Algebarska geometrija
2. Zadaća

1. Neka je $f : X \to Y$ morfizam algebarskih skupova, i $f^* : A(Y) \to A(X)$ odgovarajući homomorfizam koordinatnih prstena. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

   (i) f je surjektivan ako i samo ako je f^* je injektivan.

   (ii) f je injektivan ako i samo ako je f^* surjektivan.

   (iii) Neka je $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ je izomorfizam. Tada je f linearno, tj. $f(x) = ax + b$, za neke $a, b \in k$.

   (iv) Neka je $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ je izomorfizam. Tada je $f(x) = Ax + B$, za neke $A \in M_2(k)$, $B \in k^2$.

2. Koji od ovih prstenastih prostora su međusobno izomorfni nad $\mathbb{C}$?

   (a) $\mathbb{A}^1 \setminus \{1\}$.

   (b) $V(x_1^2 + x_2^2) \subseteq \mathbb{A}^2$.

   (c) $V(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^3$.

   (d) $V(x_1 x_2) \subseteq \mathbb{A}^2$.

   (e) $V(x_2^2 - x_1^3 - x_1^2) \subseteq \mathbb{A}^2$.

   (f) $V(x_1^2 - x_2^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$.

3. Neka je $a \in \mathbb{P}^n$ točka. Dokažite da je a projektivna mnogostrukost i odredite neki skup generatora od $I_p(\{a\})$.

4. Pokažite da je svaki morfizam $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{A}^1$ konstantan. Ovdje promatrajte $\mathbb{P}^1$ kao zalijepljene 2 kopije od ^{1} uz $^1 \setminus \{0\}$ s obzirom na preslikavanje $x \mapsto \frac{1}{x}$, kao što je rađeno na satu.

5. Neka su L_1, L_2 disjunktni pravci u $\mathbb{P}^3$, tj. 1-dimenzionalni linearni potprostori i neka je $a \in \mathbb{P}^3$ točka koja ne leži na L_1 ili L_2. Dokažite da postoji jedinstveni pravac $L \subseteq \mathbb{P}^3$ kroz a koji siječe L_1 i L_2.