6. predavanje.

- proširenja od $\mathbb{Q}_p$.
- Galoisove reprezentacije

L/K Galoisovo proširenje PAB

$\mathfrak{p}$ prost ideal u K, $\mathfrak{p} O_L = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r)^e$

$Gal(L/K) \curvearrowright \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$ tranzitivno $\iff$ $\forall i,j\ \exists \sigma \in Gal(L/K)$ t.d. $\sigma(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_j$

$$\Rightarrow D(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) = \sigma^{-1} D(\mathfrak{p}_j/\mathfrak{p})\, \sigma \Rightarrow \text{sve } D(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})$$

su konjugirane u $Gal(L/K)$.

$$Gal(L/K) \geq D(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) \trianglerighteq I(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccll}
 & L & (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r)^e & \\
e & | & & \\
 & L^{I(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})} & (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r) & f = f \\
f & | & & \\
 & L^{D(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})} & (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r) & f = 1 \\
r & | & & \\
 & K & \mathfrak{p} &
\end{array}$$

PROŠIRENJA OD $\mathbb{Q}_p$ (AG)

Def Neka je $K/\mathbb{Q}_p$ konačno. Definiramo PRSTEN CIJELIH O_K kao integralno zatvorenje od $\mathbb{Z}_p$ u K.

Prop Neka je $K/\mathbb{Q}_p$ konačno. Tada $\exists!$ ne-arhimedska AV na K koja proširuje AV na $\mathbb{Q}_p$.

$p O_K = \boxed{\mathfrak{p}}^e \qquad ef = [K:\mathbb{Q}]$

Označimo je $|\cdot|_p$.

Prop Neka je $K/\mathbb{Q}_p$ konačno. Tada je $O_K = \{x \in K : |x|_p \leq 1\}$.

Prop. O_K ima ! max ideal $M = \{x \in K : |x|_p < 1\}$.

Neka je L/K proširenje, konačno, gdje su i L i K konačna proširenja od $\mathbb{Q}_p$, Galoisovo.

konačna polja

$$\exists \text{ hom } f : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \boxed{\mathrm{Gal}\left((\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}) / (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \right)}.$$

max ideal u L max ideal u K

<u>SURJEKCIJA</u> (Prop 28, AG).

<u>Def.</u> INERCIJSKA PODGRUPA $I(L/K)$ od $\mathrm{Gal}(L/K)$ je <u>jezgra od f</u>.

$$I(L/K) = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \bmod \mathfrak{P} \ \forall \alpha \in \mathcal{O}_L \}.$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{Gal}(L/K) / I(L/K) \simeq \mathrm{Gal}\left((\mathcal{O}_L/\mathfrak{P}) / (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}) \right)}.$$

<u>Def</u> Kažem da je L/K NERAZGRANATO ako je $I(L/K) = \{id\}$.

Kažem da je -"- POTPUNO RAZGRANATO -"- $I(L/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$

<u>TM</u> $\exists!$ NERAZGRANATO PROŠIRENJE (LOK. POLJA K (kon. proš. od $\mathbb{Q}_p$) s poljem ostataka k ($k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$)) L/K t.d. ima polje ostataka ℓ gdje je ℓ/k proširenje p (konačnih polja).

$\Leftrightarrow \exists!$ NERAZG. proširenje stupnja n $\forall n \in \mathbb{N}$.

L

e |) POTPUNO RAZGRANATO

$L^{I(L/K)}$

f |) POTPUNO NERAZGRANATO

K

Želimo vezu PROŠ ~~[illegible]~~ L/K PAB i proširenja lokalnih polja.

K – neka je PAB i $\mathfrak{p}$ ~~[illegible]~~ idem max ideal u O_K.

Analogno kao $\mathbb{Q}_p$ možemo konstruirati $K_{\mathfrak{p}}$:

$$O_{K,\mathfrak{p}} := \varprojlim (O_K/\mathfrak{p}^n), \quad K_{\mathfrak{p}} = \text{polje razlomaka od } O_{K,\mathfrak{p}}.$$

<u>Def</u> Neka je $\mathfrak{p}$ ~~[illegible]~~ $\exists!$ max ideal u $O_{K,\mathfrak{p}}$. Generator od $\mathfrak{p} = (\pi)$ se zove <u>UNIFORMIZATOR</u>.

Neka je L/K Galoisovo proširenje PAB, <u>$\mathfrak{p}$ ideal</u> u O_K, $\mathfrak{P}$ ideal u O_L nad $\mathfrak{p}$. $\exists$ ulaganje <u>$O_{K,\mathfrak{p}} \longrightarrow O_{L,\mathfrak{P}}$</u> $\Rightarrow$ $\exists$ ulaganje $K_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow L_{\mathfrak{P}}$

$\Rightarrow$ $K_{\mathfrak{p}}$ i $L_{\mathfrak{P}}$ su ~~[illegible]~~ (konačna) proširenja od $\mathbb{Q}_p$.

Vrijedi da je ~~Gal~~ $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ Galoisovo, $Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \cong D(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. AG, str 22.

$I(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) = ?$

$Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) / I(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$ $\quad D(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$

$\cong Gal\big((O_L/\mathfrak{P}) / (O_K/\mathfrak{p})\big)$

GALOISOVE REPREZENTACIJE

SAMUEL ~~MARKS~~ MARKS — GALOIS REPRESENTATIONS

INVERZNI LIMESI $\qquad (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) \leq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \quad \forall n \geq k.$

Def Neka je I skup s parcijalnim uređajem $\leq$. INVERZNI SISTEM indeksiran s I je ~~skup~~ kolekcija objekata (skupova / grupa / prstena) $(A_i)_{i\in I}$ skupa s preslikavanjima među objektima

$$\varphi_{ij} : A_i \to A_j \quad \forall j \leq i$$

t.d. $\varphi_{ii} = id_{A_i}$ $\forall i \in I$ i $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ $\forall k \leq j \leq i$

Preslikavanja φ_{ij} se zovu TRANZICIJSKA PRESLIKAVANJA.

Def INVERZNI LIMES je par $((A_i)_{i\in I}, \{\varphi_{ij}\})$ je skup / grupa / prsten

$$\varprojlim_i A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i : \varphi_{ij}(a_i) = a_j \ \forall j \leq i \right\}.$$

Primjer $\boxed{\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ $\qquad (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \leq$ = dijeli

Za $j \mid i$

$$\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } j} \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$$

$$\boxed{\varphi_{ij} = \text{redukcija mod } j}$$

$$\boxed{\text{DZ} \quad \hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p}$$

L/K ~~prirodnjo polje~~ Galoisovo proširenje polja.

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \varprojlim_{K \subseteq F \subseteq L} \mathrm{Gal}(F/K)$$

F konačno proširenje od L

$\mathcal{F} = \{ F : K \subseteq F \subseteq L,\ F/K \text{ Galoisovo} \}$

$F_1 \le F_2 \iff F_1 \subseteq F_2$

$\mathrm{Gal}(F_2/K) \to \mathrm{Gal}(F_1/K)$

$\varphi_{F_2 F_1} : \sigma \longmapsto \sigma|_{F_1}$

$$\Rightarrow G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{K/\mathbb{Q} \text{ konačno}} (\overline{\mathbb{Q}}/K)$$

Topologija $\mathrm{Gal}(F/K)$ F/K konačno – DISKRETNA TOPOLOGIJA

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim \underbrace{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)}_{DT}$$

$\Rightarrow$ KRULLOVA TOPOLOGIJA NA $G_{\mathbb{Q}}$.

Prop Neka je L/K Galoisovo.

(1) $\mathrm{Gal}(L/K)$ je kompaktna

(2) $\forall$ Galoisovo netrivijalno $K \subseteq M \subseteq L$. $\sigma : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(M/K)$

je surjektivno, neprekidno s jezgrom $\mathrm{Gal}(L/M)$.

(3) $\forall$ konačno Galoisovo netrivijalno $K \subseteq M \subseteq L$

$\mathrm{Gal}(L/M)$ je NORMALNA, OTVORENA i ZATVORENA.

TM Neka je L/K Galoisovo proširenje s Galoisovom grupom $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Tada postoji bijekcija koja obrće inkluziju:

$$\{\text{zatvorene podgrupe } H \leq G\} \longleftrightarrow \{\text{međuproširenja } L/M/K\}$$

$$\begin{aligned} H &\longmapsto L^H \\ \mathrm{Aut}(L/M) &\longleftarrow M \end{aligned}$$

koji se može restringirati na

$$\{\text{NORMALNE ZATVORENE PODGRUPE}\} \longleftrightarrow \{\text{Galoisova međuproširenja } L/M/K\}$$

$$\{\text{OTVORENE PODGRUPE}\} \longleftrightarrow \{\text{konačna međuproširenja } L/M/K\}$$

~~[illegible]~~ ℓ-adska reprezentacija.

REPREZENTACIJE OD $G_{\mathbb{Q}}$

$G_{\mathbb{Q}}$ ima (KRULLOVU) TOPOLOGIJU.

OTVORENE SKUPOVI $= \{ Gal(\bar{\mathbb{Q}}/M),$ gdje $M/\mathbb{Q}$ konačan $\}$

$= \{$ podgrupe konačnog indeksa $\}$

$\Rightarrow$ $G_{\mathbb{Q}}$ je TOPOLOŠKA GRUPA

- topološki prostor, koji je grupa, ~~operacije~~ grupovna operacija i invertiranje su neprekidni.

$\mathbb{C}$ i $\mathbb{Q}_\ell$ i ~~svako~~ proširenja od $\mathbb{Q}_\ell$ su topološka polja.

$\Rightarrow GL_n(K)$ za $K = \mathbb{C}$ ili $\mathbb{Q}_\ell$ je topološka grupa.

Def GALOISOVA REPREZENTACIJA dimenzije n nad (topološkim) poljem F je NEPREKIDNI HOMOMORFIZAM GRUPA

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_n(F).$$

~~Def~~ Ako je F proširenje od $\mathbb{Q}_\ell$, kažemo da je ρ ℓ-ADSKA ~~REPREZENTACIJA~~ GALOISOVA REPREZENTACIJA.

PRIMJER ℓ-adski ciklotomski karakter

$\mu_n := \{ \zeta \in \mathbb{C}$ t.d. $\zeta^n = 1 \}$.

$$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

$$\sigma_a \mapsto a$$

$$\sigma_a(\zeta_n) = \zeta_n^a$$

ℓ prost broj

$$\mu_{\ell^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{\ell^n}$$

$$Gal(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \simeq \varprojlim_{n \geq 1} Gal(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^n})/\mathbb{Q})$$

$$\simeq \varprojlim_n (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}_\ell^\times$$

$$\chi : Gal(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_\ell^\times \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times = GL_1(\mathbb{Q}_\ell)$$