebarska kratnost jednaka geometrijskoj kratnosti za svaku svojstvenu vrijednost λ_i, $i = 1, \ldots, k$*. Uskoro ćemo ustanoviti da su navedena dva uvjeta i dovoljna. Najprije je potrebno dokazati da uzimanjem po jednog vektora iz različitih svojstvenih potprostora dobivamo linearno nezavisan skup. Naime, jasno je da različiti svojstveni potprostori imaju u presjeku samo nulvektor, jer za različite $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ ne može vrijediti $Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ ako je $v \neq 0_V$. No, nije očito da je skup od po jednog vektora pridruženog različitim svojstvenim vrijednostima linearno nezavisan (što je svakako nužno da bi se od svojstvenih vektora mogla sastaviti baza prostora).

Propozicija 2.8.12. *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti operatora $A \in \mathcal{L}(V)$ i neka su $v_1, \ldots, v_k$ pripadni svojstveni vektori pridruženi redom ovim svojstvenim vrijednostima. Tada je skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Prema pretpostavci je

$$A(v_i) = \lambda_i v_i,\ v_i \neq 0_V,\ i = 1, \ldots, k.$$

Pretpostavimo, suprotno tvrdnji propozicije, da je skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno zavisan. Tada postoji vektor koji je linearna kombinacija svojih prethodnika. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je to vektor v_k, odnosno da je

$$v_k \in [v_1, \ldots, v_{k-1}],$$

te da je $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ linearno nezavisan skup. Tada postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ za koje je

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

Ako na prethodnu jednakost djelujemo operatorom A dobit ćemo

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}. \tag{2.7}$$

Sada razlikujemo dva slučaja: $\lambda_k = 0$ i $\lambda_k \neq 0$. Ako je $\lambda_k = 0$, onda jednakost (2.7), zbog linearne nezavisnosti skupa $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, povlači

$$\alpha_1 \lambda_1 = \cdots = \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} = 0.$$

Nadalje, svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ su nužno različite od 0 (jer je $\lambda_k = 0$ i sve su međusobno različite), pa je i

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0.$$

Sada je $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0_V$, što ne može biti jer je v_k svojstveni vektor.

Pokažimo tvrdnju i u drugom slučaju, $\lambda_k \neq 0$. Množenjem relacije (2.7) s λ_k^{-1} dobivamo

$$v_k = \lambda_k^{-1} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k^{-1} \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}.$$

Kako je i $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1}$, zbog jednoznačnosti prikaza slijedi

$$\alpha_i = \lambda_k^{-1} \alpha_i \lambda_i,\ i = 1, \ldots, k-1.$$

Ako postoji neki $\alpha_j \neq 0$, onda slijedi

$$1 = \lambda_k^{-1} \lambda_j,$$

to jest $\lambda_k = \lambda_j$ i $1 \leq j < k$, što nije moguće jer su sve svojstvene vrijednosti različite. Dakle, jedino je moguće da je $\alpha_i = 0$ za sve $i = 1, \ldots, k-1$. No, tada ponovo slijedi da je svojstveni vektor $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0_V$.

U oba slučaja pokazali smo da pretpostavka $v_k \in [v_1, \ldots, v_{k-1}]$ i $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ linearno nezavisan skup povlači da je svojstveni vektor v_k nulvektor, što je nemoguće. Dakle, skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je linearno nezavisan. □

Korolar 2.8.13. *Ako operator $A \in \mathcal{L}(V)$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti u polju $\mathbb{F}$, onda se A može dijagonalizirati.*

Dokaz. Ako je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ i $\{v_1, \dots, v_n\}$ skup pripadnih svojstvenih vektora, onda je prema Propoziciji 2.8.12 taj skup linearno nezavisan prema pa je ujedno i baza prostora V. Stoga Propozicija 2.8.11 povlači da je A dijagonalizabilan operator. □

Propozicija 2.8.12 nije nam dovoljna da bismo u općem slučaju, uz pretpostavku da je zbroj svih geometrijskih kratnosti jednak $\dim V = n$, mogli zaključiti kako se baza prostora može sastaviti od svojstvenih vektora. Razlika je u tome što ćemo općenito morati uzeti ne samo po jedan svojstveni vektor za svaku svojstvenu vrijednost, nego koliko ih je najviše moguće izabrati linearno nezavisnih iz svakog od svojstvenih potprostora. Konkretno, ako je npr. $\dim V = 7$, a $\sigma(A)$ čine λ_1, λ_2 i λ_3 koje redom imaju geometrijske kratnosti 3, 2, 2, pitanje je hoće li skup od 7 vektora (3 linearno nezavisna za λ_1 i po dva linearno nezavisna za λ_2 i λ_3) biti linearno nezavisan. To će doista vrijediti, a dokaz nije bitno teži od dokaza Propozicije 2.8.12, samo što bi općenite oznake bile dosta nespretne pa ćemo dokaz samo ilustrirati na upravo spomenutom primjeru. Općeniti dokaz teče posve analogno, samo s k svojstvenih vrijednosti, njihovim geometrijskim kratnostima $g_1, \dots, g_k$ i s ukupno n svojstvenih vektora za koje bismo trebali dvostruke indekse.

Primjer 34. Neka je $\dim V = 7$ i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, s geometrijskim kratnostima redom 3, 2 i 2. Uzmimo da su $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2\}$ i $\{c_1, c_2\}$ redom neke baze svojstvenih potprostora $V_A(\lambda_1)$, $V_A(\lambda_2)$ i $V_A(\lambda_3)$. Treba dokazati da je skup $S = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo da vrijedi jednakost

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}_{=a} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2}_{=b} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2}_{=c} = 0_V. \tag{2.8}$$

Vektori gore označeni s a, b i c pripadaju redom svojstvenim potprostorima $V_A(\lambda_1)$, $V_A(\lambda_2)$ i $V_A(\lambda_3)$ pa je svaki od njih ili svojstveni vektor pridružen odgovarajućoj svojstvenoj vrijednosti ili je nulvektor.

Sva tri vektora a, b, c ne mogu biti svojstveni vektori, jer su pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima pa Propozicija 2.8.12 pokazuje da je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan te jednakost $a + b + c = 0_V$ nije moguća.

Ako je neki od vektora a, b, c jednak 0_V, onda iz linearne nezavisnosti izabranih baza svojstvenih potprostora slijedi da su koeficijenti u vektorima a, b ili c jednaki 0. Stoga, ako je $a = b = c = 0_V$ slijedi da su svi koeficijenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ u (2.8) jednaki 0 pa je skup S linearno nezavisan.

Ako su dva od vektora a, b, c jednaki 0_V onda je i treći takav pa se to svodi na prethodni slučaj.

Ako je samo jedan od vektora a, b, c jednak 0_V, npr. $a = 0_V$, onda imamo $b + c = 0_V$ što je opet nemoguće, zbog Propozicije 2.8.12.

Time je pokazano da je skup S linearno nezavisan.

♡

Smatrat ćemo, na temelju ovog primjera, dokazanom sljedeću tvrdnju:

Propozicija 2.8.14. *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti operatora $A \in \mathcal{L}(V)$. Ako se iz svakog od pripadnih svojstvenih potprostora izabere linearno nezavisan podskup, unija svih tih podskupova je linearno nezavisan podskup prostora V.*

Posebno, ako je zbroj geometrijskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A jednak dimenziji n prostora V, te ako se za svaki od svojstvenih potprostora izabere po jedna baza, unija svih tih baza bit će baza prostora V.

Primijetimo još da je, uz pretpostavke u drugoj tvrdnji ove propozicije, prostor V jednak direktnoj sumi svih svojstvenih potprostora operatora A.

Na temelju svega izloženog možemo iskazati nužne i dovoljne uvjete za dijagonalizaciju linearnog operatora sljedećim teoremom:

Teorem 2.8.15. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V)$. Linearni operator A se može dijagonalizirati ako i samo ako vrijedi da*

1. *polinom $k_A(\lambda)$ ima n nultočaka u polju $\mathbb{F}$ računajući kratnost,*
2. *algebarska kratnost jednaka je geometrijskoj kratnosti za svaku svojstvenu vrijednost operatora A.*

Temu određivanja spektra i svojstvenih potprostora linearnog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru te ispitivanja mogućnosti njegove dijagonalizacije zaključit ćemo sljedećim sažetkom i primjerima. Pretpostavljamo da je operator zadan matricom u nekoj bazi (ili da smo tu matricu napisali pomoću zadanih podataka o operatoru).

Postupak rješavanja problema $Ax = \lambda x$ uz uvjet $x \neq 0_V$:

1. Napiše se matrica $A-\lambda I$ ("oduzme se λ po dijagonali" matrice A) i izračuna determinanta te matrice. Time se dobije karakteristični polinom $k_A(\lambda)$ stupnja n u varijabli λ pri čemu je $n = \dim V$, odnosno n je red matrice A.

2. Odrede se nultočke polinoma $k_A(\lambda)$ i njihove algebarske kratnosti. Važne su nultočke koje pripadaju polju $\mathbb{F}$ nad kojim je zadan vektorski prostor V, odnosno nad kojim je zadana matrica A. Poznavanje nultočaka i njihovih algebarskih kratnosti znači da možemo polinom $k_A(\lambda)$ napisati u obliku umnoška polinoma oblika $(\lambda - \lambda_j)^{\mu_j}$ za nultočke $\lambda_j \in \mathbb{F}$ i možda još jednog polinoma $p(\lambda)$ koji nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$. (Moguće je da su sve nultočke u polju $\mathbb{F}$, da su samo neke u $\mathbb{F}$ ili da uopće nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$).

3. Spektar $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ sastoji se od svih nultočaka polinoma $k_A(\lambda)$ koje pripadaju polju $\mathbb{F}$ i to su svojstvene vrijednosti operatora A (odnosno matrice A). Za svaku pojedinu svojstvenu vrijednost λ_j treba riješiti homogeni sustav $(A-\lambda_j I)x = 0$. Rješavanjem sustava dobivamo bazu svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_j)$ i tako nalazimo geometrijsku kratnost za λ_j. Geometrijska kratnost za λ_j jednaka je $n - r(A - \lambda_j I)$ pa se može odrediti i bez efektivnog rješavanja sustava.

Ovim postupkom određen je spektar $\sigma(A)$ i svi svojstveni potprostori, odnosno, ustanovljeno je da je $\sigma(A)$ prazan, ako karakteristični polinom nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$.

Dodatno, možemo ispitati je li operator dijagonalizabilan, pa u slučaju da jest odrediti i bazu u kojoj se dijagonalizira ili, ekvivalentno tome, odrediti matricu prijelaza T pomoću koje se za zadanu matricu A dobiva dijagonalna matrica $D = T^{-1}AT$.

4. Budući da smo odredili svojstvene vrijednosti te njihove algebarske i geometrijske kratnosti, vidimo je li ispunjen nužan i dovoljan uvjet dijagonalizacije: da zbroj algebarskih

kratnosti bude jednak n te da je geometrijska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka njezinoj algebarskoj kratnosti. U slučaju da su ovi uvjeti ispunjeni, bazu u kojoj se operator dijagonalizira dobivamo kao uniju (nekih) baza svih svojstvenih potprostora. (Baza za dijagonalizaciju nije jednoznačno određena). Matrica T formira se tako da se u stupce napišu izabrani svojstveni vektori koji čine baze svih svojstvenih potprostora.

Nemogućnost dijagonalizacije prepoznaje se čim karakteristični polinom ima manje od n nultočaka u polju $\mathbb{F}$ ili, ako je to ispunjeno, čim je za barem jednu svojstvenu vrijednost njezina geometrijska kratnost strogo manja od algebarske kratnosti.

Primjer 35. Linearni operator A na 4-dimenzionalnom, realnom prostoru V zadan je svojim djelovanjem na bazu $(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$A(v_1) = A(v_4) = v_1 + v_4,\ A(v_2) = -v_2,\ A(v_3) = v_2 - v_3.$$

Naš zadatak bit će odrediti $\sigma(A)$ i sve svojstvene potprostore. Nadalje, ispitati može li se A dijagonalizirati i ako može, u kojoj bazi. Ako ne može, odredit ćemo neku bazu prostora V koja sadrži što je više moguće svojstvenih vektora od A i napisati matricu operatora A u toj bazi.

Matrica operatora A u zadanoj bazi glasi:

$$[A]_{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračuna se da je

$$k_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.$$

Dakle, $\sigma(A) = \{-1, 0, 2\}$. Nultočke 0 i 2 imaju algebarsku kratnost 1, a -1 algebarsku kratnost 2. Što se tiče dijagonalizacije, trebao bi biti ispunjen samo još uvjet da svojstvena vrijednost -1 ima geometrijsku kratnost također 2, odnosno da bude $r(A-(-1)I) = r(A+I) = 4-2 = 2$. Međutim,

$$[A+I]_{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

pa je $r(A+I) = 3$ i geometrijska kratnost za -1 je $4-3=1$. Operator A ne može se dijagonalizirati. Odmah vidimo da je $J(A+I) = [v_2]$. Lako izračunamo i $J(A - 0 \cdot I) = J(A) = [v_1 - v_4]$ te $J(A-2I) = [v_1 + v_4]$.

Imamo, dakle, tri 1-dimenzionalna svojstvena potprostora za A pa u bazu prostora V možemo uzeti tri odgovarajuća svojstvena vektora, u bilo kojem redoslijedu, npr. $a_1 = v_1 + v_4$, $a_2 = v_2$ i $a_3 = v_1 - v_4$. Dopunu do baze najlakše dobivamo izborom $a_4 = v_3$ za četvrti vektor. Matrica operatora A u toj bazi, tj. u bazi $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ izgleda ovako:

$$[A]_{(a)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ako želimo, možemo promijeniti redoslijed trećeg i četvrtog vektora u bazi pa će se u matrici zamijeniti treći i četvrti stupac tako da će četvrti biti nul-stupac.)

♡

Napomena 2.8.16. *Iza Definicije 2.8.4 i popratnog komentara spomenuto je da se karakteristični polinom može definirati i za kvadratnu matricu, bez isticanja pretpostavke da je ta matrica pridružena linearnom operatoru u nekoj bazi. Doista, karakteristični polinom definiran je pomoću determinante kvadratne matrice, a sve međusobno slične matrice imaju jedan, "zajednički" karakteristični polinom. Linearnom operatoru A na konačnodimenzionalnom prostoru V odgovara cijela klasa ekvivalencije sličnih matrica. Stoga možemo definirati da je* ***matrica*** $A \in M_n(\mathbb{F})$ ***dijagonalizabilna nad poljem*** $\mathbb{F}$ *ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici $D \in M_n(\mathbb{F})$. Ako je pritom $T \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica takva da vrijedi $T^{-1}AT = D$, jasno je da T ima ulogu matrice prijelaza između dviju baza u kojima je linearnom operatoru pridružena matrica A, odnosno D.*

Možemo govoriti i o svojstvenim vrijednostima matrice *i* svojstvenim vektorima matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$*, ne ističući pritom uvijek linearni operator. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ bit će* ***svojstvena vrijednost matrice*** *A ako postoji vektor (jednostupčana matrica) $X \in M_{n,1}(\mathbb{F})$, $X \neq 0$, takav da vrijedi $AX = \lambda X$. Naime, uzmemo li vektorski prostor $M_{n,1}(\mathbb{F})$ i njegovu kanonsku bazu (e), matrica A pridružena je u toj bazi linearnom operatoru koji na prostoru $M_{n,1}(\mathbb{F})$ djeluje jednostavno množenjem vektora-stupaca matricom A, dakle preslikava $X \mapsto AX$. (U Primjeru 17, u općenitijoj situaciji, odgovarajući linearni operator označen je s L).*

Slična matrica $T^{-1}AT$ pridružena je istom linearnom operatoru u bazi (e'), takvoj da je T matrica prijelaza iz (e) u (e'). Ovo je samo jedan od mogućih, ali standardan i jednostavan način definiranja linearnog operatora čiji je matrični zapis upravo zadana matrica.

U nekima od daljnjih primjera i zadataka razmatrat će se prethodni pojmovi, vezani uz spektar, samo za zadane matrice, a postupak rješavanja neće se razlikovati od onoga kad su primarno zadani linearni operatori pa im, najčešće, prvo treba pridružiti matricu u nekoj bazi.

Istaknimo ipak još jednu važnu pojedinost. Ako je zadana kvadratna matrica A s realnim koeficijentima, pri ispitivanju njezine dijagonalizabilnosti ima smisla naglasiti je li riječ o dijagonalizaciji nad poljem $\mathbb{R}$ ili nad poljem $\mathbb{C}$. Naime, matrica s realnim koeficijentima može biti pridružena linearnom operatoru na kompleksnom prostoru (dok obrnuto nije moguće, jer ako u matrici postoji element koji je kompleksni, ali ne i realni broj, ta matrica ne može predstavljati zapis operatora na realnom prostoru). Dijagonalizabilnost realne matrice nad poljem $\mathbb{R}$ svakako je posebno, specifično svojstvo. To ćemo vidjeti u Primjeru 38 čim realnu matricu reda 2, koja nam je poznata kao matrica rotacije za pravi kut u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ realnog prostora V^2 ″odvojimo″ od takvog tumačenja i promotrimo je ″samo″ kao matricu. Ipak, njezina dijagonalizabilnost nad poljem $\mathbb{C}$ otkrit će nam sasvim blisku geometrijsku interpretaciju.

Primjer 36. Ispitat ćemo može li se dijagonalizirati nad poljem $\mathbb{R}$ matrica C reda 4 čiji su svi elementi na dijagonali jednaki 3, a svi ostali elementi su jednaki 1. Ako može, provest ćemo dijagonalizaciju i odrediti matricu pomoću koje se ostvaruje sličnost matrice C i neke dijagonalne matrice. (U odjeljku 2.9. naučit ćemo da se svaka simetrična realna matrica može dijagonalizirati, no zasad odgovor tražimo uobičajenim postupkom.)

Izračuna se

$$k_C(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 6).$$

Nultočke su 2 s algebarskom kratnosti 3 i 6 s algebarskom kratnosti 1. Očito je $r(A - 2I) = 1$

pa je geometrijska kratnost za 2 jednaka 3 i C se može dijagonalizirati. Dijagonalna matrica slična matrici C jest npr. $\operatorname{diag}(2,2,2,6)$.

Potprostor $V_C(2)$ zadan je jednadžbom $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Za bazu možemo uzeti npr. skup $\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}$.

Vektor baze za 1-dimenzionalni potprostor $V_C(6)$ određujemo rješavanjem sustava $(C-6I)x=0$, a vrlo lako možemo uočiti da je $v=(1,1,1,1)$ jedno rješenje, budući da je $Cv=6v$. (Množenje bilo koje matrice s vektor-stupcem samih jedinica zapravo daje zbroj svih stupaca matrice, a to je u ovom slučaju $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.) Matrica potrebna za dijagonalizaciju tada je

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a njezin inverz

$$T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$T^{-1}CT=D=\operatorname{diag}(2,2,2,6).$$

♡

Zadatak 26. *Poopćite Primjer 36 na matrice reda n koje na svim mjestima dijagonale imaju skalar x, a na svim mjestima izvan dijagonale skalar y (može biti i $x=y$).*

Uputa. U Linearnoj algebri 1 standardni je zadatak izračunavanje determinante reda n navedenog oblika, a rezultat glasi $(x-y)^{n-1}(x+(n-1)y)$. (Provjerite vlastitim računom). Za karakteristični polinom ovakve matrice možemo primijeniti istu formulu, samo što se na dijagonali determinante nalaze elementi $x-\lambda$. Dobivamo polinom $(x-\lambda-y)^{n-1}(x-\lambda+(n-1)y)$ tako da se u spektru nalaze $x-y$, s algebarskom kratnosti $n-1$ i $x+(n-1)y$ s algebarskom kratnosti 1. (U slučaju $x=y$ imamo jezgru dimenzije $n-1$ i svojstvenu vrijednost nx kratnosti 1.) Preostaje odrediti geometrijsku kratnost za $x-y$. Dovršite račun sami i izvedite zaključak.

Zadatak 27. *Dokažite da se svaka realna simetrična matrica reda 2 može dijagonalizirati.*

Uputa. Karakteristični polinom simetrične matrice

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

glasi

$$k_A(\lambda)=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$$

pa treba razmotriti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

Ako je neku matricu A moguće dijagonalizirati, to u velikoj mjeri olakšava izračunavanje potencija te matrice. Uzmimo da je D dijagonalna matrica i $D = T^{-1}AT$. Otuda je $A = TDT^{-1}$ i zatim

$$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1})\cdots(TDT^{-1}).$$

Primjećujemo da se, zbog asocijativnosti množenja matrica, svi susjedni faktori T i T^{-1} daju jediničnu matricu I pa dobivamo jednostavno

$$A^n = TD^nT^{-1},$$

Za $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ vrijedi $D^n = \operatorname{diag}(\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n)$ pa lako izračunamo i A^n.

Primjer 37. Odredit ćemo G^n, $n \in \mathbb{N}$, za matricu

$$G = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}.$$

Budući je matrica G simetrična, moći će se dijagonalizirati (vidi prethodni zadatak 27). Konkretno G se dijagonalizira u bazi svojstvenih vektora $\{(1,1),(1,-1)\}$ u $D = \operatorname{diag}(4033, 1)$. Matrica prijelaza glasi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

i $T^{-1} = \frac{1}{2}T$. Stoga je

$$A^n = TD^nT^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4033^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4033^n+1 & 4033^n-1 \\ 4033^n-1 & 4033^n+1 \end{pmatrix}.$$

♡

Primjer 38. Znamo da se operator rotacije za pravi kut prostora $V^2(O)$ ne može dijagonalizirati, jer nema svojstvenih vektora. Ispitat ćemo mogućnost dijagonalizacije nad poljem $\mathbb{C}$ matrice R pridružene operatoru rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$. Matrica rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ u ortonormiranoj bazi glasi

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a karakteristični polinom je

$$k_R(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

pa je $\sigma(R) = \{i, -i\}$ (nad poljem $\mathbb{C}$). Čim matrica reda 2 ima dvije različite svojstvene vrijednosti, može se dijagonalizirati. Lako nalazimo svojstvene potprostore $V_R(-i) = [(1, i)]$ i $V_R(i) = [(1, -i)]$ prostora $\mathbb{C}^2$.

Primijetimo da u kompleksnoj ravnini množenje brojem i, odnosno $-i$, geometrijski znači rotaciju za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom, odnosno negativnom smjeru. ♡

Zadatak 28. *Odredite skup svih $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ kojima je u svakoj bazi matrični prikaz dijagonalna matrica.*

Uputa. Za takve operatore svaki vektor prostora, osim nulvektora, mora biti svojstveni vektor. Očito nuloperator, jedinični operator i svaka homotetija - operator oblika αI - imaju to svojstvo. Operator s traženim svojstvom ne može imati dvije različite svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2, jer zbroj pridruženih svojstvenih vektora ne bi bio svojstveni vektor. Izvedite zaključak.

Zadatak 29. *Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$. Zadajte $Z \in \mathcal{L}(V^3(O))$ takav da bude $Z(\vec{i}) = \vec{k}$ i $\sigma(Z) = \{1, -1\}$.*

Uputa. Za Z moraju postojati takvi vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ da bude $Z\vec{a} = \vec{a}$ i $Z\vec{b} = -\vec{b}$, i oni su svakako linearno nezavisni. No, kako 0 nije u $\sigma(Z)$, $r(Z) = 3$ i ne bi bilo dobro staviti npr. $Z\vec{j} = \vec{j}$, $Z\vec{k} = -\vec{k}$ jer bi vektor $\vec{i} + \vec{k}$ bio u $J(Z)$. Niti $Z\vec{j} = -\vec{j}$, $Z\vec{k} = \vec{k}$ nije dobro jer tada je $-\vec{i} + \vec{k} \in J(Z)$. No, stavimo li $Z\vec{k} = \vec{i}$, $Z\vec{j} = \vec{j}$, imat ćemo zrcaljenje s obzirom na potprostor $[\vec{i} + \vec{k}, \vec{j}]$ i uvjeti će biti ispunjeni.

Zadatak 30. *Neka je A linearni operator na realnom 3-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, takav da je $r(A) = 2$ i $\operatorname{tr} A = 0$. Kako izgleda karakteristični polinom $k_A(\lambda)$? Zadajte takav operator A.*

Rješenje. Budući da A nema puni rang, $\det A = 0$ pa je slobodni član karakterističnog polinoma jednak 0. Koeficijent polinoma uz λ^2 jednak je $\operatorname{tr} A = 0$. Zato je $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda$, za neki skalar a. Npr. $A = \operatorname{diag}(1, -1, 0)$ ima tražena svojstva i $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$. ♡

Zadatak 31. *Navedite što više primjera linearnih operatora A na realnom 3-dimenzionalnom prostoru V, takvih da vrijedi $A^3 = A$, a da su im spektri različiti.*

Rješenje. Operator na 3-dimenzionalnom prostoru svakako ima neprazan spektar, jer mu je karakteristični polinom stupnja 3 pa ima barem jednu realnu nultočku. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ i x neki pridruženi svojstveni vektor, iz $Ax = \lambda x$ slijedi

$$A^2x = A(\lambda x) = \lambda^2 x, \ A^3x = \lambda^3 x.$$

Po pretpostavci je $A^3 = A$ pa je $\lambda^3 x = \lambda x$. Otud je $\lambda^3 = \lambda$ pa λ može biti samo 0, 1 i -1.

Spektar operatora A može biti bilo koji neprazni podskup od $\{1, -1, 0\}$, a takvih podskupova ima sedam. Tražene operatore možemo zadati dijagonalnim matricama:

- $\operatorname{diag}(0, 0, 0)$ (nuloperator),
- $\operatorname{diag}(1, 1, 1)$ (jedinični operator),
- $\operatorname{diag}(-1, -1, -1)$ (centralna simetrija),
- $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ (zrcaljenje na 2-dimenzionalnom potprostoru) ili $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ (zrcaljenje na 1-dimenzionalnom potprostoru),
- $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ (projekcija na 2-dimenzionalni potprostor) ili $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ (projekcija na 1-dimenzionalni potprostor),
- $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$,
- $\operatorname{diag}(-1, 0, 0)$.

Očito za svaku od tih matrica vrijedi $A^3 = A$. Dakle, postoji točno sedam operatora traženog oblika sa različitim spektrima. ♡

Na kraju ovog odjeljka ukratko ćemo spomenuti još neke važne pojmove i tvrdnje povezane s linearnim operatorima, a koji se ne razrađuju u okviru ovog kolegija.

2.8.1 Algebra linearnih operatora i operatorski polinomi. Hamilton-Cayleyev teorem. Minimalni polinom

Na vektorskom prostoru $\mathcal{L}(V)$ svih linearnih operatora na prostoru V definirana je i operacija kompozicije, čime prostor $\mathcal{L}(V)$ dobiva dodatnu strukturu algebre i to asocijativne algebre s jedinicom. Taj pojam uveden je u Linearnoj algebri 1 u vezi s prostorom matrica $M_n(\mathbb{F})$ (u skriptama pri kraju odjeljka 2.3 o operaciji množenja matrica i pripadnim svojstvima). Prostor $\mathcal{L}(V)$ ima takvu strukturu neovisno o tome je li V konačnodimenzionalan prostor ili nije, a ako je $\dim V = n$, onda je $\mathcal{L}(V)$ izomorfan s prostorom kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{F})$ ne samo kao vektorski prostor, nego i kao algebra. Izomorfizam se uspostavlja pomoću matričnog prikaza operatora. To slijedi iz tvrdnje iskazane u Zadatku 20 i komentara koji slijedi iza njega, a ključno je da se kompozicija operatora iz $\mathcal{L}(V)$ matričnim prikazom preslikava u umnožak pripadnih matrica.

U svakoj algebri (nad poljem $\mathbb{F}$) mogu se promatrati polinomi s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. Ako je

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i,$$

definirana je vrijednost polinoma u A, dakle

$$p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i,$$

kako za operator $A \in \mathcal{L}(V)$, tako i za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$. Dobiva se također linearni operator, odnosno matrica a pritom se uzima $A^0 = I$. Operatorski, odnosno matrični polinomi pokazuju se vrlo značajnima u linearnoj algebri.

Ako je $\dim V = n$, tada je $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ pa je skup $\{A^0 = I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ linearno zavisan za bilo koji $A \in \mathcal{L}(V)$, jer sadrži n^2+1 elemenata. Neka je $m \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se A^m može izraziti kao linearna kombinacija prethodnika, to jest da postoje α_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, koji nisu svi jednaki 0, takvi da je

$$A^m = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j A^j.$$

Vidimo da polinom

$$p(t) = t^m - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j$$

ima svojstvo da vrijedi $p(A) = 0$ (nuloperator). Dakle, za svaki $A \in \mathcal{L}(V)$ postoji polinom $p(t)$ stupnja najviše n^2 kojega A *poništava*, tj. $p(A) = 0$.

Zapravo vrijedi i znatno jači rezultat, iskazan teoremom Hamiltona i Cayleya: *Svaki operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru poništava vlastiti karakteristični polinom.* Dakle, za svaki $A \in \mathcal{L}(V)$ vrijedi $k_A(A) = 0$.

Uočimo da je prednost ovog teorema u odnosu na prethodni zaključak u tome što je stupanj karakterističnog polinoma jednak $\dim V = n$, dok smo prije lako ustanovili postojanje polinoma $p(t)$ sa svojstvom $p(A) = 0$, ali stupnja koji može dosegnuti (čak) n^2. Jasno, sve napisano odnosi se i na matričnu algebru $M_n(\mathbb{F})$.

Primjerice, uzmimo matricu $A \in M_2(\mathbb{F})$. Među matricama I, A, A^2, A^3 i A^4 mora postojati linearna zavisnost, no Hamilton-Cayleyev teorem govori da će ta zavisnost nastupiti već za I,

A, A^2. Znamo da je karakteristični polinom jednak

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A.$$

Izračunamo li $k_A(A) = A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I$, kao rezultat doista dobivamo nulmatricu. Dakle,

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I.$$

Odgovarajući rezultat dobili bismo, uz nešto više računanja i za $n = 3$. Dokaz Hamilton-Cayleyeva teorema za općeniti n je složeniji i može se naći u [1] i [2].

Spomenimo još da se za invertibilne operatore (izomorfizme na V), odnosno ekvivalentno, regularne matrice na temelju Hamilton-Cayleyeva teorema može inverz A^{-1} izraziti kao polinom u A. Naime, budući da je tada $\det A \neq 0$, član $(\det A)I$ različit je od nuloperatora, odnosno nulmatrice pa se iz jednakosti $k_A(A) = 0$ može izraziti $(\det A)I$ i zatim, množenjem s A^{-1} i skalarom $\frac{1}{\det A}$, dobivamo A^{-1} kao linearnu kombinaciju potencija od A. U primjeru $n = 2$ dobiva se

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A}A + \frac{\operatorname{tr} A}{\det A}I.$$

Za pojedini operator ili matricu A, karakteristični polinom ne mora biti i polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava. Polinom s tim svojstvom naziva se *minimalni polinom operatora* A, odnosno matrice A. (Dogovorno se uzima da je vodeći koeficijent minimalnog polinoma jednak 1 jer ako je p neki takav polinom, jasno je da je i αp polinom jednakog stupnja koji ima isto svojstvo, za svaki skalar $\alpha \neq 0$). Općenito vrijedi da je karakteristični polinom djeljiv minimalnim polinomom. Slične matrice imaju jednaki minimalni polinom.

Neke jednostavne primjere minimalnog polinoma možemo naći u Zadatku 31. Zadatak se odnosi na operatore na 3-dimenzionalnom prostoru za koje vrijedi $A^3 = A$, što znači da je $A^3 - A = 0$ pa svi oni poništavaju polinom $p(t) = t^3 - t$ stupnja 3. No, za neke od navedenih operatora vrijedi i $A^2 = I$ pa takvi poništavaju polinom $q(t) = t^2 - 1$, dakle za njih je minimalni polinom stupnja najviše 2. Posebno, operatori $A = I$ i $A = -I$ poništavaju već polinome $t - 1$, odnosno $t + 1$ i to su njihovi minimalni polinomi, dok npr. za $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ minimalni polinom je $q(t) = t^2 - 1$. S druge strane, za $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$ minimalni polinom je upravo $p(t) = t^3 - t$. Za $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ minimalni polinom je $t^2 - t$.

Polinom $p(t) = t^3 - t$ faktorizira se kao $p(t) = t(t-1)(t+1)$ pa, kako vidimo iz ovih primjera, minimalni polinom za neki od promatranih operatora može biti i svaki od njegovih djelitelja stupnja barem 1.

Napomena: Istaknimo da se Hamilton-Cayleyev teorem ne može dokazati "izravnim uvrštavanjem" matrice A u polinom $\det(A - \lambda I)$ (čime bi se, pogrešno, dobilo $\det(A - A) = \det O = 0$), budući da nema smisla uvrštavati matricu na mjesto (skalarnog) elementa matrice $A - \lambda I$.

2.8.2 Invarijantni potprostori

Upoznali smo neke invarijante linearnih operatora na (konačnodimenzionalnom) prostoru V. To su rang, determinanta, trag, karakteristični polinom, spektar. Potprostor $L \leq V$ naziva se *invarijantnim potprostorom* za $A \in \mathcal{L}(V)$ ako je slika tog potprostora sadržana u njemu samom, dakle $A(L) \leq L$. Kao i za ostale invarijante, poznavanje invarijantnih potprostora značajno doprinosi razumijevanju djelovanja operatora. Pritom nulpotprostor $\{0\}$ i cijeli V, kao trivijalni invarijantni potprostori, nisu od stvarnog interesa.

Svaki svojstveni potprostor, ako ga operator A ima, očito je invarijantan za A. Naravno, direktna suma različitih svojstvenih potprostora također je invarijantan potprostor. Linearni operator općenito ne mora imati netrivijalnih invarijantnih potprostora. Jednostavan primjer ponovno je rotacija prostora $V^2(O)$ za kut $\pi/2$. S druge strane, netrivijalan invarijantan potprostor ne mora biti ni svojstven ni suma svojstvenih potprostora.

Uzmimo npr. operator A na prostoru $\mathbb{R}^4$, zadan u standardnoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invarijantni potprostori su očito $[e_1, e_2]$ i $[e_3, e_4]$, ali svojstvenih potprostora nema, jer nema ni realnih nultočaka karakterističnog polinoma. Na navedenim potprostorima A djeluje kao rotacija za kut $\pi/2$, odnosno $-\pi/2$.

Općenito, netrivijalni invarijantni potprostor može se iskoristiti za izbor baze u kojoj će operatoru biti pridružena jednostavnija matrica. Sasvim slično kao u slučaju svojstvenih potprostora, treba uzeti neku bazu invarijantnog potprostora pa je proširiti do baze prostora. Na taj način, ako je L invarijantan potprostor dimenzije k, možemo dobiti npr. matricu u kojoj prvih k stupaca ima elemente 0 na svim pozicijama od $(k+1)$-og do zadnjeg, n-tog retka.

Posebno je povoljno ako se prostor V može prikazati kao direktna suma dva ili više (netrivijalna) potprostora invarijantna za operator A, npr. $V = L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_r$. Takav operator naziva se *reducibilnim*, a njegova matrica u bazi sastavljenoj kao unija baza pojedinih invarijantnih potprostora ima oblik dijagonalne blok-matrice:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}_{n\times n}, \ A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(i)} & \cdots & \alpha_{1n_i}^{(i)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n_i 1}^{(i)} & \cdots & \alpha_{n_i n_i}^{(i)} \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}, \ \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

2.8.3 Adjungirani operator

Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad poljem $\mathbb{F}$, V^* i W^* njihovi dualni prostori te $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Operatoru A može se pridružiti takozvani *adjungirani operator* $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ tako da za svaki vektor $v \in V$ i svaki funkcional $f \in W^*$ bude ispunjeno

$$(A^* f)(v) = f(Av).$$

Znamo da su prostori $\mathcal{L}(V, W)$ i $L(W^*, V^*)$ izomorfni, jer su jednakih dimenzija: $\dim V \dim W = \dim V^* \dim W^*$, a pridruživanje $A \mapsto A^*$ jedan je njihov izomorfizam. Pokazuje se da je rang operatora A jednak rangu adjungiranog operatora A^*.

Nadalje, ako je (e) baza prostora V i (f) baza prostora W, a (e^*) i (f^*) njima dualne baze prostora V^* i W^*, nije teško provjeriti da su matrice $[A]_{(f,e)}$ i $[A^*]_{(e^*,f^*)}$ međusobno transponirane. Tako se dokazuje da bilo koje dvije međusobno transponirane matrice imaju jednaki rang, tj. da je za svaku matricu maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka (Teorem 2.5.3 u skriptama iz Linearne algebre 1 i njegov Korolar 2.5.4). Ovim pristupom pomoću adjungiranog operatora postaje jasnija veza između uzajamno transponiranih matrica i bolje se vidi razlog “ravnopravnosti“ stupaca i redaka u pogledu linearne nezavisnosti.

2.9 Linearni operatori na unitarnom prostoru

Nakon što smo se detaljno upoznali s osnovnim svojstvima linearnih operatora na općenitim i, posebno, konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, preostaje nam razmotriti linearne operatore koji djeluju na unitarnim prostorima te pritom posjeduju neka dodatna svojstva u odnosu na skalarno množenje. Dakako, od naročitog interesa su nam realni unitarni prostori V^2 i V^3, odnosno $V^2(O)$ i $V^3(O)$, čija se geometrija u velikoj mjeri zasniva na skalarnom množenju.

Kakva bi mogla biti ta "dodatna svojstva" linearnih operatora s obzirom na skalarno množenje? U načelu, za preslikavanja se zahtijeva "čuvanje strukture" pa su linearni operatori preslikavanja vektorskih prostora koja su usklađena s operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom tako da su "sačuvane" linearne kombinacije vektora: za $A \in \mathcal{L}(V, W)$ vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Prirodno je stoga razmatrati one linearne operatore na unitarnim prostorima koji "čuvaju" skalarni produkt, u smislu da je skalarni produkt bilo koja dva vektora iz domene jednak skalarnom produktu njihovih slika, dakle da vrijedi $\langle x|y\rangle = (Ax|Ay)$. Pritom je domena unitarni prostor V sa skalarnim množenjem $\langle\cdot|\cdot\rangle$, a kodomena W sa skalarnim množenjem $(\cdot|\cdot)$. (Naravno, isti unitarni prostor može biti i domena i kodomena).

Izgleda li ovaj uvjet čuvanja vrijednosti skalarnog produkta previše zahtjevan, to jest možemo li očekivati da ovakvih linearnih operatora uopće postoji toliko da bi ih bilo opravdano proučavati? U nekim otprije poznatim primjerima linearnih operatora nije teško razabrati da imaju i svojstvo čuvanja skalarnog produkta. To je naročito vidljivo kod nekih linearnih operatora na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ (Primjer 16), na temelju jasne geometrijske predodžbe njihova djelovanja. U tim prostorima skalarno množenje definirano je pomoću modula (duljine) vektora i kuta između vektora.

Ako, dakle, neki linearni operator ne promijeni ni modul ni kut, onda ne će promijeniti niti vrijednost skalarnog produkta. Svaki operator zrcaljenja i svaki operator rotacije ima upravo takva svojstva. Naprotiv, operator homotetije čuva kut, ali ne i modul (osim iznimno, za koeficijente 1 i -1, dakle jedinični operator i centralnu simetriju) pa općenito ne čuva skalarni produkt. Možemo očekivati da će primjera čuvanja skalarnog produkta biti i znatno više, u različitim unitarnim prostorima. Umjesto izravne provjere u pojedinačnim primjerima, naučit ćemo neke kriterije za navedeno dodatno svojstvo čuvanja skalarnog produkta. Linearni operatori s tim svojstvom nazivaju se jednostavno unitarni operatori, uz pretpostavku da su domena i kodomena konačnodimenzionalni unitarni prostori jednakih dimenzija.

Definicija 2.9.1. *Neka su $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ i $(W, (\cdot|\cdot)))$ konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, pri čemu je $\dim V = \dim W$. Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V, W)$ nazivamo **unitarnim operatorom** ako za sve $x, y \in V$ vrijedi $\langle x|y\rangle = (Ax|Ay)$.*

Uočimo da je unitarni operator po definiciji i linearan, tako da se linearnost podrazumijeva čim se za preslikavanje $A : V \to W$ kaže da je to unitarni operator. Iz primjera je očito da ima linearnih operatora na unitarnim prostorima koji nisu unitarni operatori.

Primjer 39. *Neka je V unitaran prostor, različit od $\{0_V\}$ i $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to V$ zadano s $Ax = \alpha x$ je unitarni operator na V ako i samo ako je $|\alpha| = 1$.*

Rješenje. Znamo da je ovako zadano preslikavanje A linearni operator. Ispitajmo uz koji uvjet je A unitaran operator:

$$\langle Ax|Ay\rangle = \langle \alpha x|\alpha y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x|y\rangle = |\alpha|^2\langle x|y\rangle.$$

Očito je uvjet za unitarni operator ispunjen ako i samo ako je $|\alpha| = 1$. Posebno, za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ α mora biti 1 ili -1. Za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, α može biti bilo koji kompleksni broj modula 1, npr. i ili $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ♡

Budući da već imamo dosta iskustva u razmatranju linearnih operatora i unitarnih prostora, sad ćemo privremeno odstupiti od uobičajenog slijeda propozicija s dokazima. Umjesto toga, pokušat ćemo ponešto "neformalno", bez previše oznaka i formula, ali povezivanjem otprije poznatih činjenica, zaključiti dosta toga o bitnim svojstvima unitarnih operatora.

Na unitarnom prostoru uvodi se norma na standardni način pomoću skalarnog produkta. Ako je vrijednost skalarnog produkta nepromijenjena pod djelovanjem linearnog operatora, onda i vrijednost norme svakog vektora ostaje nepromijenjena. Dakle, unitarni operator čuva normu. Posebno, jedinični vektor preslikava se u neki (ne nužno isti) jedinični vektor. Nadalje, vektor različit od 0 ne može se preslikati u 0, jer bi time bilo narušeno svojstvo čuvanja norme. Odatle zaključujemo da je unitarni operator nužno injektivan, dakle monomorfizam. Posebno, unitarni operator kojem su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori jednakih dimenzija (moguće jedan te isti prostor) svakako je izomorfizam. U tom slučaju i inverzni operator očito je unitaran.

Čuvanje skalarnog umnoška implicira i čuvanje relacije ortogonalnosti jer se par vektora sa skalarnim umnoškom 0 preslikava u par vektora s jednakim takvim skalarnim umnoškom. Vidimo stoga da unitarni operator preslikava svaki ortogonalni podskup domene u neki ortogonalni podskup kodomene. Posebno, zbog čuvanja norme, ortonormirani podskup preslikava se u ortonormirani podskup. Ako je unitarni operator ne samo monomorfizam nego i izomorfizam konačnodimenzionalnih prostora, očito svaku ortonormiranu bazu domene preslika u ortonormiranu bazu kodomene.

Iz ovog važnog svojstva vidimo također i kako možemo zadati "po volji mnogo" unitarnih operatora (čim je dimenzija prostora veća od 1): izaberemo bilo koje dvije ortonormirane baze unitarnog prostora (odnosno dvaju unitarnih prostora jednakih dimenzija) te zadamo linearni operator koji vektore izabrane baze domene preslikava redom u vektore izabrane baze kodomene. Je li takav linearni operator doista unitaran? To jest, ako jednu ortonormiranu bazu preslika u bazu istog tipa, je li to dovoljno da bude sačuvana vrijednost skalarnog produkta bilo koja dva vektora? Odgovor je potvrdan, što se vidi čim vektore domene prikažemo kao linearne kombinacije odabrane ortonormirane baze. Njihov skalarni produkt izražava se onda pomoću međusobnih skalarnih umnožaka pojedinih vektora baze, a lako je zamisliti i bez raspisivanja (iako je poželjno sve to i napisati) da će se za skalarni produkt slika tih vektora onda dobiti isti izraz, dobro poznata suma umnožaka odgovarajućih koordinata u odabranoj bazi.

Ovo primjerice znači da ako ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ prostora $V^3(O)$ "pošaljemo" u ortonormiranu bazu $\{\vec{j}, -\vec{i}, \vec{k}\}$, time će biti zadan unitarni operator (očito rotacija za pravi kut, oko z-osi). Također, ako vektore baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ preslikamo redom u vektore $\{-\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}\}$, time ćemo također zadati jedan unitarni operator, budući da smo za slike opet izabrali tri jedinična, u parovima ortogonalna vektora, premda možda nećemo smjesta prepoznati što taj operator predstavlja geometrijski.

Naravno, i za unitarne operatore na konačnodimenzionalnim prostorima od velike je koristi matrični prikaz. Pritom posebna i to osobito jednostavna svojstva nastupaju ako se za matrični prikaz biraju ortonormirane baze, kako bi do izražaja došlo ono što je malo prije spomenuto: unitarni operator preslikava ortonormirani skup u ortonormirani skup, a posebno to vrijedi za ortonormirane baze ako su domena i kodomena jednakih dimenzija (i tada je svaki unitarni operator izomorfizam).

Pretpostavimo, dakle, da su izabrane (jednakobrojne) ortonormirane baze domene i kodomene unitarnog operatora. Što možemo zaključiti o pripadnoj matrici? Njezini stupci predstavljaju slike vektora baze, a to su ortogonalni vektori. Dakle, skalarni umnožak svaka dva različita stupca iznosi 0. Pomnožimo li skalarno bilo koji stupac sam sa sobom, dobivamo kvadrat norme slike odgovarajućeg vektora baze, a i to je jedinični vektor pa je rezultat 1. Ukratko, matrica unitarnog operatora u paru ortonormiranih baza bit će ortogonalna matrica u slučaju realnih, odnosno unitarna matrica u slučaju kompleksnih unitarnih prostora. (Realna kvadratna matrica je ortogonalna ako je njezin umnožak s transponiranom matricom jednak jediničnoj matrici. Kompleksna kvadratna matrica je unitarna ako je njezin umnožak s hermitski adjungiranom matricom jedinična matrica). Ovim činjenicama dopunjeno je tumačenje važnosti spomenutih posebnih tipova matrica, koje su definirane u Linearnoj algebri 1.

Napokon, vrlo jednostavno možemo zaključiti ponešto o spektru unitarnog operatora. Već znamo da spektar može biti prazan skup (opet primjer rotacije prostora $V^2(O)$ za kut koji nije višekratnik od π, jer operator rotacije jest unitaran). No, ako je spektar neprazan, u njemu se nalaze samo skalari čija je apsolutna vrijednost jednaka 1. U realnom slučaju to lako zaključimo odatle što svojstveni vektor i njegova slika imaju isti smjer, a unitarni operator čuva normu. Slika svojstvenog vektora može stoga biti ili on sam ili njemu suprotni vektor. Znamo, primjerice, da je spektar svakog zrcaljenja s obzirom na potprostor dimenzije barem 1 upravo $\{1, -1\}$. U kompleksnom slučaju sve je analogno, samo što umjesto o "smjeru" radije govorimo o linearnoj zavisnosti svojstvenog vektora i njegove slike.

Važna činjenica koju bismo mogli naslutiti, ali za čiji je dokaz ipak potrebno barem malo pisanja, sastoji se u tome da su svojstveni vektori unitarnog operatora koji su pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima nužno ortogonalni međusobno. To je također vidljivo kod zrcaljenja.

Sad ćemo pregledno navesti propozicije koje su u prethodnim razmatranjima unitarnih operatora zapravo bile iskazane pa i protumačene. Za usvajanje izložene materije korisno je dobro razumjeti sve prethodno i bez raspisivanja računa (redovito dosta kratkih), no također je potrebno znati sve to i egzaktno dokazati. Razlika nije velika.

U iskazima i oznakama pretpostavljat ćemo da domena i kodomena unitarnog operatora mogu biti različiti unitarni prostori, dakle i s različitim skalarnim množenjem, a da je norma definirana pomoću skalarnog množenja na standardni način. Radi jednostavnosti koristit ćemo samo jednu oznaku za skalarno množenje i jednu, uobičajenu oznaku za pripadnu normu: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Propozicija 2.9.2. *Neka su V i W unitarni prostori, ne nužno konačnodimenzionalni i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni operator. Tada vrijedi:*

(i) $\|Ax\| = \|x\|$ *za svaki* $x \in V$,

(ii) *A je monomorfizam,*

(iii) *Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ ortogonalan podskup prostora V, onda je $A(S) = \{Ax_1, \ldots, Ax_k\}$ ortogonalan podskup prostora W; posebno, ako je S ortonormiran podskup od V, onda je $A(S)$ ortonormiran podskup od W.*

Dokaz. (i) $\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax|Ax\rangle} = \{A \text{ je unitaran}\} = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$.

(ii) Ako je $x \in J(A)$, to jest $Ax = 0_W$, onda je $\|Ax\| = 0$, a zbog (i) tada je i $\|x\| = 0$, što znači da je $x = 0_V$.

(iii) Budući da je skalarni produkt bilo koja dva različita vektora iz S jednak 0, skalarni produkt njihovih slika također je 0. Zbog (i) slika svakog jediničnog vektora iz V jedinični je vektor u W.

□

Primijenimo tvrdnje iz prethodne propozicije na slučaj konačnodimenzionalnih unitarnih prostora. Ako su V i W jednake dimenzije, iz (ii) pomoću teorema o rangu i defektu (v. Korolar 2.4.12) slijedi da je A izomorfizam. Otud i primjenom (iii) na ortonormiranu bazu prostora V dobivamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 2.9.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W = n$ i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni operator. Tada je A izomorfizam. Ako je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V, operator A preslikava je u ortonormiranu bazu $\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}$ prostora W.*

Svojstvo "čuvanja" ortonormiranih baza važan je kriterij za unitarnost linearnih operatora na konačnodimenzionalnim prostorima.

Propozicija 2.9.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ linearni operator. Ako A barem jednu ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W, onda je A unitaran operator te svaku ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V koju linearni operator A preslika u ortonormiranu bazu $\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}$ prostora W. Tada su V i W nužno jednakih dimenzija. Treba dokazati da je A unitarni operator, a druga tvrdnja zatim slijedi iz Korolara 2.9.3.

Prikažimo $x, y \in V$ u bazi (e),

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \; y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Poznati račun (kao u 1.4, str. 15) daje nam

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Isti rezultat dobivamo za $\langle Ax|Ay\rangle$, jer

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i, \; Ay = \sum_{i=1}^{n} y_i Ae_i,$$

a skup $\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}$ je ortonormirana baza. □

Navest ćemo još jednu korisnu tvrdnju, koja nije ograničena na konačnodimenzionalne unitarne prostore.

Propozicija 2.9.5. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni izomorfizam. Tada je i inverzni operator A^{-1} unitaran. Nadalje, tada vrijedi*

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|A^{-1}y\rangle$$

za sve $x \in V$, $y \in W$.

Dokaz. Za vektore $w, z \in W$ vrijedi $w = A(A^{-1}w)$ i analogno za z pa je

$$\langle w|z\rangle = \langle A(A^{-1}w)|A(A^{-1}z)\rangle = \{A \text{ je unitaran}\} = \langle A^{-1}w|A^{-1}z\rangle.$$

To znači da je $A^{-1} \in \mathcal{L}(V, W)$ unitaran. Nadalje, za $x \in V$ i $y \in W$ imamo

$$\langle Ax|y\rangle = \langle Ax|A(A^{-1}y)\rangle = \langle x|A^{-1}y\rangle.$$

□

Zadatak 32. *Ilustrirajte drugu tvrdnju iz prethodne propozicije na primjerima rotacije prostora $V^2(O)$ i zrcaljenja istog prostora s obzirom na 1-dimenzionalni potprostor.*

Zadatak 33. *Dokažite da je skup svih unitarnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V grupa s obzirom na kompoziciju operatora. Odredite te grupe za realni i za kompleksni 1-dimenzionalni unitarni prostor V.*

Slijedi razmatranje matričnog prikaza unitarnog operatora i to u paru ortonormiranih baza, budući da je takav izbor baza očito najpovoljniji. Ograničit ćemo se na slučaj koji nam je najčešće od interesa, to jest kad su domena i kodomena unitarni prostori jednakih dimenzija. Podsjetimo se definicija ortogonalne i unitarne matrice.

Definicija 2.9.6. *(a) Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ naziva se* ***ortogonalna matrica*** *ako za nju vrijedi $AA^t = A^tA = I$.*

(b) Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ naziva se ***unitarna matrica*** *ako za nju vrijedi $AA^* = A^*A = I$. Pritom je A^* hermitski adjungirana matrica, dobivena transponiranjem matrice čiji elementi su konjugirano kompleksni brojevi elemenata matrice A, dakle za $A = [\alpha_{ij}]$ to je matrica $A^* = [\overline{\alpha_{ji}}]$.*

Uočimo da je inverz ortogonalne matrice upravo njezina transponirana matrica, a inverz unitarne matrice njezina hermitski adjungirana matrica. Za matricu A čiji su svi elementi realni brojevi podudaraju se njezina transponirana i hermitski adjungirana matrica.

Nadalje, iz definicije ortogonalne matrice, činjenice da se determinanta matrice ne mijenja transponiranjem te pomoću Binet-Cauchyjevog teorema slijedi da za ortogonalnu matricu A vrijedi

$$(\det A)^2 = 1$$

pa je $\det A = 1$ ili -1. Analogno, za unitarnu matricu A, uz primjedbu da je za nju $\det A^* = \overline{\det A}$ (transponiranje ne mijenja determinantu, ali kompleksno konjugiranje svih elemenata matrice očito dovodi do kompleksnog konjugiranja vrijednosti determinante) dobivamo

$$\det(AA^*) = (\det A)(\det A^*) = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2 = 1.$$

Ovaj put to je kvadrat modula kompleksnog broja pa je opet $|\det A| = 1$, no to može biti bilo koji kompleksni broj modula 1.

Propozicija 2.9.7. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W = n$ i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni operator. Neka je $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V i $(f) = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza prostora W. Matrica operatora A u tom paru baza je ortogonalna matrica u slučaju realnih, odnosno unitarna matrica u slučaju kompleksnih prostora V i W.*

Dokaz. U paru baza (e) i (f) operatoru A pridružena je matrica $[A]_{(f,e)} = [\alpha_{ij}]$, što znači da je

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Za različite j i k vrijedi

$$\langle Ae_j | Ae_k \rangle = \langle e_j | e_k \rangle = 0,$$

a to je jednako

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ik}}.$$

Nadalje,

$$\langle Ae_j | Ae_j \rangle = \langle e_j | e_j \rangle = 1,$$

što je s druge strane jednako

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i | \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2.$$

Odatle vidimo da je umnožak

$$[A]^*_{(f,e)} [A]_{(f,e)} = I.$$

Očito je onda

$$[A]^*_{(f,e)} = [A]^{-1}_{(f,e)}$$

pa je i

$$[A]_{(f,e)} [A]^*_{(f,e)} = I.$$

Posebno, ako je $[A]_{(f,e)}$ realna matrica, $[A]^*_{(f,e)} = [A]^t_{(f,e)}$ i time je tvrdnja dokazana. □

Napomena. Budući da vrijednost determinante linearnog operatora $A \in \mathcal{L}(V)$ ne ovisi o izboru baze, iz ove propozicije slijedi da je determinanta unitarnog operatora jednaka 1 ili -1 nad $\mathbb{R}$, odnosno da je to kompleksni broj modula 1 nad $\mathbb{C}$.

Korolar 2.9.8. *Matrica prijelaza između dviju ortonormiranih baza je ortogonalna u realnom slučaju, odnosno unitarna u slučaju kompleksnog unitarnog prostora.*

Dokaz. Kako je jedinični operator unitaran, a znamo da je matrica prijelaza između dviju baza ujedno i matrica jediničnog operatora (v. 2.7, str. 47), primijenimo prethodnu propoziciju na jedinični operator I, dakako, za one dvije ortonormirane baze na koje se odnosi matrica prijelaza u tvrdnji Korolara. □

Korolar 2.9.9. *Neka su (e) i (e') dvije ortonormirane baze konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i neka je $A \in \mathcal{L}(V)$. Za matrične prikaze tog operatora u naznačenim bazama tada vrijedi*

$$[A]_{(e')} = T^t [A]_{(e)} T$$

nad poljem $\mathbb{R}$, odnosno

$$[A]_{(e')} = T^* [A]_{(e)} T$$

nad poljem $\mathbb{C}$, pri čemu je T matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e').

Ovaj Korolar dobiven je izravno iz Korolara 2.7.5 primjenom Korolara 2.9.8. Dakle, relacija sličnosti između matrica linearnog operatora u različitim bazama pojednostavljuje se za ortonormirane baze time što se za inverznu matricu stavlja transponirana (za realni prostor), odnosno hermitski adjungirana matrica (za kompleksni prostor). Općeniti postupak invertiranja matrice svodi se na sasvim jednostavnu operaciju transponiranja, odnosno hermitskog adjungiranja. Korolar vrijedi za bilo koji $A \in \mathcal{L}(V)$, samo što u slučaju da je to unitaran operator sve su matrice u navedenoj relaciji ortogonalne, odnosno unitarne.

Ako su matrice A i B slične i to tako da postoji ortogonalna, odnosno unitarna matrica T pomoću koje je ostvarena relacija $B = T^tAT$, odnosno $B = T^*AT$, ukratko kažemo da su A i B *ortogonalno slične*, odnosno *unitarno slične matrice.*

Primjer 40. *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *ortonormirana baza prostora* $V^3(O)$*, a* R *operator rotacije za kut* $\pi/3$ *oko osi zadane vektorom* $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$*. Izračunajmo matricu operatora* R *u bazi* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$*.*

Rješenje. Poslužimo se time što znamo kako izgleda tipična matrica rotacije za kut φ u ortonormiranoj bazi. Ako je os rotacije određena prvim vektorom te baze, matrica glasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ovakvu matricu R će imati u ortonormiranoj bazi kojoj je prvi vektor jedinični vektor smjera $\vec{v}$ (zapravo, taj vektor ne mora biti jedinični, ali nam je za daljnji račun praktičnije služiti se samo ortonormiranim bazama i ortogonalnim matricama). To je

$$\vec{a_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Za drugi vektor te baze možemo uzeti bilo koji jedinični $\vec{a_2}$ takav da je ortogonalan na $\vec{a_1}$ pa izaberimo

$$\vec{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}).$$

Konačno, $\vec{a_3}$ treba biti ortogonalan na $\vec{a_1}$ i na $\vec{a_2}$ pa ga možemo odrediti pomoću vektorskog produkta, pri čemu, ako pazimo i na orijentaciju, $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ treba biti pozitivno orijentirana ("desna") baza tako da je

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} \times \vec{a_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Matrica prijelaza iz baze $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ u bazu $(a) = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ glasi:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

U našem slučaju

$$[R]_{(a)} = T^t[R]_{(e)}T,$$

a tražimo $[R]_{(e)}$, dakle

$$[R]_{(e)} = T[R]_{(a)}T^t$$

Znamo da je

$$[R]_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Izračunavanjem umnoška $T[R]_{(a)}T^t$ dobivamo

$$[R]_{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Valjanost ovog rezultata možemo testirati tako da provjerimo da je dobivena matrica ortogonalna (zbroj kvadrata svakog stupca iznosi 1, skalarni umnožak različitih stupaca iznosi 0), da joj je trag jednak 2 (općenito $1 + 2\cos\varphi$ za rotaciju) i determinanta jednaka 1. Ovi uvjeti su nužni kako bi matrica bila pridružena rotaciji za kut $\pi/3$ oko neke osi. (Zapravo su to i dovoljni uvjeti, samo što to zasad ne bismo lako dokazali). Budući da za ovu matricu vrijedi

$$[R]_{(e)}[\vec{v}]_{(e)} = [\vec{v}]_{(e)},$$

os te rotacije doista je pravac kroz ishodište smjera $\vec{v}$, odnosno $[\vec{v}]$. ♡

Prelazimo sada na razmatranje spektra i svojstvenih vektora unitarnog operatora. Primijetimo da spektar unitarnog operatora na realnom prostoru može biti prazan skup tako da je većina sljedećih tvrdnji od stvarnog interesa u realnom slučaju samo ako je spektar operatora neprazan.

Propozicija 2.9.10. *Neka je A unitarni operator na unitarnom prostoru V. Tada vrijedi:*

(a) Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $|\lambda| = 1$. Posebno, ako je svojstvena vrijednost λ realan broj, onda je to 1 ili -1.

(b) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ različite svojstvene vrijednosti, a v_1, v_2 pripadni svojstveni vektori, tada su v_1 i v_2 ortogonalni vektori. Otuda slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

(c) Ako je v svojstveni vektor operatora A i x bilo koji vektor ortogonalan na v, onda je i Ax ortogonalan na v. Drugim riječima, ako je v svojstveni vektor onda je ortogonalni komplement potprostora $[v]$ invarijantan pod djelovanjem A.

Dokaz. (a) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0_V$. Tada je

$$\langle v|v\rangle = \langle Av|Av\rangle = \langle \lambda v|\lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v|v\rangle = |\lambda|^2\langle v|v\rangle,$$

odakle slijedi $|\lambda| = 1$.

(b) Imamo

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle Av_1|Av_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\langle v_1|v_2\rangle.$$

Ako bi bilo $\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$, vrijedilo bi $\lambda_1\overline{\lambda_2} = 1$, no tada množenjem obje strane jednakosti s λ_2 dobivamo $\lambda_1 = \lambda_2$, suprotno pretpostavci o različitosti ovih svojstvenih vrijednosti.

(c) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ i $\langle v|x\rangle = 0$. Treba dokazati da je tada $\langle v|Ax\rangle = 0$. No, $\langle v|x\rangle = \langle Av|Ax\rangle = \lambda\langle v|Ax\rangle$, a budući da je $|\lambda| = 1$, mora biti $\langle v|Ax\rangle = 0$.

□

Želimo li ilustrirati (b) na primjeru, uzmimo bilo koje zrcaljenje prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$, s obzirom na potprostor dimenzije 1 ili 2. Svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1 je potprostor fiksnih vektora, s obzirom na koji je zadano zrcaljenje, a njegov ortogonalni komplement je svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost -1. Svojstvo (c) također možemo ilustrirati na zrcaljenju, ali i na rotaciji $V^3(O)$ oko neke osi. Ta os je zapravo 1-dimenzionalni svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1, a njegov ortogonalni komplement je 2-dimenzionalni potprostor (geometrijski, ravnina kroz ishodište u kojoj se izvodi rotacija) i taj je invarijantan, neovisno o tome ima li u njemu svojstvenih vektora, dakle invarijantan za bilo koji kut rotacije.

Nakon prethodne propozicije raspolažemo znanjem potrebnim kako bismo u potpunosti opisali unitarne operatore na realnim unitarnim prostorima dimenzija 1, 2 i 3. Za dimenziju 1 mogli smo još pri rješavanju Zadatka 33. lako ustanoviti da su jedinični operator I i operator $-I$ koji svakom vektoru pridružuje njemu suprotni vektor jedini unitarni operatori. Za dimenzije 2 i 3 možemo promatrati prostore $V^2(O)$ i $V^3(O)$, koji su nam i geometrijski najzanimljiviji.

Primjer 41. *Klasifikacija unitarnih operatora na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$.* Opisat ćemo sve unitarne operatore na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$. Uvjerit ćemo se da ih zapravo sve već otprije znamo.

(a) Unitarni operatori na prostoru $V^2(O)$. Neka je A unitarni operator na prostoru $V^2(O)$. Njegov spektar može biti prazan skup ili jedan od skupova $\{1\}$, $\{-1\}$ i $\{1, -1\}$.

Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, onda A ima dva međusobno ortogonalna svojstvena potprostora i očito se može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. A je tada zrcaljenje s obzirom na svojstveni potprostor $V_A(1)$. Matrica u bazi svojstvenih vektora je $\operatorname{diag}(1, -1)$ ili $\operatorname{diag}(-1, 1)$.

Ako je $\sigma(A) = \{1\}$, svojstvena vrijednost 1 ima algebarsku kratnost 2. Ako je i njezina geometrijska kratnost 2, onda je A jedinični operator. Može li geometrijska kratnost iznositi 1? Ne može, zbog svojstva (c) u Propoziciji 2.9.10. Kad bi bilo $\dim V_A(1) = 1$ i $A\vec{v} = \vec{v}$, pri čemu je $\vec{v} \neq \vec{0}$, za bilo koji vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ ortogonalan na $\vec{v}$, imali bismo da je i $A\vec{w}$ ortogonalan na $\vec{v}$. Vektor $A\vec{w}$ bio bi linearno zavisan s $\vec{w}$ pa bi i $\vec{w}$ bio svojstveni vektor za A, nemoguće. Analogno razmatranje za slučaj $\sigma(A) = \{-1\}$ pokazuje da tada mora biti $A = -I$.

Preostaje slučaj kad A nema svojstvenih vrijednosti. U bilo kojoj ortonormiranoj bazi tom operatoru pridružena je ortogonalna matrica pa kako je slika jediničnog vektora također jedinični vektor, koeficijente u prvom stupcu matrice možemo izraziti kao $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, a u drugom stupcu kao $\cos\psi$ i $\sin\psi$, pri čemu vrijedi

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$$

(ortogonalnost stupaca). Zato je $\cos(\varphi - \psi) = 0$ pa je $\varphi - \psi = \pi/2$ ili $-\pi/2$. U prvom slučaju je $\cos\psi = \sin\varphi$, a u drugom $\cos\psi = -\sin\varphi$. Mogući oblici matrica su, dakle, ovi:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Budući da prva matrica ima determinantu -1, a druga determinantu 1, svakako su pridružene različitim operatorima. No, karakteristični polinom prve matrice ima nultočke 1 i -1 pa je to zapravo matrica zrcaljenja. Druga matrica poznata nam je kao matrica rotacije za kut φ, pri čemu zbog pretpostavke o praznom spektru φ nije 0 (što bi značilo jedinični operator) niti π (rotacija za kut π je operator $-I$).

(b) Unitarni operatori na prostoru $V^3(O)$. Linearni operator na prostoru neparne dimenzije n ima bar jednu svojstvenu vrijednost, jer je karakteristični polinom stupnja n (v. Napomenu na str. 58). Neka je λ svojstvena vrijednost unitarnog operatora A i $\vec{v}$ pripadni svojstveni vektor. Ortogonalni komplement $[\vec{v}]^\perp$ sada je 2-dimenzionalni potprostor, a prema tvrdnji (c) prethodne propozicije taj je potprostor invarijantan za operator A. Prostor $V^3(O)$ jednak je ortogonalnoj sumi invarijantnih potprostora,

$$V^3(O) = [\vec{v}] + [\vec{v}]^\perp,$$

a drugi je izomorfan prostoru $V^2(O)$. Stoga je daljnja analiza već obuhvaćena slučajem (a).

Za matricu operatora A u ortonormiranoj bazi koja se sastoji od vektora $\vec{v}$ i bilo koja dva ortonormirana vektora iz $[\vec{v}]^\perp$ to znači da poprima ovaj oblik:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix},$$

pri čemu podmatrica $B = [\beta_{ij}]$ reda 2 ima jedan od oblika ustanovljenih u slučaju (a), jer to je matrica restrikcije unitarnog operatora A na 2-dimenzionalni potprostor $V^2(O)$.

Matrica A može imati jedan od dijagonalnih oblika:

- $\mathrm{diag}(1, 1, 1)$ (jedinični operator I),
- $\mathrm{diag}(-1, -1, -1)$ (operator $-I$, zrcaljenje s obzirom na ishodište)
- $\mathrm{diag}(-1, 1, 1)$, $\mathrm{diag}(1, -1, 1)$, $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$ (zrcaljenje s obzirom na 2-dimenzionalni potprostor),
- $\mathrm{diag}(1, -1, -1)$, $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$, $\mathrm{diag}(-1, -1, 1)$ (zrcaljenje s obzirom na 1-dimenzionalni potprostor)

ili oblik u kojem B prikazuje operator rotacije koji se ne da dijagonalizirati; za svojstvenu vrijednost 1 to predstavlja rotaciju $V^3(O)$ oko osi određene svojstvenim vektorom, a za svojstvenu vrijednost -1 to je kompozicija rotacije i zrcaljenja s obzirom na 2-dimenzionalni potprostor (umnožak matrice $diag(-1, 1, 1)$ i matrice rotacije).

Naglasimo još ovdje da spomenuta preslikavanja (zrcaljenje i rotacija) ne moraju biti zadana s obzirom na koordinatne osi i ravnine, kako smo možda naviknuti, nego da se taj oblik dobiva pogodnim izborom ortonormirane baze (iz svojstvenih potprostora i njihovih ortogonalnih komplemenata). To vidimo u Primjeru 40 gdje je tipična matrica rotacije dobivena u bazi koja ima prikladni geometrijski smisao s obzirom na rotaciju, dok matrica u nekoj unaprijed zadanoj ortonormiranoj bazi nije odmah prepoznatljiva kao matrica rotacije.

Međutim, sad smo u stanju ispitati može li se tip unitarnog operatora odrediti iz samih njegovih invarijanti. Iz gornjeg popisa svih tipova vidimo sljedeće mogućnosti:

(1) $\operatorname{tr} A = 3$, $\det A = 1$,

(2) $\operatorname{tr} A = -3$, $\det A = -1$,

(3) $\operatorname{tr} A = 1$, $\det A = -1$,

(4) $\operatorname{tr} A = -1$, $\det A = 1$,

(5) $\operatorname{tr} A = -1 + 2\cos\varphi$, $\det A = -1$,

(6) $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\varphi$, $\det A = 1$.

U slučaju (5) i (6) vrijedi $-1 < \cos\varphi < 1$ pa u (6) imamo $-1 < \operatorname{tr} A < 3$. Stoga je slučaj (6) bitno različit od svih ostalih kad gledamo vrijednosti traga i determinante. Također, slučaj (5) ne može se uklopiti u neki od ostalih slučajeva gdje je $\det A = -1$, a to su (2) i (3), jer za njih bi moralo biti $\cos\varphi = -1$, odnosno $\cos\varphi = 1$, a to je isključeno.

Stoga tipove unitarnih operatora na prostoru $V^3(O)$ možemo već na temelju vrijednosti traga i determinante razvrstati ovako:

(I) $\det A = 1$, *operatori koji čuvaju orijentaciju:*

- *(I-1)* $\operatorname{tr} A = 3$, *jedinični operator,*
- *(I-2)* $\operatorname{tr} A = -1$, *zrcaljenje s obzirom na pravac (rotacija za kut* π *oko pravca),*
- *(I-3)* $-1 < \operatorname{tr} A < 3$, *rotacija za kut* φ *takav da je* $\cos\varphi = (\operatorname{tr} A - 1)/2$,

(II) $\det A = -1$, *operatori koji mijenjaju orijentaciju:*

- *(II-1)* $\operatorname{tr} A = -3$, *zrcaljenje s obzirom na ishodište,*
- *(II-2)* $\operatorname{tr} A = 1$, *zrcaljenje s obzirom na ravninu,*
- *(II-3)* $-3 < \operatorname{tr} A < 1$, *kompozicija rotacije za kut* φ *takav da je* $\cos\varphi = (\operatorname{tr} A + 1)/2$ *i zrcaljenja s obzirom na ravninu okomitu na os te rotacije.*

Podsjetimo da je pojam orijentacije ovdje vezan uz bazu. Prva skupina unitarnih operatora preslikava pozitivno orijentiranu bazu u pozitivno orijentiranu (a negativnu u negativnu), dok operatori druge skupine pozitivnu bazu preslikaju u negativnu, i obrnuto.

Za matricu $[R]_{(e)}$ dobivenu u Primjeru 40 lako ustanovimo da joj je trag jednak 2, a determinanta jednaka 1 pa je to svakako matrica rotacije za kut φ takav da je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, dakle rotacija za kut $\pi/3$ ili $5\pi/3$.

Naravno, sve ovo vrijedi ako je doista u pitanju unitarni operator, a to je prepoznatljivo po svojstvu da mu je matrica u ortonormiranoj bazi ortogonalna matrica.

♡

Osim unitarnih operatora, važni su još neki tipovi linearnih operatora s posebnim svojstvima na unitarnim prostorima. Ovdje ukratko spominjemo samo simetrične, odnosno hermitski simetrične operatore.

Definicija 2.9.11. *Neka je* $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *unitarni prostor nad poljem* $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C}$. *Linearni operator* $A \in \mathcal{L}(V)$ *nazivamo* ***simetričnim operatorom*** *u slučaju* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *odnosno* ***hermitski simetričnim operatorom*** *u slučaju* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *za ako za sve* $x, y \in V$ *vrijedi*

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle.$$

U slučaju kompleksnog prostora hermitski simetrični operator nazivat ćemo kraće *hermitskim operatorom.* Tom pojmu korespondira pojam *hermitski simetrične* ili, kraće, *hermitske matrice*, a to je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ za koju vrijedi $A = A^*$.

Relacija kojom je definirano svojstvo simetričnog linearnog operatora može se učiniti neobičnom, no među već dobro poznatim primjerima linearnih operatora dosta lako ćemo prepoznati neke koji su simetrični. Neki od njih su i unitarni, a neki nisu.

Primjer 42. *Na realnom unitarnom prostoru V među simetrične operatore ubrajaju se sve homotetije, zrcaljenja i ortogonalni projektori. Rotacije prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$ općenito nisu simetrični operatori.*

♡

Provjerite sami istinitost tvrdnji u prethodnom primjeru. Općenito će svojstvo simetričnosti, odnosno hermitske simetričnosti biti lakše provjeriti pomoću matričnog prikaza u ortonormiranoj bazi:

Propozicija 2.9.12. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V)$ je simetričan operator u slučaju realnog prostora, odnosno hermitski u slučaju kompleksnog prostora V ako i samo ako je njegova matrica u bilo kojoj ortonormiranoj bazi simetrična, odnosno hermitski simetrična matrica.*

Prije dokaza naglasimo da ova tvrdnja znači da je za svojstvo simetričnosti nužno i dovoljno da linearni operator u barem jednoj ortonormiranoj bazi bude prikazan simetričnom, odnosno hermitski simetričnom matricom. Ako je to ispunjeno, onda će takvom operatoru u svakoj ortonormiranoj bazi biti pridružena simetrična (hermitski simetrična) matrica.

Dokaz. Neka je u ortonormiranoj bazi (e) simetričnom operatoru A pridružena matrica $[A]_{(e)} = [\alpha_{ij}]$. Tada vrijedi

$$\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle,\ j,k = 1,2,\dots,n.$$

Odatle izravno dobivamo $\alpha_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}$ pa je A simetrična, odnosno hermitski simetrična matrica.

Obrnuto, neka postoji ortonormirana baza (e) takva da je matrica $[A]_{(e)} = [\alpha_{ij}]$ simetrična (hermitski simetrična). Treba dokazati da tada vrijedi $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$ za sve $x, y \in V$. Iz pretpostavke da vrijedi $\alpha_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}$ za sve j,k slijedi da je $\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle$. Uvrštavanjem prikaza vektora x, y u bazi (e) u skalarne umnoške $\langle Ax|y\rangle$ i $\langle x|Ay\rangle$ te primjenom jednakosti $\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle$ dobivamo da su ti skalarni umnošci jednaki. □

Neka od najvažnijih svojstava simetričnih operatora odnose se na njihov spektar i mogućnost dijagonalizacije. Sljedeća tvrdnja analogna je Propoziciji 2.9.10. za unitarne operatore.

Propozicija 2.9.13. *Neka je A simetrični ili hermitski operator na unitarnom prostoru V. Tada vrijedi:*

(a) Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je λ realan broj.

(b) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ različite svojstvene vrijednosti, a v_1, v_2 pripadni svojstveni vektori, tada su v_1 i v_2 ortogonalni vektori. Odatle slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

(c) Ako je v svojstveni vektor operatora A i x bilo koji vektor ortogonalan na v, onda je i Ax ortogonalan na v. Drugim riječima, ako je v svojstveni vektor onda je ortogonalni komplement potprostora $[v]$ invarijantan pod djelovanjem A.

Dokaz. (a) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Tada je $\langle Av|v\rangle = \langle v|Av\rangle$, odakle slijedi $\langle \lambda v|v\rangle = \langle v|\lambda v\rangle$ i zatim $\lambda\langle v|v\rangle = \overline{\lambda}\langle v|v\rangle$. Budući da je $v \neq 0$, imamo $\lambda = \overline{\lambda}$ pa je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Imamo $\langle Av_1|v_2\rangle = \langle v_1|Av_2\rangle$ i stoga $\langle \lambda_1 v_1|v_2\rangle = \langle v_1|\lambda_2 v_2\rangle$ te $\lambda_1\langle v_1|v_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle v_1|v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1|v_2\rangle$, budući da su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ako bi bilo $\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$, vrijedilo bi $\lambda_1 = \lambda_2$, suprotno pretpostavci o različitosti ovih svojstvenih vrijednosti.

(c) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ i $\langle v|x\rangle = 0$. Treba dokazati da je tada $\langle v|Ax\rangle = 0$. No, $\langle v|Ax\rangle = \langle Av|x\rangle = \lambda\langle v|x\rangle = 0$.

□

Napomena. Uočimo da tvrdnja (a) u prethodnoj propoziciji ne govori, sama po sebi, da simetrični odnosno hermitski operator uvijek ima neprazan spektar (premda je to zapravo istina, ali na konačnodimenzionalnom prostoru dimenzije barem 1) nego da se spektar, ako je neprazan, sastoji samo od realnih brojeva.

Nadalje, ako primijenimo (a) na simetrične ili hermitski simetrične matrice, vidimo da su svojstvene vrijednosti takvih matrica (ako uopće imaju svojstvene vrijednosti) realni brojevi pa čak i kad se u matrici (hermitski simetričnoj) pojavljuju kompleksni brojevi koji nisu realni. (Jasno, svaku simetričnu odnosno hermitski simetričnu matricu možemo shvatiti kao matrični prikaz odgovarajućeg operatora u ortonormiranoj bazi pa zatim primijenimo (a)).

Ako bismo znali da svaki simetrični odnosno hermitski operator ima neprazan spektar, na temelju (b) i (c) iz prethodne propozicije mogli bismo dokazati da se svaki takav operator može dijagonalizirati i to u ortonormiranoj bazi, a zbog (a) dijagonalizacija se, štoviše, ostvaruje nad poljem $\mathbb{R}$.

Prije općenitih rezultata, pogledajmo jedan primjer, kako bismo lakše razumjeli tvrdnje koje će zatim uslijediti.

Primjer 43. Ispitajmo dijagonalizaciju hermitski simetrične matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Lako izračunamo karakteristični polinom $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ pa je $\sigma(A) = \{1, -1\}$. Uobičajenim računom dobivamo svojstvene vektore $v_1 = (1, -i)$ za $\lambda_1 = 1$ i $v_2 = (1, i)$ za $\lambda_2 = -1$. Baza $\{v_1, v_2\}$ očito je ortogonalna, možemo je normirati pa dobivamo bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\}$. Matrica A dijagonalizira se, dakle, u njoj sličnu matricu $\mathrm{diag}(1, -1)$, a matrica prijelaza je unitarna matrica

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Vrijedi

$$T^t A T = \mathrm{diag}(1, -1).$$

Primijetimo da matrica A ima kompleksne elemente, ali njezin karakteristični polinom ima samo realne koeficijente. Nultočke su realni brojevi (svojstvene vrijednosti), ali vektori ortonormirane baze u kojoj se A dijagonalizira pripadaju prostoru $\mathbb{C}^2$, a ne $\mathbb{R}^2$.

♡

Zadatak 34. *U Zadatku 27 navedeno je da se svaka (realna) simetrična matrica reda* 2 *može dijagonalizirati. Dokažite da to svojstvo imaju i sve hermitski simetrične matrice reda* 2 *i to*

također nad poljem $\mathbb{R}$.
Uputa: Uočite da hermitski simetrične matrice imaju na dijagonali samo realne brojeve, zbog definicijskog uvjeta $A = A^*$. Pokažite da je diskriminanta karakterističnog polinoma uvijek strogo pozitivna, osim za skalarne matrice.

Propozicija 2.9.14. *Spektar simetričnog, odnosno hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru je neprazan skup.*

(Ovdje izuzimamo trivijalni slučaj nulprostora).

Dokaz. Tvrdnja je očita za hermitski operator A na kompleksnom prostoru dimenzije $n \geq 1$, jer je njegov karakteristični polinom stupnja n te po Osnovnom teoremu algebre ima bar jednu kompleksnu nultočku. Takva nultočka λ je svojstvena vrijednost pa postoji i svojstveni vektor, a prema Propoziciji 2.9.13 (a) je λ realan broj. (Vidi Primjer 43).

Uzmimo, dakle, da je A simetrični operator na realnom prostoru dimenzije n. Prikažimo ga u nekoj ortonormiranoj bazi (e) matricom $[A]_{(e)}$ koja je, dakako, simetrična i svi njezini elementi su realni brojevi. Karakteristični polinom operatora A ujedno je i karakteristični polinom matrice $[A]_{(e)}$. Želimo dokazati da su njegove nultočke realni brojevi. U tu svrhu, možda neočekivano, "prelazimo u područje kompleksnih brojeva".

Naime, matricu $[A]_{(e)}$ možemo promatrati kao matricu linearnog operatora na kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$, u kanonskoj (standardnoj) bazi. To, naravno, nije operator A na čiji se spektar odnosi tvrdnja, ali svakako je to neki hermitski operator na prostoru $\mathbb{C}^n$ i njegov spektar čine nultočke karakterističnog polinoma matrice $[A]_{(e)}$. Prema prijašnjem zaključku, te su nultočke realni brojevi. No, simetrični operator A na realnom prostoru V ima isti taj karakteristični polinom, s istim nultočkama pa su te nultočke ujedno svojstvene vrijednosti operatora A. Propozicija je time dokazana. □

Sad je sve pripremljeno za dokaz jednog od ključnih rezultata o linearnim operatorima na unitarnom prostoru.

Teorem 2.9.15. *Svaki simetrični, odnosno svaki hermitski operator na konačnodimenzionalnom prostoru može se dijagonalizirati i to u ortonormiranoj bazi. Dijagonalni oblik simetričnog, odnosno hermitskog operatora je realna dijagonalna matrica.*

Dokaz. Ako se simetrični odnosno hermitski operator može dijagonalizirati, taj dijagonalni oblik je realna matrica, po Propoziciji 2.9.13. (a). Treba, dakle, dokazati dijagonalizabilnost ovakvih operatora, a možemo govoriti samo o simetričnom operatoru A, jer je za hermitski sve potpuno analogno. Uzmimo da je $\dim V = n$.

Po Propoziciji 2.9.14. operator A ima neku realnu svojstvenu vrijednost λ . Neka je v pripadni svojstveni vektor. Ortogonalni komplement $[v]^{\perp}$ sada je $(n-1)$-dimenzionalni potprostor, a prema tvrdnji (c) Propozicije 2.9.13 taj je potprostor invarijantan za operator A. Prostor V jednak je ortogonalnoj sumi invarijantnih potprostora, $V = [v] + [v]^{\perp}$, a restrikcija operatora A na potprostor $[v]^{\perp}$ očito je simetrični operator na tom potprostoru. Ponavljamo isto razmatranje za taj potprostor, rastavljamo ga u ortogonalnu sumu invarijantnih za operator A potprostora dimenzija 1 i $n-2$ itd. Postupak na kraju dovodi do rastava prostora V u ortogonalnu sumu 1-dimenzionalnih svojstvenih potprostora operatora A. □

Važno je i za primjene korisno iskazati i odgovarajuće tvrdnje za matrice:

Korolar 2.9.16. *(1) Svaka realna simetrična matrica ortogonalno je slična realnoj dijagonalnoj matrici.*

(2) Svaka kompleksna hermitski simetrična matrica unitarno je slična realnoj dijagonalnoj matrici.

Tvrdnje slijede iz Teorema 2.9.15. tako da se matrice shvate kao matrični prikazi simetričnog odnosno hermitskog operatora. Istaknimo još jedanput što ove tvrdnje znače:

(1) Ako je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica, onda postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i ortogonalna matrica $T \in M_n(\mathbb{R})$ takve da vrijedi $T^t AT = D$.

(2) Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitski simetrična matrica, onda postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i unitarna matrica $T \in M_n(\mathbb{C})$ takve da vrijedi $T^* AT = D$.

U sljedećem zadatku iskazat ćemo svojstvo hermitskog operatora koje se moglo opaziti za jednu određenu hermitski simetričnu matricu reda 2 u Primjeru 43, a općenito za takve matrice reda 2 pokazuje se u sklopu rješavanja zadatka 31.

Zadatak 35. *Dokažite da je karakteristični polinom hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru realan polinom, to jest da su mu svi koeficijenti realni brojevi.*

Primjer 44. *Primjena dijagonalizacije simetrične matrice na krivulje 2. reda.*
U kolegiju Analitička geometrija (odjeljak 3.9. Krivulje drugog reda u $\mathbb{R}^2$ iz skripte predmeta) provedena je potpuna klasifikacija skupova točaka u ravnini zadanih jednadžbom oblika

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

pri čemu su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ takvi da je bar jedan od koeficijenata a, b i c različit od 0. Pogodnim rotacijama i translacijama koordinatnog sustava opća jednadžba svodila se na neki od prepoznatljivih oblika. Izvedene su i invarijante krivulja 2. reda, spomenute su svojstvene vrijednosti te je najavljeno da će se više o tome učiti u Linearnoj algebri.

Pokažimo na primjeru jednog zadatka iz skripti iz Analitičke geometrije kako bismo ovdje pristupili rješavanju. Treba odrediti tip i kanonsku jednadžbu krivulje zadane jednadžbom

$$6xy + 8y^2–12x–26y + 11 = 0.$$

Za opću jednadžbu definiramo matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ može se sada napisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

odnosno kao skalarni produkt $\langle Av|v\rangle$ za $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Budući da se A zbog simetričnosti može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi $\{v_1, v_2\}$ svojstvenih vektora pridruženih svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2, za vektor $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ imamo

$$\langle Av|v\rangle = \lambda_1\langle \alpha v_1|\alpha v_1\rangle + \lambda_2\langle \beta v_2|\beta v_2\rangle = \lambda_1|\alpha|^2 + \lambda_2|\beta|^2.$$

Matrica A može se napisati u obliku $A = TDT^t$, gdje je $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, a T ortogonalna matrica. Dalje računamo u terminima pravokutnih koordinatnih sustava u ravnini $\mathbb{R}^2$. Uzmemo li nove koordinate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(riječ je zapravo o rotaciji pravokutnog koordinatnog sustava i koordinatama (x', y') u tako dobivenom novom sustavu) možemo napisati:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} TDT^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t D \left(T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2. \end{aligned}$$

U našem primjeru izračunamo da za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

vrijedi $\sigma(A) = \{-1, 9\}$, a svojstveni potprostori su $[(1,3)]$ za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 9$ i $[(-3,1)]$ za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -1$. Stoga su

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

a binom $6xy + 8y^2$ transformira se u binom $9(x')^2 - (y')^2$. Ovo je, dakako, u skladu s relacijom $\langle Av|v\rangle = \lambda_1(\alpha)^2 + \lambda_2(\beta)^2$, jer α i β označavaju koordinate vektora v u ortonormiranoj bazi svojstvenih vektora, a ovdje su te koordinate x' i y'. Preostaje transformirati linearni trinom $-12x-26y + 11$. Uvrštavanjem $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$ i $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$ dobivamo

$$-12x-26y + 11 = \sqrt{10}(-9x' + y') + 11.$$

Konačno imamo

$$6xy+8y^2-12x-26y+11 = 9(x')^2-(y')^2-\sqrt{10}(9x'-y')+11 = 9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 -9 = 0,$$

odnosno

$$\frac{(x' - \sqrt{10}/2)^2}{1} - \frac{(y' - \sqrt{10}/2)^2}{9} = 1.$$

Posljednji izraz dobiven je "dopunjavanjem do kvadrata" odnosno translacijom koordinatnog sustava. (U Analitičkoj geometriji bilo je to izraženo prelaskom na nove koordinate $x'' = x'-v$, $y'' = y' - w$).

U koordinatama

$$x'' = x'-\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y - 5), \ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y - 5)$$

dobili smo jednadžbu

$$(x'')^2 - (y'')^2/9 = 1.$$

Zadana krivulja je hiperbola. Njezin centar je u točki $(x'', y'') = (0, 0)$, a lako izračunamo da u (x, y)-koordinatama to je točka $(-1, 2)$.

♡

Primjer 45. *Primjena dijagonalizacije na rješavanje rekurzivnih jednadžbi.*

Ovdje ćemo kao primjer razmotriti samo slučaj linearne rekurzivne jednadžbe oblika

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2},$$

uz zadane vrijednosti početnih članova x_0 i x_1. Dakle, niz (x_n) zadan je tako da je opći član izražen kao linearna kombinacija prethodna dva člana, sa stalnim koeficijentima a i b. Želimo eksplicitno izraziti x_n kao funkciju od n.

Definiramo niz vektor-stupaca

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

za $n \geq 1$ te izrazimo X_n pomoću X_{n-1}:

$$X_n = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_{n-1}.$$

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pomoću te matrice jednostavno dobivamo

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \ldots = A^{n-1} X_1.$$

Kako je X_1 zadan, očito preostaje samo izračunati matricu A^{n-1}, a to će biti lako izvedivo npr. u slučaju kad se A može dijagonalizirati, jer tada primijenimo način izračunavanja kakav je naveden u Zadatku 27. Naime, ako se A dijagonalizira u matricu D i $D = T^{-1}AT$, onda je $A = TDT^{-1}$ pa je

$$A^n = TD^nT^{-1}$$

i time je u načelu problem riješen. Ako je uz to matrica prijelaza T ortogonalna, račun je još lakši zbog $T^{-1} = T^t$.

Ilustrirat ćemo ovaj postupak na vjerojatno najpoznatijem nizu koji se zadaje rekurzivno pomoću dva prethodna člana, *Fibonaccijevom nizu* zadanom relacijom

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Za početne članove uzmimo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Tako dobivamo poznati niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Tada je $a = b = 1$, matrica A je simetrična, ortogonalno je slična matrici $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$, pri čemu su α i β svojstvene vrijednosti, dakle nultočke polinoma

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Rješenja su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

a korisno je uočiti relacije

$$\alpha\beta = -1,\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

Lako nalazimo svojstvene potprostore, to su $[(\alpha, 1)]$ i $[(\beta, 1)]$. Napisani vektori su ortogonalni, ali ne i normirani. Sad nije nužno uzimati ortonormiranu bazu pa neka je

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det T = \alpha - \beta$, imamo

$$T^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

te

$$A^{n-1} = TD^{n-1}T^{-1} = T\,\mathrm{diag}(\alpha^{n-1}, \beta^{n-1})T^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Odavde uvrštavanjem u

$$X_n = A^{n-1}X_1 = A^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

dobivamo

$$x_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Iako se u formuli pojavljuje iracionalni broj $\sqrt{5}$, vrijednosti članova niza su prirodni brojevi, kao što očito i moraju biti. Članovi Fibonaccijevog niza obično se označavaju s F_n. Npr. za $n = 3$ imamo

$$F_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 1 + 1 = 2.$$

♡

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] K. Horvatić, *Linearna algebra I, II*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1995.