Algebarska geometrija

Filip Najman

Prirodoslovno matematički fakultet, Matematički odsjek
2022/2023

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Linearna algebra se bavi proučavanjem sustava linearnih jednadžbi u više varijabli. Algebra se bavi, među ostalim, polinomijalnim jednadžbama u jednoj varijabli. Algebarska geometrija kombinira ova 2 polja, promatrajući sustave polinomijalnih jednadžbi u više varijabli.

Cilj nam nije nalaženje nekog rješenja takvog sustava, već razumijevanja intrinzičkih svojstava takvih rješenja. Cilj kolegija je uvesti moderan jezik shema, koji dopušta rad sa poljima koja nisu algebarski zatvorena i time je vrlo pogodan za rad u teroiji brojeva, gdje nijedno polje od interesa nije algebarski zatvoreno.

Motivacija će nam uglavnom dolaziti iz geometrijskih problema, dok će jezik algebarske geomterije biti prvenstveno algebarski. Pretpostavljat ću dobro poznavanje (komutativne) algebre. Nužni rezultati iz algebre se neće dokazivati, ali ću uglavnom dati referencu.

Prvenstveno ću se držati [2], međutim koristit ću i drugu literaturu i web skripte (koje ću naknadno citirati). Za pozadinu ću se često referencirati i na [3].

Poglavlje 2

Afine mnogostrukosti

Neka je k u ovom poglavlju algebarski zatvoreno polje. U cijelom kolegiju, svi prsteni će biti komutativni prsteni s jedinicom, te to nećemo više spominjati. Neka je $A := k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definicija 1. Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Definiramo n-dimenzionalni *afin prostor* nad k

$$\mathbb{A}_k^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n\}.$$

Kada je k jasan iz konteksta, često ćemo pisati samo $\mathbb{A}^n$. Element $P \in \mathbb{A}^n$ se zove *točka*, te ako je $P = (a_1, \ldots, a_n)$, a_i-jevi se zovu koordinate od P.

Primjetimo da su k^n i $\mathbb{A}^n$ isti kao skupovi. Mi promatramo $\mathbb{A}^n$ kao skup, dakle zaboravljamo (ignoriramo) činjenicu da je k^n vektorski prostor i prsten. Dakle na $\mathbb{A}^n$ nisu definirani zbranjanje i množenje.

Definicija 2. Neka je S skup polinoma u $A := k[x_1, \ldots, x_n]$. Tada označavamo

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0 \text{ za sve } f \in S\}.$$

Kada se S sastoji od samo jednog polinoma f, pišemo $V(f)$ (umjesto $V(\{f\})$). Skup $T \subset \mathbb{A}^n$ se zove *algebarski skup* ako postoji $S \subset A$ takav da je $T = V(S)$.

Napomena 1. Neka su $f, g \in A$ koji se poništavaju na nekom posdskupu S od $\mathbb{A}^n$. Tada se poništavaju i fh, za svaki polinom $h \in A$ i $f + g$. To povlači da je I ideal generiran s S, da će tada vrijediti $V(I) = V(S)$. Dakle, možemo uvijek zamijeniti S s idealom (S) kojeg taj skup generira.

Ova napomena je jedan od temelja algebarske geometrije; ona povezuje geometrijske objekte (algebarske skupove) s algebarskim (idealima).

Definicija 3. Komutativan prsten je *Noetherin* ako je svaki ideal u R konačno generiran.

Teorem 1 (Hilbertov teorem o bazi)**.** *Ako je R Noetherin prsten, tada je i $R[x]$ Noetherin.*

Primjetimo da pošto je A Noetherin prsten, svaki ideal je konačno generiran, te je svaki algebarski skup $V(S)$ za neki $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$.

Propozicija 2. *(a) Vrijedi $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$, dakle unija dva algebarska skupa je algebarski skup.*

(b) Neka je J neki skup indeksa i $S_i \subseteq A$ za svaki $i \in J$. Tada je $\bigcap_{i \in J} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in J} S_i)$. Dakle, prejsek bilo koje familije algebarskih skupova je algebarski skup.

(c) ako je $S \subseteq T$, da je tada $V(T) \supseteq V(S)$.

(d) Prazan skup i cijeli prostor su algebarski skupovi.

Dokaz. Vidi [2, Proposition I.1.1] ili [1, Lemma 1.4].
Za zadnju tvrdnju: $V((0)) = \mathbb{A}^n$, te $V((1)) = \emptyset$. □

Primjetimo da obrat od (c) ne vrijedi.

Definicija 4. Neka je $J \trianglelefteq R$, tj. J je ideal u prstenu R. Tada je $\sqrt{J}$ *radikal od J*

$$\sqrt{J} := \left\{ f \in R : f^k \in J \text{ za neki } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ideal J je radikalan ako je $\sqrt{J} = J$.

Sjetimo se da je za ideale J_1, J_2, $J_1 + J_2$ ideal generiran s $J_1 \cup J_2$.

Propozicija 3. *Neka su $J, J_1, J_2 \trianglelefteq A$.*

(a) $V(\sqrt{J}) = V(J)$.

(b) $V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2) = V(J_1 \cap J_2)$.

(c) $V(J_1) \cap V(J_2) = V(J_1 + J_2)$.

Dokaz. Vidi [1, Lemma 1.7] □

Primjetimo da ako je J ideal, tada je i $\sqrt{J}$ ideal.

Definicija 5. Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Definiramo ideal od X s

$$I(X) := \{f \in A : f(x) = 0 \text{ za sve } x \in X\}.$$

Primjetimo da za $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ vrijedi $I(X_2) \subseteq I(X_1)$. Također, primjetimo da je $I(X)$ uvijek radikalan ideal: ako je $f^k(x) = 0$ za sve $x \in X$, tada očito mora vrijediti i $f(x) = 0$ za sve $x \in X$, pa je $f \in I(X)$.

Teorem 4 (Hilbertov Nullstellensastz)**.** *(a) Za svaki algebarski skup $X \in \mathbb{A}^n$ vrijedi $V(I(X)) = X$.*

(b) Za svaki ideal $J \trianglelefteq A$ vrijedi $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

Za dokaz većine ovih tvrdnji vidite [1, Proposition 1.10].

Korolar 5. *Postoji $1-1$ korespondencija koja obrće relaciju inkluzije između radikalnih ideala $I \trianglelefteq A$ i algebarskih skupova $V \subseteq \mathbb{A}^n$ u kojoj je*

$$I \leftrightarrow V(I) \text{ tj. } I(V) \leftrightarrow V.$$

Primjer 1. Neka je J ideal u $k[x]$. Pošto je $k[x]$ DGI, slijedi $K = \langle f \rangle$ za neki $f = (x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r}$. Lako vidimo da je $V(J) = V(f) = \{a_1, \dots a_r\}$, pa je onda

$$I(V(J)) = \sqrt{J} = \langle (x-a_1) \cdots, (x-a_r) \rangle,$$

tj. to su polinomi koji se poništavaju u $a_1, \dots, a_r$.

Primjer 2. Pretpostavka da je k algebarski zatvoreno polje je bitno. Neka je $J = \langle x^2+1 \rangle \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$. To je prosti, a time i radikalni ideal. Imamo da je $V(J) = \emptyset$, pa je $I(V(J)) = I(\emptyset) = \mathbb{R}[x] \neq J = \sqrt{J}$.

Primjer 3. Ideal $J = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \trianglelefteq A$ je maksimlan pošto je $A/J \simeq k$, što je polje. Time je J i radikalan. Neka je $a = (a_1, \dots, a_n)$. Imamo

$$I(\{a\}) = I(V(J)) = J.$$

Zapravo točke su najmanji algebarski skupovi, pa po Nullstellensatzu odgovaraju maksimalnim idealima. Dakle bijekcija iz Corollary 5 se restringira na bijekciju između točaka u $\mathbb{A}^n$ i maksimalnih ideal u A.

Iz Hilbertovog Nullstellensatza direktno slijedi Slabi Nullstellensatz.

Teorem 6 (Slabi Nullstellensatz)**.** *Za svkai pravi ideal $I \trianglelefteq A$ vrijedi $V(I) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je I ideal takav da je $I(V(I))$ prazan; tada je $I(V(I)) = A$, pa je po Nullstellensatzu $\sqrt{I} = A$. Slijedi da za neki $r \in \mathbb{N}$ vrijedi $1^r = 1 \in I$, pa ideal I nije pravi. $\square$

Proposition 2 nam omogućuje uvođenje topologije na afinom prosotru kroz algebarske skupove.

Definicija 6. *Topologija Zariskog* na $\mathbb{A}^n$ je definirana tako da definiramo da su otvoreni skupovi komplementi od algebarskih skupova.

Primjetimo da su cijeli prostor i prazan skup otvoreni skupovi.

Primjer 4. Primjetimo da su algebarski skupovi u $\mathbb{A}^1$ oni koji su konačni i cijeli prostor. Dakle otvoreni skupovi su komplementi od konačnih i prazan skup. Primjetimo da ova topologija nije Hausdorffova.

Definicija 7. Neprazan podskup Y od (općenitog) toploškog prostora X je ireducibilan ako se ne može napisati kao unija 2 prava zatvorena (u Y) podskupa. Prazan skup se ne smatra ireducibilnim.

Primjer 5. $\mathbb{A}^1$ je ireducibilan, pošto su zatvoreni podskupovi konačni, a $\mathbb{A}^1$ je beskončan.

Primjer 6. Neprazan podskup ireducibilnog prostora je ireducibilan i gust. Ako je Y ireducibilan podskup od X, tada je zatvorenje $\overline{Y}$ u X također ireducibilno.

Bibliografija

[1] A. Gathmann, *Algebraic Geometry, Class Notes TU Kaiserslautern 2021/22.*

[2] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, vol. 52 of Grad. Texts Math., Springer, Cham, 1977.

[3] G. Muić, *Uvod u algebarsku geometriju.*

ALGEBARSKA GEOMETRIJA 27. 10. 2022.

ČET 11 – 13

OSTALI TERMINI

SRI 14 – 16 ?
UTO 14 – 16 ?
ČET 14 – 16 ?

LITERATURA:

1. R. HARTSHORNE : ALGEBRAIC GEOMETRY
2. A. GATHMANN : — || —
3. (ZA UVOD) MUIĆ : UVOD U AG

OSTALO:

4. J. HARRIS : — || —
5. GÖRTZ, WEDHORN : — || — I
6. SHAFAREVIC : — || — I, II
7. EISENBUD, HARRIS : GEOMETRY OF SCHEMES

OIL) KOLEGIJA : uvesti zheme, tj. moderan jezik AG.
– korisno za TB, gdje polazi mišu alg. zatvorene.

ŠTO JE AG?

- LIN. ALG ze kvi zatvoren lin. jed.
- ALGEBRA – niz polinomi u 1. varijabli
- ALG. GEOM. – nutari polin. jed. u više varijabli.

Motivacija dolazi iz geometrijskih problema, a jezik AG je prevažno algebarski.

PRETPOSTAVLJAMO : dobro znanje algebre.
– neće se dokazivati nužni rezultati

NAPOMENA : Postoji različiti pristupi i jezik AG.

Program: – 19. st : konkretni specifični problemi, promatrale se projektivne mnogostrukosti, tehnike : geometrijske konstrukcije

- kraj 19. i početak 20. st : TALIJANSKA ŠKOLA
  (geometrijski, "intuitivni" pristup)
  neki krivi rezultati
  (kontrim ALG. GEOM)
- 20 st. Zariski, Weil : razvili algebarski pristup

- 1950, 1960, - Serre, Grothendieck
  : formulirajo pomembne teorije zaračuna

- 1960-ih - GROTHENDIECK : TEORIJA SHEMA
  - dovršitev malarov jezik
  EGA (1000 str), veliki uspeh
  "WEIL CONJECTURES"
  DELIGNE

- 1970 ih DELIGNE, MUMFORD - STOBOUI (GEN. SHEMA)
  - nekem o temu pristopu
  STACKS PROJECT (7500 str).

Dokaz $\boxed{\text{Prop 2 (a)}}$ Nap $S_1 S_2 = \{fg : f \in S_1, g \in S_2\}$

$\boxed{\subseteq}$ $x \in V(S_1) \cup V(S_2) \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(x)=0 \quad \forall f \in S_1$ ili $g(x)=0 \ \forall g \in S_2$

$\Rightarrow fg(x)=0 \quad \forall f \in S_1, g \in S_2 \quad \Rightarrow x \in V(S_1 S_2)$

$\boxed{\supseteq}$ Pretp $x \notin V(S_1) \cup V(S_2) \Rightarrow x \notin V(S_1)$ i $x \notin V(S_2)$

$\Rightarrow \exists f \in S_1$ i $g \in S_2$ t.d. $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$

$\Rightarrow (fg)(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin V(S_1 S_2)$.

$\boxed{b)}$ $x \in \bigcap_{i \in J} V(S_i) \iff f(x) = 0 \ \forall f \in S_i \ \forall i \in J$

$\iff x \in V(\bigcup_{i \in J} S_i)$.

$\boxed{c)}$ $x \in V(T) \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall f \in T \rightarrow f(x) = 0 \ \forall f \in S$

$\Rightarrow x \in V(S)$.

$\boxed{d)}$ - w skrypcie.

Dowód Propozycji 3

a) $\boxed{\subseteq}$ Wiadomo, że $\sqrt{J} \subseteq J \Rightarrow V(J) \subseteq V(\sqrt{J})$ po przeciwnej propozycji.

$\boxed{\supseteq}$ Niech $x \in V(J)$ i $f \in \sqrt{J} \Rightarrow \exists k$ t.ż. $f^k \in J$ i t.ż. $f^k(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in V(\sqrt{J})$.

b) pro jasności jest po prostej propozycji. 2. wiadomo iż $\sqrt{J_1 J_2} = \sqrt{J_1 \cap J_2}$ (DZ).

c) wiadomo iż $J_1 + J_2 = \langle J_1 \cup J_2 \rangle$ i prosta propozycja.

Dowód Hilberta Twierdzenia 4 (HN)

a) $\boxed{\supseteq}$ Niech $x \in X \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall f \in I(X) \Rightarrow x \in V(I(X))$

b) $\boxed{\supseteq}$ Niech $f \in \sqrt{J} \Rightarrow \exists k$ t.ż. $f^k \in J$ i $f^k(x) = 0$ $\forall x \in V(J) \Rightarrow f \in I(V(J))$. (Drugi sposób DZ).

a) $\boxed{\subseteq}$ Weźmy $X = V(J)$ za ile wiemy J po def.

$\Rightarrow I(V(J)) \supseteq \sqrt{J} \supseteq J \Rightarrow V(I(V(J))) \underset{\text{Rep.}}{\subseteq} V(J) \Rightarrow V(I(X)) \subseteq X$