SNOPOVI MODULA

Sada želimo naučiti konstruirati snopove.

<u>Primjer</u> (TANGENCIJALNI SNOP)

Neka je X glatka mnogostrukost, npr. $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Želimo za svaku točku $p \in X$ odrediti tangencijalni prostor $T_p X$.

Želimo definirati TANGENCIJALNI SNOP T_X od X s

$$T_X(U) = \left\{ \varphi = (\varphi_p)_{p \in U} : \varphi_p \in T_p X \text{ "nosimo drugačiji lijepo da bi } T_X \text{ bio snop"} \right\}$$

(analogno kao $\forall$ snop)

Sjetimo se da $\varphi \in T_X(U)$ zovemo SEKCIJE. Sekcija φ je tada za svaku $p \in U$ pridružiti neki element iz $T_p X$.

Primjetimo da ne možemo množiti elemente iz T_pX, pa T_X neće biti snop prstena.

Međutim možemo množiti $v \in T_pX$ s regularnom funkcijom (tako da v pomnožen u nekoj točki s vrijednosti funkcije u toj točki). Time T_X postaje $\mathcal{O}_X$-modul, tj <u>SNOP MODULA</u>.

<u>Def</u> Neka je X zlatna.

a) (PRED) SNOP MODULA na X (ili (PRED) SNOP $\mathcal{O}_X$-MODULA) je (PRED) SNOP $\mathcal{F}$ na X t.d. $\mathcal{F}(U)$ ima strukturu $\mathcal{O}_X(U)$-modula $\forall$ otvoreni $U \subseteq X$, te su restrikcije "homomorfizmi $\mathcal{O}_X$-modula", tj $(\varphi+\psi)|_U = \varphi|_U + \psi|_U$ i $(\lambda\varphi)|_U = \lambda|_U \cdot \varphi|_U$ $\forall$ otv $U \subseteq V$, $\lambda \in \mathcal{O}_X(V)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(V)$.

Nap. $\mathcal{F}(U)$ i $\mathcal{F}(V)$ su moduli nad rozl. prstenima $\mathcal{O}_X(U)$ i $\mathcal{O}_X(V)$.

KONVENCIJA Donosi nadalje cijel (PRED) SNOP biti (PRED) SNOP modula. Šnop modula ćemo i nazivati $\mathcal{O}_X$-modul.

b) MORFIZAM $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (PRED) SNOPOVA je definiran s homomorfizmima $\mathcal{O}_X(U)$-modula

$$f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \quad \forall \text{ otv } U \subseteq X$$

t.d. su kompatibilni s restrikcijom, tj.

$$f_V(\varphi)|_U = f_U(\varphi|_U) \quad \forall \text{ otv } U \subseteq V \text{ i } \forall \varphi \in V.$$

Primjeri a) $\mathcal{O}_X$ je očito snop $\mathcal{O}_X$-modula $\forall$ skupa X.

b) Ako su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ snopovi modula na X, tada je i $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ definiran s $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$

Sljedeći primjer će nam biti važan.

(TWISTING SHEAVES)

<u>Primjer</u> (ZAKRETNI SNOPOVI na $\mathbb{P}^n$)

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathbb{Z}$. $\forall\, U \subseteq \mathbb{P}^n$

definiramo

$$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\right)(U) := \left\{ \frac{g}{f},\ f \in k[x_0, \dots, x_n]_e,\ g \in k[x_0, \dots, x_n]_{e+d} \text{ za neki } e \in \mathbb{Z},\ \text{t.d. } f(P) \neq 0\ \forall P \in U \right\},$$

Ovo je prstenski snop nad $k(x_1, \dots, x_n)$. Iz def

$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\right)(\emptyset) = \{0\}$ direktno:

(a) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ je snop, jasno je da $\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\right)(U)$ prstenski nad $k(x_1, \dots, x_n)$ i restrikcije je identiteta.

(b) za $d = 0$ imamo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (✓).

$$\frac{g}{f} \longmapsto \frac{g}{f}$$

Nag. primjetimo da za $d \neq 0$ sekcije u $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ nisu dobro def funkcije (skaliranje ih mijenja!

(c) Primjetimo da $\forall e \in \mathbb{Z}$ imamo množenje

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(U) \times (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e))(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e+d)(U)$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \cdot \psi.$$

Ako uzmemo $d=0$, vidimo da je $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e)$ zapravo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modul $\forall e \in \mathbb{Z}$.

Snopovi $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ se zovu <u>zakretni snopovi</u> na $\mathbb{P}^n$.

<u>Primjer</u> Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $d \in \mathbb{Z}$.

a) Za globalne sekcije $\frac{g}{f} \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n)$ mora vrijediti $V(f) = \emptyset$, tj. po NST f je konstanta.

$$\Rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n) \cong K[x_0, \dots, x_n]_d$$

Jednakowo, zbiegnie $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n) = \{0\}$ $\forall d<0$.

b) Zw $U_0 := \{(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1 : x_0 \neq 0\}$

i mam $\frac{1}{x_0} \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))(U_0)$.

c) $\forall$ hom. polinom $f \in k[x_0, \dots, x_n]_e$ daje morfizm snopów

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+e)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

d) Przypuśćmy że $\forall d \neq 0$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \not\cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

jeśli $k[x_0, \dots, x_n]_d \overset{(a)}{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)(\mathbb{P}^n)$, a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) \simeq k$.

($\mathcal{O}_X(X) \simeq k$ zw potpunej)

Mechetina oni porta... izomorfni

na $U_i = \{(x_0 : x_1 \quad : x_n) : x_i \neq 0\}$ $\forall i = 0, \dots, n$

z izom $f : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_{U_i}$, $\varphi \mapsto \varphi x_i^d$

s omezením $f^{-1}: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}$

$$\varphi \longmapsto \frac{\varphi}{x_i^d}.$$

<u>Def</u> (GURANJE (PUSH-FORWARD) SNOPA)

Nechť je $f: X \to Y$ morfismus schémat a nechť je $\mathcal{F}$ snop na X. Pro $\forall$ otv. $U \subseteq Y$ definujme $(f_* \mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Ono je snop na Y, čímž snop $\mathcal{O}_Y$-modulů, se $\lambda \cdot \varphi := f^*(\lambda) \cdot \varphi$ $\forall \lambda \in \mathcal{O}_Y(U)$ i $\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. $(U))$.

<u>Pozn</u> a) Nechť je $f: X \to Y$ morfismus schémat. Pomocí $f_U^*: \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ definujeme morfismus snopů

$$f^*: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X \quad , \quad \varphi \mapsto f^* \varphi$$

Zopar, morfizmu shemu se může definovati kar neprekinkam $f: X \to Y$ skupa s morf. snopov $f^*: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ lokalno izdelujemo omejitev o lokalnim prstu.

---

b) Naj je $P \in Y$ tvoriti, ta $i: P \to Y$ inkluzija. Slikati $\mathcal{O}_P(P) = k$ i $\mathcal{O}_P(\emptyset) = \{0\}$.

Slikati $i_* \mathcal{O}_P$ je

$$(i_* \mathcal{O}_P)(U) \overset{def}{=} \mathcal{O}_P(i^{-1}(U)) = \begin{cases} k & \text{ako } P \in U \\ \{0\} & \text{ako } P \notin U \end{cases}$$

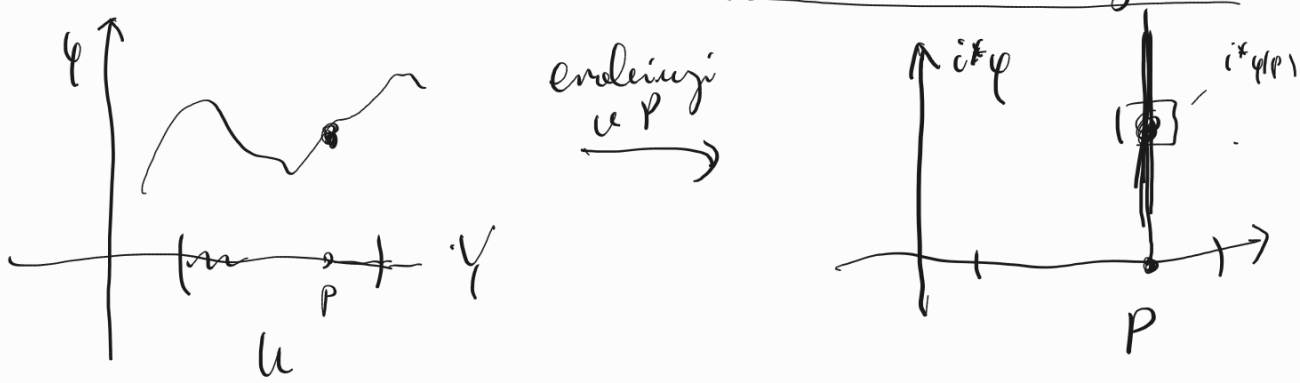
$\forall$ ako $U \subseteq Y$. Morfizem iz a) je

$$f^*: \mathcal{O}_Y \to i_* \mathcal{O}_P$$

$$\varphi \mapsto i^* \varphi$$

tako do ze reg. funkcijo φ enakim u P (ako je $P \in U$)

Slika



Pokud zobrazíme u $i_* \mathcal{O}_P$ na "funkce na Y kteří image rozebrat zcela u P".

Snop $i_* \mathcal{O}_P$ se otvorem $\supset k_P$ ("polje k koncentrovaném u P")

i zove se SNOP NEBOSER (SKYSCRAPER SHEAF)

od P na Y.

<u>Def</u> Nekoj je $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfizam snopova na shemi X. $\forall$ otv $U \subseteq X$ definiramo

$$(\operatorname{Ker} f)(U) := \operatorname{Ker}(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

Jasno je da ovo definira predsnop $\operatorname{Ker} f$ na X (s očitim restrikcijama). Može se pokazati (vidi) da je ovo snop, koji se zove JEZGRENI SNOP.

<u>Def</u> Nekoj je $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfizam snopova na shemi X. $\forall$ otv $U \subseteq X$ definiramo

$$(\operatorname{Im}' f)(U) := \operatorname{Im}(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

Kvo i prize, nikdy do ée ono bitti podsnop, ali ogrešito biti snop. Ono je SNOP FLINE.

<u>Primjer</u> Pokažemo da $\mathrm{Im}\, f$ ne mora biti snop. Neka je $i: A^1 \to A^2$, te
$x_1 \mapsto (x_1, 0)$

neka je $f := i^*: \mathcal{O}_{A^2} \to i_* \mathcal{O}_{A^1}$.

Neka je $U := A^2 \setminus \{(0,0)\}$, te $U_k := \{(x_1, x_2) : x_k \neq 0\}$ natkrivanje od U.

Slijedi $\mathcal{O}_{A^2}(U_k) = k[x_1 x_2]_{x_k}$ $(= \mathcal{O}_{A^2}(D(x_k)))$ za $k = 1, 2$

$\mathcal{O}_{A^2}(U_1 \cap U_2) = k[x_1, x_2]_{x_1 x_2}$

$\mathcal{O}_{A^2}(U) = k[x_1, x_2]$ (ovo mora biti podsnop).

Uvrstiti $i_* \mathcal{O}_{A^1}(U_1) = \mathcal{O}_{A^1}(i^{-1}(U_1)) = \mathcal{O}_{A^1}(A^1 \setminus \{0\})$

$= \mathcal{O}_{A^1}(D(x_1)) = k[x_1]_{x_1}$

$i_* \mathcal{O}_{A^1}(U_2) \overset{def}{=} \mathcal{O}_{A^2}(i^{-1}(U_2)) = \mathcal{O}_{A^2}(\emptyset) = \{0\}$

Analogno $i_* \mathcal{O}_{A^1}(U_1 \cap U_2) = \{0\}$

$i_* \mathcal{O}_{A^1}(U) = \mathcal{O}_{A^1}(i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_{A^1}(D(x_1)) = k[x_1]_{x_1}$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad (\mathrm{Im}' f)(U_1) = k[x_1]_{x_1}$$
$$-\text{"}- \ (U_2) = \{0\}$$
$$-\text{"}- \ (U_1 \cap U_2) = \{0\}$$
$$-\text{"}- \ (U) = k[x_1].$$

Oraz nie jest snop jest ze zachodzi $\frac{1}{x_1} \in (\mathrm{Im}' f)(U_1)$ i $0 \in (\mathrm{Im}' f)(U_2)$ podobnie $i^* \mathcal{O}_{A^1} = \mathcal{O}_{A^2}(f^{-1}(U_1 \cap U_2))$ $= \mathcal{O}_{A^2}(\emptyset)$ tj podobnie ze na $\emptyset$ ale ze nie ma zachodzenia ale zachodzi $\mathrm{Im}\, f'(U) \subseteq k[x_1]$.

Dalej $\mathrm{Im}' f$ nie snop.

<u>Nap.</u> Przypomnimy ze warunek dla predsnop Oraz snop: zo $\{U_i\}$ pokrywa U i $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ t.ż. $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$

$\exists!\ \varphi \in \mathcal{F}(U)$ t.ż. $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$.