ALG. GEOM - 2. predavanje. 4.11.2022.

Zadnji put:

maksimalni ideali $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ alg. skupovi
minimalni ideali $\longleftrightarrow$ točke.

Prop. 2 od zadnji put nam omogućuje da alg. skupovi mogu inducirati topologiju na A^n. - nekog zadanog alg. skupa se mogu odrediti čisto iz topologije.

<u>Definicija</u> (TOPOLOGIJE) TOPOLOGIJA na skupu X se može zadati tako da se za neke podskupove definira da su ZATVORENI, za njima

(1) $\emptyset$ i X su zatvoreni
(2) presjeci zatv. su zatv.
(3) konačne unije zatv. su zatvorene.

Ako je $U \subseteq X$ zatvoren tada je $X \setminus U$ OTVOREN.

Zatvarač $\overline{A}$ od $A \subseteq X$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A (ili presjek svih zatvorenih koji sadrže A).

Topologiju na X inducira TOPOLOGIJU POTPROSTORA na $A \subseteq X$ tako da su zatvoreni skupovi na A oblika $A \cap Y$, gdje je Y zatvoren u X.

Podskupovi od X dje nam omogućuje kreiranje topologije potprostora.

Primjedba: ako je A zatvoren, tada su zatvoreni podskupovi od A zatvoreni podskupovi od X sadržani u A.

Preslikavanje $f: X \to Y$ topoloških prostora je NEPREKIDNO ako za svaki zatvoreni u Y zatvoreni u X (ili ono koje su otvoreni).

<u>Definicija</u> TOPOLOGIJA ZARISKOG (ili ZARISKIJEVA TOPOLOGIJA)

Neka je X algebarski skup (npr. A^n).

Tada je TOPOLOGIJA ZARISKOG na X definirana tako da za zatvorene skupove algebarski podskupovi od X, tj. $V(S)$ za neki $S \subseteq R$.

Po prop. 2 ovo je topologija.

Primjetimo da za $X \subseteq A^n$ mu definirali topologiju potprostora (od TZ na A^n) i TZ na X → ovo se podudaraju.

Promotrimo neko svojstvo od TZ:

(2) Neka je $A = \{x \in A^1_{\mathbb{C}} : |x| \leq 1\}$

A je očito zatvoren u kompleksnoj topologiji, A pripada nije zatvoren u TZ. Općenito zatvoren u TZ $\Rightarrow$ zatvoren u KT $\not\Leftarrow$

(1) Alg. skupovi u A^1 su konačni (prazan od prošli put) i cijeli prostor.

Dakle otvoreni skupovi su komplementi konačnih i $\emptyset$.

Primjetimo da topologija nije Hausdorffova.

Primjetimo i da $X \subseteq A^1$ otvoren, $\overline{X} = A^1$.

(3) Nechť je $f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ bijekce když existuje předchozího. Tedy zachovává konečné skupiny konečné $\Rightarrow$ f je nepřechodné.

<u>nap.</u>: když konečné jsou morfismy alg. skupin.

nechť def. pomocí nepřechodné předchozího.

<u>Def</u> Za topologické prostory X i Y může se definovat ~~PRODUKTNÍ~~ TOPOLOGIE PRODUKTU na $X \times Y$ tak, že se definuje jako ta otevřené skupiny když ta ve tvaru $U_i \times V_i$, $U_i \subseteq U$, $V_i \subseteq V$ i $\mathcal{T}$].

Projekce do TZ na $X \times Y$ nazýváme topologie produktu.

Např. $V(x_1 - x_2) = \{(a,a) : a \in k\}$ je zatím u TZ ale není u topologie produktu na $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Může se neobsahovat (a konečném i když nikoli TP) nejvíce u AG.

<u>Def</u>. Nechť je X topologický prostor.

(1) Řekneme, že je X REDUCIBILNÍ jako se může zapsat ho $X_1 \cup X_2$ za zatím $X_1, X_2 \subsetneq X$. ~~i $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$~~.

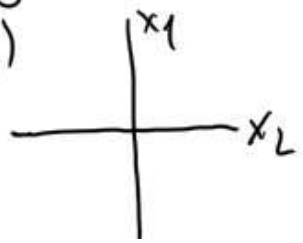
Jako ne, tvrdo je IREDUCIBILNÍ.

(2) — || — NEPOUŽZAN — || — i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

inče je POUŽZAN.

<u>Příklad</u> $V(x_1 x_2)$ POUŽZAN, REDUCIBILNÍ.

$V(x_1) \cup V(x_2)$



Pozorujeme: u standardnej topologie $\mathbb{A}^1$ je ireducibilní:

$$\mathbb{A}^1 = \{x : |x| \leq 1\} \cup \{x : |x| \geq 1\},$$

dok je u TZ ireducibilní. (Nap. zatvorení = konečné.)

<u>Def</u> Ireducibilní algebraický zhup se zove AFINNÍ MNOGOSTRUNOST.

<u>Def</u>. Nechť je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ algebraický zhup. POLINOMIÁLNÍ FUNKCIÍ NA X je predpis $X \to k$, $x \mapsto f(x)$ za ktorý

$f \in k[x_1, \dots, x_n]$ $(= A)$

Pozorujeme dv je $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$
$\iff f(x) - g(x) \in I(X)$.

Zúžením POLINOMIÁLNÍ FUNKCIÍ na X su $A/I(X)$.

<u>Def</u>. $A(X) := A/I(X)$ se zove KOORDINATNÍ PRSTEN od X.

<u>Nap.</u> $A(X)$ je k-algebra (tj okrem toho je prsten, jo je i nekterý prsten nad k).

<u>Nap.</u> $A(X)$ je za X ako to je A $(= k[x_1, \dots, x_n])$ za $\mathbb{A}^n$.

<u>Prop.</u> Nechť je X neprazdna i $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1, X_2 \subsetneq X$. Tedy je $A(X) \simeq A(X_1) \times A(X_2)$

Relativne verzije $V(S)$ i $I(X)$:

Neka je $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ fiksan algebarski skup.

Def Za $S \subseteq A(Y)$ def $V_Y(S) := \{x \in Y \mid f(x) = 0 \ \forall f \in S\} \subseteq Y$.

Ono je ALGEBARSKI PODSKUP od Y.

Def Za $X \subseteq Y$ def $I_Y(X) := \{f \in A(Y) : f(x) = 0 \ \forall x \in X\} \trianglelefteq A(Y)$.

Ono je IDEAL od X u Y.

Nap. Kao i prije se pokaže da za $X \subseteq Y$ (X, Y alg. skupovi)

$$\Rightarrow \quad A(X) \cong A(Y)/I_Y(X).$$

TM (RELATIVNI NULLSTELLENSATZ)

(a) Vrijedi $V_Y(I_Y(X)) = X$

(b) $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$, za $\forall J \trianglelefteq A(Y)$.

(c) $\{\text{alg. podskupovi od } Y\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{radikalni ideali u } A(Y)\}$.

Vratimo se zato na topologiju

Propozicija Neprazan algebarski skup je ireducibilan $\Leftrightarrow$ $A(X)$ je integralna domena.

Dokaz: Prisjetimo da prije $X \neq \emptyset \Rightarrow I(X) \neq A \Rightarrow A/I(X)$ nije nul-prsten.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretp. $A(X)$ nije ID, tj. $\exists f_1, f_2 \in A(X)$ t.d. $f_1 f_2 = 0$, $f_1, f_2 \neq 0$

$\Rightarrow X_1 := V(f_1)$ i $X_2 := V(f_2)$ su zatvoreni, $\neq X$ (jer $f_1, f_2 \neq 0$)

i $X_1 \cup X_2 = V(f_1) \cup V(f_2) = V(f_1 f_2) = V(0) = X \Rightarrow$

X je reducibilan.

$\boxed{\Leftarrow}$ Předp. dle je X nerozložitelná, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \subsetneq X$.
Po relativní NST, uvažme $I_X(X_i) \neq 0$ v $A(X)$ pro $i = 1, 2$.
Nechť je $\underset{\neq 0}{f_1} \in I_X(X_1)$, $\underset{\neq 0}{f_2} \in I_X(X_2)$. Tedy $f_1 f_2$ pomocí na $X_1 \cup X_2 = X \Rightarrow f_1 f_2 = 0$ v $A(X) \Rightarrow$
$A(X)$ není ID. $\blacksquare$

<u>Nap.</u> Nechť je Y ind. alg. skup (= afinní množnost).
Inaem $A(X) \cong A(Y) / I_Y(X)$ $\forall$ alg. skup $X \subseteq Y$.
$A(X)$ je ID $\Leftrightarrow$ $I_Y(X)$ je první ideál, obdobně
Rel. NST. dej

{neprázdné ~~afinní množ.~~ ired. alg. podskupiny od Y (= afinní podmnožnosti od Y)}

$\Updownarrow$ 1:1

{první ideály v $A(Y)$}.

PŘEDNÁŠKA KRÁJ 2. PRÚ

<u>Příklady</u> 1) Konečná alg. skup je poresen $\Leftrightarrow$ má 1 bod.
2) Sudé ~~část~~ ireducibilní skup je poresen.
3) A^n je ired. právě je A int. doména.
Tedy je A^n poresen.
4) $X = V(x_1 x_2)$ není ired., ale $V(x_1)$ i V_2 jsou.