Prop Neka je R prsten i $f \in R$.
Tada je $D(f) \subseteq \operatorname{Spec} R$ izomorfan afinoj shemi $\operatorname{Spec} R_f$.

Dokaz: GATHMANN 12.29.

Def SHEMA je LPP koji ima otvoreno natkrivanje afinim shemama. Morfizmi slijede iz morfizmi LPP-a.

Nap. Ono je analogon predmnogostrukosti.

Def.
Neka je X shema.

a) Neka je $U \subseteq X$ otvoren podskup. Tada je U natkriven IOP, a oni su afine sheme, pa je i U afina shema; kaže se ze zove OTVORENA PODSHEMA

b) ZATVORENA PODSHEMA od X je SHEMA Y zajedno sa morfizmom

$i: Y \to X$ t.d. X ima otvorenu naslovnicu $\{U_k : k \in I\}$ za koje je $\forall U_k$ s restrikcijom $i|_{i^{-1}(U_k)} : i^{-1}(U_k) \to U_k$ afino podskem od X.

Sljedeća Propozicija daje vezu (PRED) MNOGOSTRUKOST i SHEMA

<u>Propozicija</u> (GATHMANN 12.33)

a) $\forall$ pred-MN X nad alg. zat. poljem k, skup X_{sh} $\forall$ otvorenih podskupova od X je shema. X_{sh} se zove SHEMA PRIDRUŽENA X.

b) Otwarte podzbiory od X odpowiadają otwartym podzbiorom $X_{\geq n}$, tzn

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X_{\geq n}}(U) \quad \forall \text{ otwartych } U \subseteq X.$$

c) Każdy morfizm $X \to Y$ prod-PN indukuje morfizm $X_{\geq n} \to Y_{\geq n}$ odpowiadający zbiorowi ($U \subseteq X$ są żaby i $V \subseteq Y$ tzn że nowym hom. $\mathcal{O}_Y$-algebr $A(V) \to A(U)$ homomorfizm pierścieni).

Kogo zbiorowi (nie) postępuje na ową rocznicę?

<u>Def</u> 0) Nechť je Y schéma.

Schéma nad Y je schéma X zkupně s morfismem $f: X \to Y$.

Morfismem schémat $f_1: X_1 \to Y$ i $f_2: X_2 \to Y$ je morfismus $f: X_1 \to X_2$ schémat t.ž. je $f_1 = f_2 \circ f$ tj

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

komutuje.

Nebude se hodit za schéma nad $Y = \operatorname{Spec} S$ dát je schéma nad S. Ale je u tom zkrácení již i $X = \operatorname{Spec} R$ afinní schéma tvaru to značí dát nám je dán hom. prstenu $S \to R$,

tj R je S-algebra.

b) Shema $f: X \to Y$ nad Y je KONAČNOG TIPA nad Y ako postoji otvoreni pokrivač od Y s afinim shemama $U_i = \operatorname{Spec} S_i$ t.d. $f^{-1}(U_i)$ imo <u>KONAČNO</u> otvoreni pokrivač afinim shemama $\operatorname{Spec} R_{i,j}$ gdje je svaki $R_{i,j}$ kon. gen. S_i-algebra.

c) SHEMA X je REDUCIRANA ako $\forall$ otvoreni $U \subseteq X$ prsten $\mathcal{O}_X(U)$ nema nilpotentnih elemenata.

Nap. Za pole k, vezmeme $\operatorname{Spec} k = \{\langle 0 \rangle\}$.

Pokud schema X nad k je (triviálně) prehilbertovo

$$f : X \to \operatorname{Spec} k.$$

Povlečení $f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k) \to \mathcal{O}_X(X)$

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k) \overset{\text{Prop}}{=} k$$

potom $\mathcal{O}_X(X)$ je k-algebra.

Pokud X je konečný typu nad k ale je nothner afinním schematem $\operatorname{Spec} R$, pak je R: kon. gen. k-algebra.

Jakvetter tedy X je redukovaný $\Leftrightarrow$ ona k-algebra R je redukovaná.

Dobri napravili analogon zapravnotri (za MN) treba definirati produkt:

<u>Def</u> Neka su $f_1 : X_1 \to Y$ i $f_2 : X_2 \to Y$ sheme nad Y.

VLAKNASTI PRODUKT od X_1 i X_2 nad Y je shema P s morfizmima $\pi_1 : P \to X$ i $\pi_2 : P \to X_2$ t.d. (*) komutira i vrijedi univerzalno svojstvo: $\forall$ 2 morfizma $g_1 : Z \to X_1$ i $g_2 : Z \to X_2$ iz neke sheme Z $\exists!$ morfizam $g : Z \to P$ t.d. (*) komutira. Označava je

$$P = X_1 \times_Y X_2 .$$

(*)

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "g_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& X_2 \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Ako su $Y = \operatorname{Spec} S$ i $X_1 = \operatorname{Spec} R_1$, $X_2 = \operatorname{Spec} R_2$

tada je $P = \operatorname{Spec}(R_1 \otimes_S R_2)$

Može se pokazati da FIBER PRODUKT postoji.

Def a) Neka su $i_1 : X_1 \to Y$ i $i_2 : X_2 \to Y$ zatvorene podskheme od Y. Tada se njihov PRESJEK $X_1 \cap X_2$ definira kao $X_1 \times_Y X_2$.

b) Shema X nad Y je SEPARIRANA NAD Y ako je slika dijagonalnog morfizma $X \to X \times_Y X$ zatvorena.

Prop. Za alg. zat. polje k $\exists$ bijekcija

$$\{\text{MN nad } k\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{reponirane, reducirane sheme} \\ \text{kon. tipa nad } k\end{array}\right\}$$

$$X \longmapsto X_{zn}$$

Od sada na dalje MN možemo smatrati reponiranim, reduciranim shemom kon. tipa nad alg. zat. poljem k. Točke na MN = zat. točke.

Morfizmi MN = morfizmi nad k.

Primjer a) Iz ovoga konstruiramo inaku

$\mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots x_n]$ za k AZP.

b) Promatramo dvije kompleksne konjugacije

$$\varphi : \mathbb{C}[x_1, \dots x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$
$$f \longmapsto \overline{f}$$

homomorfizam ali ne i $\mathbb{C}$-algebri jer

$\overline{\alpha x + \beta y} \neq \alpha \overline{x} + \beta \overline{y}$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}[x_1, \dots x_n]$.

pa je izomorfizam shema, ali nije izom. shema nad $\mathbb{C}$.