Teorija polja klasa i teorija kompleksnog množenja

1. zadaća, 14.12.2017.

1. Dokažite da je $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ ciklička grupa.
2. Odredite i obrazložite koje od ovih tvrdnji su istinte:
   - $\mathbb{Q}_7(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}_7$.
   - $\mathbb{Q}_7(\zeta_5) = \mathbb{Q}_7$
   - $\mathbb{Q}_7(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}_7(\sqrt{5})$.
3. Dokažite sljedeće tvrdnje u p-adskoj metrici (induciranom p-adskom normom) u $\mathbb{Q}_p$:
   - Svi trokuti su jednakokračni.
   - Svaka točka kruga $B(a, r) := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a| \leq r\}$ je središte tog kruga. Svaka dva kruga su ili disjunktna ili jedan sadži drugi.
4. Neka je L/K konačno proširenje polja algebarskih brojeva, $\mathfrak{P}$ prost ideal u $\mathcal{O}_L$ nad prostim idealom $\mathfrak{p}$ iz $\mathcal{O}_K$. Dokažite da je $I(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = I(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$.
5.
   - Odredite sva proširenja od $\mathbb{Q}_5$ stupnja 3.
   - Odredite sva nerazgranata proširenja od $\mathbb{Q}_5$ s poljima ostataka $\mathbb{F}_5$ i $\mathbb{F}_{25}$.

Zadaću treba predati do 10.1.2018.