

6. proširenje.

- proširenje od \mathbb{Q}_p .
- Galoisove reprezentacije

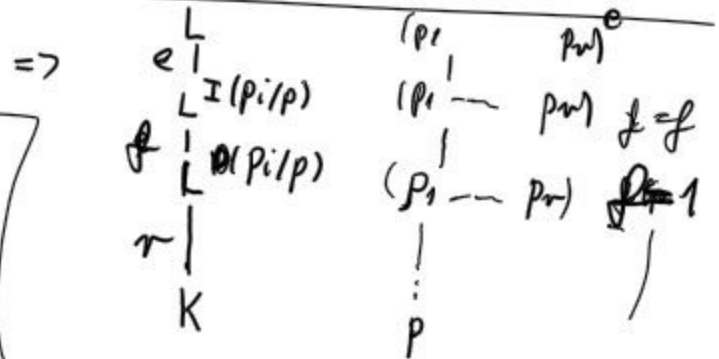
L/K Galoisovo proširenje $P \neq B$

P prim ideal u K , $P \mathcal{O}_L = (p_1 \dots p_r)^e$

$\text{Gal}(L/K) \ni \{p_1, \dots, p_r\}$ transitive $\Leftrightarrow \exists i \neq j, \exists \sigma \in \text{Gal}(L/K)$
 t.d. $\sigma(p_i) = p_j$

$\Rightarrow D(p_i/p) = \sigma^{-1} \underbrace{D(p_j/p)}_{\text{u } \mathbb{Z}_p} \sigma \Rightarrow \text{ne } D(p_i/p) \text{ u } \mathbb{Z}_p \text{ u } \text{Gal}(L/K).$

$\text{Gal}(L/K) \geq D(p_i/p) \cong I(p_i/p)$



PROŠIRENJA OD \mathbb{Q}_p (AG)

Def Neka je K/\mathbb{Q}_p , ~~zadano~~ \mathbb{Z}_p ~~homom.~~ homom.

Definirano PRSTEN SIJELIH \mathcal{O}_K kao integralno zatvaranje od \mathbb{Z}_p u K .

Prop Neka je K/\mathbb{Q}_p homom. Tada $\exists!$ ne-archimedsko AV na K koje proširuje AV na \mathbb{Q}_p .

$P \mathcal{O}_K = \mathfrak{p}$ ef = $[K:\mathbb{Q}_p]$

Označeno je $| \cdot |_p$.

Prop Neka je K/\mathbb{Q}_p homom. Tada je $\mathcal{O}_K = \{x \in K : |x|_p \leq 1\}$.

Prop. \mathcal{O}_K ima 1 max ideal $M = \{x \in K : |x|_p < 1\}$.

~~Gal(L/K) ...~~

Neka je L/K proširenje, konačno, gdje su i L i K konačno proširenja od \mathbb{Q}_p , Galoisova. ^{končno polje}

$$\exists \text{ hom } f: \text{Gal}(L/K) \longrightarrow \text{Gal} \left(\begin{array}{c} \textcircled{\mathbb{O}_L/p} \\ \text{---} \\ \textcircled{\mathbb{O}_K/p} \end{array} \right)$$

$\xrightarrow{\text{SURJEKCIJA (Prop 28, AG)}}$
 $\text{naslikat u } L$
 $\text{naslikat u } K$

Def. INERCIJSKA PODGRUPA $I(L/K)$ od $\text{Gal}(L/K)$ je jezyk od f.

$$I(L/K) = \{ \sigma \in \text{Gal}(L/K) \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{p} \forall \alpha \in \mathbb{O}_L \}$$

$$\Rightarrow \text{Gal}(L/K) / I(L/K) \cong \text{Gal} \left(\begin{array}{c} \textcircled{\mathbb{O}_L/p} \\ \text{---} \\ \textcircled{\mathbb{O}_K/p} \end{array} \right)$$

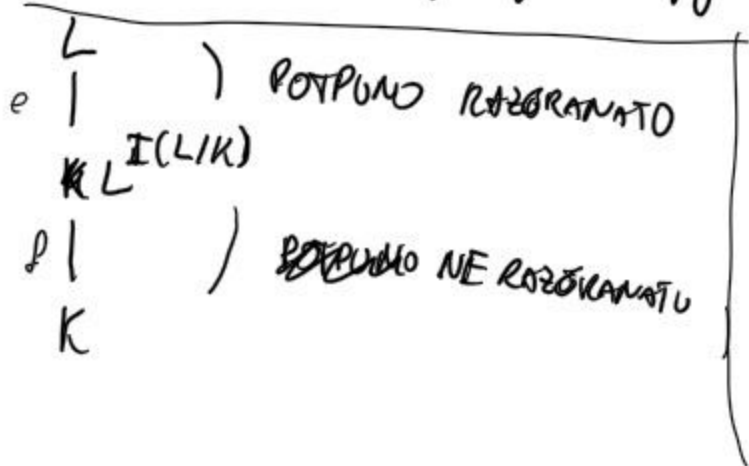
Def kažemo da je L/K NERAZGRANATO ako je $I(L/K) = \{ \text{id} \}$.

kažemo da je L POTPUNO RAZGRANATO nad K ako je $I(L/K) = \text{Gal}(L/K)$.

TM Neka $\exists!$ NERAZGRANATO PROŠIRENJE L/K (kon. polje) K (kon. polje od \mathbb{Q}_p)

\Rightarrow polje ostataka $k = \mathbb{O}_K/p$ L/K t.d. ima polje ostataka ℓ gdje je ℓ/k proširenje p (kon. polje).

$\Leftrightarrow \exists!$ NERAZGRANATO proširenje L/K i $\forall n \in \mathbb{N}$.



Želimo reći: Proći ~~L/K~~ L/K PAB i proširajući lokalno polje.

K - nešto je PAB i \mathfrak{p} ~~proći~~ ideal nos ideal u \mathcal{O}_K .

Analiziramo kako $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ možemo komparirati $K_{\mathfrak{p}}$:

$$\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}} := \varprojlim (\mathcal{O}_K / \mathfrak{p}^n), \quad K_{\mathfrak{p}} = \text{polje razlomaka od } \mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}.$$

Def Nešto je \mathfrak{p} ~~proći~~! max ideal u $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}}$. Generatore od $\mathfrak{p} = (\pi)$
 Za zone UNIFORMIZATOR.

Nešto je L/K Galoisov proširenje PAB, \mathfrak{p} ideal u \mathcal{O}_K , \mathfrak{p} ideal u \mathcal{O}_L
 nad \mathfrak{p} . \exists ulaganje $\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{L, \mathfrak{p}} \Rightarrow \exists$ ulaganje $K_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow L_{\mathfrak{p}}$

$\Rightarrow K_{\mathfrak{p}}$ i $L_{\mathfrak{p}}$ su prošire (kružno) proširenje od $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. (V)

Vrijedi da je Gal $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ Galoisova. $\text{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) \cong D(\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$

AG, str 22.

$\mathbb{F}(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) = ?$

$$\text{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}})$$

$$\cong \text{Gal}(\mathcal{O}_{L, \mathfrak{p}}/\mathcal{O}_{K, \mathfrak{p}})$$

GALOISVE REPRESENTASJE

SAMUEL MARSH MARKS - GALOIS REPRESENTATIONS

INVERZNI LIMESI

$$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) \leq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \quad \forall n \geq k.$$

Def Neka je I skup s poradbenim uredjenjem \leq .

INVERZNI SISTEM imenima $\circ I$ je skup konkratnih ojektiva (zeta/ova / grupa / prostora) $(A_i)_{i \in I}$ skup s poradbenim uredjenjem \leq ojektiva

$$\varphi_{ij} : A_i \rightarrow A_j \quad \forall j \leq i$$

$$\text{t.j. } \varphi_{ii} = \text{id}_{A_i} \quad \forall i \in I \quad \text{ i } \quad \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik} \quad \forall k \leq j \leq i.$$

Preobrazbe φ_{ij} se zove TRANZICIJSKA PRESLIKAVANJA.

Def INVERZNI LIMES je par $((A_i)_{i \in I}, \{\varphi_{ij}\})$ je \leq skup / grupa / prostora

$$\varprojlim_i A_i = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i : \varphi_{ij}(a_i) = a_j \quad \forall j \leq i \right\}.$$

Primer

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}} \leq = \text{dijela}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } j} \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$$

$$\varphi_{ij} = \text{redukcija mod } j$$

$$\mathbb{0} \leq \hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p \text{ p.p.}} \mathbb{Z}_p$$

L/K ~~primitivni polji~~ Galoisova proširivanja polja.

$$\text{Gal}(L/K) = \varprojlim_{K \subseteq F \subseteq L} \text{Gal}(F/K)$$

F proširivanje polja od L

$$I = \left\{ F : \begin{array}{l} K \subseteq F \subseteq L \\ F/K \text{ Galoisova} \\ F_1 \subseteq F_2 \\ \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Gal}(G_{\mathbb{Q}}) := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{K \subseteq \mathbb{Q} \text{ aritmet.}} (\overline{\mathbb{Q}}/K)$$

$$\text{Gal}(F_2/K) \rightarrow \text{Gal}(F_1/K)$$

$$\varphi_{F_2/F_1}: G \rightarrow G|_{F_1}$$

Topologija $\text{Gal}(F/K)$ F/K aritmetična - DISKRETNA TOPOLOGIJA

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \varprojlim_{DT} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$$

\Rightarrow KRULLOVA TOPOLOGIJA NA $G_{\mathbb{Q}}$.

Prop Neka je L/K Galoisova.

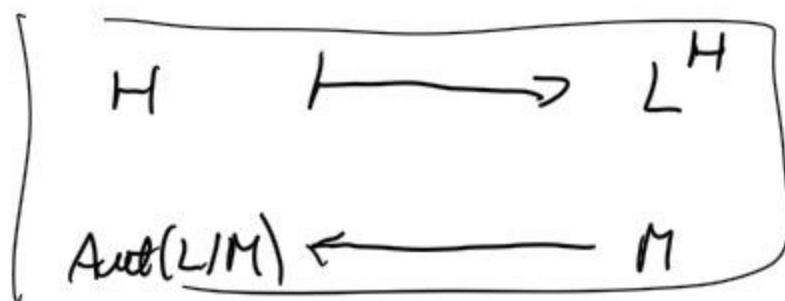
- (1) $\text{Gal}(L/K)$ je kompaktna
- (2) \forall Galoisova proširivanja $K \subseteq M \subseteq L$, $G: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K)$

je surjektivna, neprekidna \Rightarrow jezgla $\text{Gal}(L/M)$.

- (3) \forall proširivanje Galoisova proširivanja $K \subseteq M \subseteq L$
 $\text{Gal}(L/M)$ je NORMALNA, OTVORENA i ZATVORENA.

TM Neki je L/K Galoisova proširenja \supset Galoisova
 grupa $G = \text{Gal}(L/K)$. Tada postoji bijekcija
 odredjena relacijom:

$$\{ \text{zatrane podgrupe } H \leq G \} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{medijerirana} \\ L/M/K \end{array} \right\}$$



koji se može restrikovati na

$$\{ \text{NORMALNE ZATVARENE PODGRUPE} \} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Galoisova proširenja} \\ L/M/K \end{array} \right\}$$

$$\{ \text{OTVARENE PODGRUPE} \} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Arhimedova medijerirana} \\ L/M/K \end{array} \right\}$$

REPREZENTACIJE \mathbb{C} -adrske reprezentacija.
REPREZENTACIJE OD $G_{\mathbb{Q}}$

$G_{\mathbb{Q}}$ ima (KRULLOVA) TOPOLOGIJU.

OTVORENE SKUPovi
 $= \{ \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/M), \}$
 gdje M/\mathbb{Q} konačan!
 $= \{ \text{podgrupe konačnog indeksa} \}$

$\Rightarrow G_{\mathbb{Q}}$ je TOPOLOŠKA GRUPA

- topološki prostom, drugi je grupa,
- operacije su grupno operacija i inverzovanje su neprekidni.

$\mathbb{G} : \mathbb{Q}_\ell$ i njegovo proširenje od \mathbb{Q}_ℓ su topološke grupi.
 $\Rightarrow GL_n(K)$ za $K = \mathbb{C}$ ili \mathbb{Q}_ℓ je topološka grupa.

Def GALOISOVA REPREZENTACIJA dimenzije n nad (topološkim) poljem F je NEPREKIDNI HOMOMORFIZAM GRUPE

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_n(F).$$

Def Ako je F proširenje od \mathbb{Q}_ℓ , kažemo da je ρ \mathbb{C} -ADRSKA REPREZENTACIJA GALOISOVA REPREZENTACIJA.

PRIMJER \mathbb{C} -adrski ciklotomski karakter

$$\mu_n = \{ \zeta \in \mathbb{C} \text{ t.d. } \zeta^n = 1 \}.$$

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

\mathbb{C} prost broj

$$\begin{aligned} \sigma_a &\mapsto a \\ &'' \\ \sigma_a(\zeta_n) &= \zeta_n^a \end{aligned}$$

$$\mu_{\ell^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} \mu_{\ell^n}$$

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \cong \varprojlim_{n \geq 1} \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^n})/\mathbb{Q})$$

$$\cong \varprojlim_{n \geq 1} (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}_\ell^\times$$

$$\chi : \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^\times \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times = GL_1(\mathbb{Q}_\ell)$$