GLATKE MNOGOSTRUKOSTI

Prometnuli smo do sada ZT uglavnom na ireducibilnim MN V

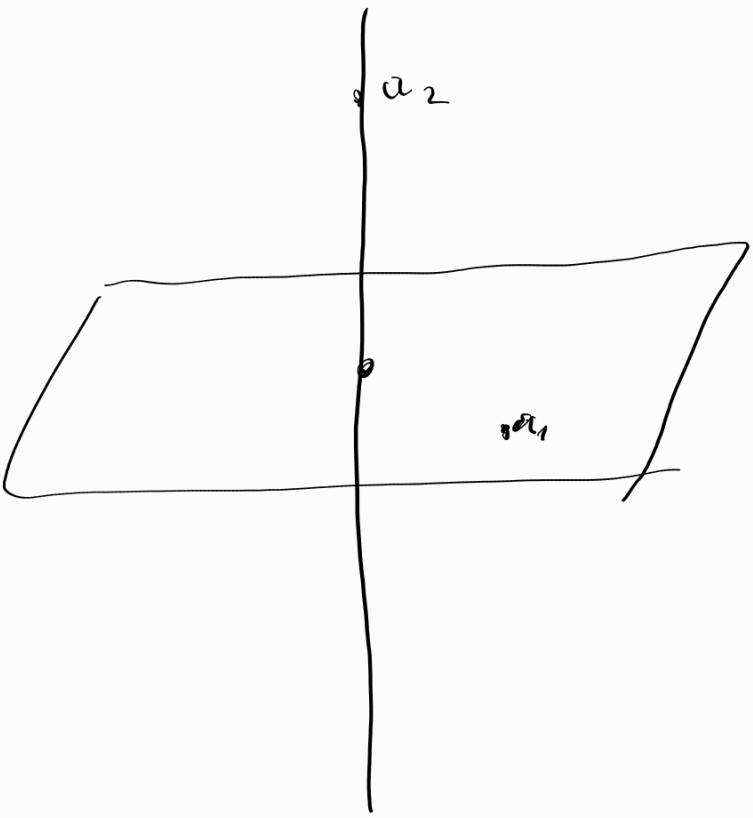
Promotrimo sada $X = V(x_1x_3, x_2x_3) \subseteq \mathbb{A}^3$.

On je reducibilan $X = X_1 \cup X_2$, gdje je

$X_1 = V(x_3)$, $X_2 = V(x_1, x_2)$.

$\dim X = \max\{\dim X_1, \dim X_2\} = \max\{1, 2\}$.

Definiramo LOKALNU DIMENZIJU u $a \in X$ kao $\operatorname{codim}_X\{a\}$. Sjetimo se da to je najduži niz neprazних ireducibilних podskupova $\{a\} \subseteq Y_0 \subsetneq Y_1 \ldots \subsetneq Y_n$.



$\operatorname{codim}_X\{a_1\} = 2$

$\operatorname{codim}_X\{a_2\} = 1$

Prop. Neka je $a \in X$. Tada je $\dim C_a X = \operatorname{codim}_X\{a\}$

Dokaz: GATHMANN 9.24.

Def Neka je $a \in X$, X je MN. Izaberimo afine koordinate t.d. je a u njima, BSOMP $a \in X \subseteq \mathbb{A}^n$, te linearnom promjenom varijabli BSOMP $a = 0$. Dakle $\forall f \in I(X)$ nema konstantne komp. Tada je $T_a X := V(f_1 : f \in I(X)) \subseteq \mathbb{A}^n$ ze zove TANGENCIJALNI PROSTOR od X u a.

Omijaję $f_1 \in k[x_1 \dots x_n]$ wszystkie liniowe składowe.

Rozliczo izmetu konusa i tangencjalny potrzebuję g do ze układu usuwają składni wyższego stopnia, a ze tangencjalnego zowo liniowe.

Nap. a) Ze względu od tangencjalnego konusa, ze tangencjalnym punktem jest dokładnie wszystkie liniowe składowe drugiego generatora od $V(X)$.

Pokażemo to: Ako su $f, g \in S$, te $f_1(x) = 0 = g_1(x)$

$\Rightarrow (f+g)_1(x) = f_1(x) + g_1(x) = 0$.

i $(hf)_1 = h(0) f_1(x) + f(0) h_1(x) = h(0) \cdot 0 + 0 \cdot h_1(x)$
$= 0$.

Dakle $\forall f' \in I(X)$ vrijedi $f'_1(x) = 0 \Rightarrow x \in T_a X$.

b) Ze względu od tangencjalnych konusa (VJ).

Víme, že do vznamu nedělitelné ideály tvoří generovaní X, a ze toho tvoří ideál tvoří generovaní X, např. (x) i (x^2) mají generovaní idealu na $\{0\} \subseteq A^1$, dok je zbyt nulterodo. Tvorenik tělesovou $=\{0\}$ u 1. zbiegu, a A^1 u 2. tvoří.

c) Ze polynomu $f \in I(X)$ t.ž. $f(0)=0$, linearní člen je ovšem početoni (monom nejnižšího stupně).

$\Rightarrow C_a X \subseteq T_a X$ s Pr prop nyeli

$$\dim T_a X \geq \operatorname{cudim}_X \{a\}.$$

<u>Příklad</u>. Prozkoumejme X_1, X_2, X_3 od příklad. Pr: $C_0 X$ nemusí do vzoru početne člene, a $T_0 X$ lineární.

$X_1 = V(x_2 + x_1^2)$: $C_0 X_1 = T_0 X_1 = V(x_2)$

$X_2 = V(x_2^2 - x_1^2 - x_1^3)$: $C_0 X_2 = V(x_2^2 - x_1^2)$, $T_0 X_2 = A^2$

$X_3 = V(x_2^2 - x_1^3)$: $C_0 X_3 = V(x_2^2) = V(x_2)$, $T_0 X_3 = A^2$

Iskoristimo sada rezultat koji nam kaže da definicija T_aX ne ovisi o izboru afinih koordinata.

Lema (GATHMANN 10.4 i 10.5) Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ t.d. $0 = a \in X$, tada je $T_aX \cong \left(I_a / I_a^2\right)^*$,

gdje je I_a (jedinstveni) max. ideal u $\mathcal{O}_{X,a}$, a $*$ označava dualni V.P.

Iz leme slijedi da je T_aX neovisan o izboru koordinata.

<u>Nap.</u> Često se T_aX i definira kao $\left(I_a / I_a^2\right)^*$.

<u>Def</u> Neka je X mnogostrukost. Točka $a \in X$ je REGULARNA / GLATKA / NE-SINGULARNA ako je $T_aX = C_aX$. U suprotnom je to SINGULARNA TOČKA od X. Ako X ima singularnu točku, tada je X SINGULARNA. Inače je REGULARNA / GLATKA / NE-SINGULARNA.

Příklad X_1 je gladka, X_2 i X_3 su singularne.

Lema Neka je X mnogostrukost. Tada je ekvivalentno:

a) Tačka a je gladka.

b) $\dim T_a X = \operatorname{codim}_X \{a\}$

c) $\dim T_a X \leq \operatorname{codim}_X \{0\}$.

Dokaz $\boxed{a \Rightarrow b}$ Pošto je a gladka, slijedi $T_a X = C_a X$, a $\dim C_a X = \operatorname{codim}_X \{a\}$ po Prop.

$\boxed{b \Rightarrow a}$ Kako $C_a X \subseteq T_a X$. Po pretp. i b) prop. slijedi $\dim C_a X \overset{prop}{=} \operatorname{codim}_X \{a\} = \dim T_a X$ pa je $C_a X = T_a X$ pa je a gladka.

$\boxed{b \Leftrightarrow c}$ slijedi iz napomene c) ($\dim T_a X \geq \operatorname{codim}_X \{a\}$) cijeli.

Nap. Kako provjeriti gladkost algebarski?

Neka je I_a max. ideal u $\mathcal{O}_{X,a}$. Po prošloj lemi a je gladak $\Leftrightarrow$ $\dim\left(I_a / I_a^2\right) = \operatorname{codim}_X \{a\}$ tj. lokalni dim u $\{a\}$.

Ono je algebarski najbolji prsten $\mathcal{O}_{X,a}$. Prsten koji odgovara ovo najbolje se zove REGULARNI LOKALNI PRSTEN – otuda naziv regularna tačka.

<u>Nap.</u> Rezultat iz kom. algebre kaže da je regularni lokalni prsten integralna domena. Geometrijski to znači da je MN LOKALNO IREDUCIBILNA u svakoj glatkoj tački a, tj. leži na samo 1 irred. komponenti. Eliminalitno, tačka na X u kojoj se sastaje 2 irred. komponente je singularna.

Nap. Obrat ne važi!

A pokazuje se može i lako provjeriti s pomoćnim derivacijama.

<u>Prop.</u> (Jacobijev kriterij) Neka je $a \in X$ tačka na afinoj MN $X \subseteq \mathbb{A}^n$ i neka je $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Tada je X glatka u a $\iff$ rang Jacobijeve matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \quad (i,j \geq) \text{ jednak } n - \dim_a \{a\}.$$

Nap. $\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$ je formalno parcijalna derivacija.

Dokaz GATHMANN 10.11.

Primjer Neka je $V(f) = X \subseteq \mathbb{A}^2$, tj. X je ravninska krivulja zadana s $I(X) = (f)$.

Po Jacobijevom kriteriju a je glatka točka na $X \iff$ matrica $A = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}\right)$ u a ima

rang $= 2 - \dim_X\{a\} = 2 - 1 = 1$.

Primjer Neka je $X_3 = V(\overbrace{x_2^2 - x_1^3}^{=:f})$ kao i prije. Jacobijeva matrica

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \quad \frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \left(-3x_1^2 \quad 2x_2\right) \text{ ima}$$

rang $= 1 \iff (x_1, x_2) \neq (0,0)$

Dakle pokazali smo i da su sve točke glatke.

Promotrimo zato napuhnuti $\tilde{X}_3$ u X_3 u singularnoj točki O još jedan.

Pokazali smo da je izvrnuti skup $\pi^{-1}(\{0\})$ sastoji od 1 točke $a \in \tilde{X}_3$.

<u>T:</u> a je glatka na $\tilde{X}_3$

Vidjeli smo da je u koordinatama $((x_1, x_2), (y_1 : y_2))$ od $\tilde{X}_3 \subseteq \widetilde{\mathbb{A}^2} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$

$a = ((0,0), (1:0))$. Promatramo afinu okolinu

okolinu $U_1 = \{((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) : y_1 \neq 0\}$

Tada je $\tilde{X}_3$ (ako i prsti prst zadan sam u koordinatama x_1 i y_2. $(y_1 = 1,\ x_2 = x_1 y_2)$)

je $\underline{x_1 y_2 = x_2 y_1 = x_2}$.

$\tilde{X}_3$ je zadan u ovom koordinatnom $\supset$ na $\tilde{X}_3 \setminus \pi^{-1}(0)$

$\underbrace{(x_1 y_2)^2 - x_1^3}_{g_0} = 0$. Pošto je $\{a\} = \pi^{-1}(0)$

$\Rightarrow$ možemo pokrenuti $\supset x_1^2$.

$\Rightarrow \tilde{X}_3 \setminus \pi^{-1}(0)$ je zvorem $\Rightarrow \underbrace{y_2^2 - x_1}_{=:g} = 0$.

$\Rightarrow \tilde{X}_3$ je hladka zvorna $\Rightarrow$ ovom gdovlzim.

Primjedba: općenito A^n možemo eksplodirati u

$$A^n \longrightarrow \tilde{A}^n \subset A^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

(napuhnemo u 0)

$$(x_1, y_2 \dots y_n) \longmapsto ((x_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n), (1 : y_2 : \dots : y_n))$$

Neka je $X \subseteq A^n$ koji sadrži 0.

U ovim af. koordinatama je $\tilde{X}$ zadan

kao skup nultočaka od $\boxed{\dfrac{f(x_1, x_1 y_2, \dots, x_1 y_n)}{x_1^{\min \deg f}}}$

za sve $f \in I(X)$ i gdje $\min \deg f$ označava najmanji stupanj monoma od f.

Sada je Jacobijeva matrica zadana s

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y_2 \end{pmatrix}$$, a ovo ima rang 1 uvijek.

$\Rightarrow \tilde{X}_3$ je glatka.