1	2	3	4	5	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 18.6.2025.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno pet zadataka. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. (12 bodova) Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $27x^2 + 143xy + 202y^2$.
2. (12 bodova) Odredite $h(-163)$.
3. (12 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $\varphi(n)\sigma(n) = n^2$.
4. (12 bodova) Dokažite da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trojki čije su katete uzastopni prirodni brojevi.
5. (12 bodova) Nađite najmanje rješenje Pellove jednadžbe $x^2 - 170y^2 = 1$ za koje je $x > 1000$.

Rješenja:

1. $16x^2 - 13xy + 24y^2$
2. $h(-163) = 1$, jedina reducirana forma je $x^2 + xy + 41y^2$.
3. Primijetimo da su lijeva i desna strana multiplikativne pa pogledajmo što se dogodi za $n = p^k$.

$$\varphi(p^k)\sigma(p^k) = (p-1)p^{k-1}\frac{p^{k+1}-1}{p-1} = p^{2k} - p^{k-1} < p^{2k}.$$

Stoga je $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$ za sve $n > 1$. Trivijalno se vidi da je $n = 1$ rješenje.

4. Jednadžba glasi $x^2 + (x+1)^2 = z^2 \implies z^2 = 2x^2 + 2x + 1 \implies 2z^2 = (2x+1)^2 + 1$. Pellovska jednadžba $a^2 - 2b^2 = -1$ ima beskonačno mnogo rješenja (minimalno je $(1,1)$) i u svima vrijedi $2 \nmid a$. Stoga $x = \frac{a-1}{2}$ daje rješenje tražene jednadžbe.

5. Minimalno rješenje pellovske jednadžbe $x^2 - 170y^2 = -1$ je $(x,y) = (13,1)$. Stoga je minimalno rješenje Pellove jednadžbe $x_1 + y_1\sqrt{170} = (13+\sqrt{170})^2 \implies (x_1, y_1) = (339, 26)$. Sva rješenja Pellove jednadžbe su oblika $x_n + y_n\sqrt{170} = (x_1 + y_1\sqrt{170})^n$ i vrijedi da je $(x_2, y_2) = (229841, 17628)$.

1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

1. ispitni rok, 18.6.2025.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. (20 bodova) Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 7 \pmod{17},$$
$$x \equiv -5 \pmod{29},$$
$$x \equiv -3 \pmod{29}.$$

2. (20 bodova) Odredite sve proste brojeve p za koje vrijedi $p \mid 7^{2p^2} + 11^p$.

3. (20 bodova) Odredite sve proste brojeve $p \geq 5$ za koje je -6 kvadratni ostatak pri dijeljenju s p.

4. (20 bodova) Odredite $h(-163)$.

5. (20 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $\varphi(n)\sigma(n) = n^2$.

6. (20 bodova) Dokažite da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trojki čije su katete uzastopni prirodni brojevi.

Rješenja:

1. $x \equiv 432 \pmod{17 \cdot 19 \cdot 29}$.

2. Po malom Fermatovom teoremu vrijedi $7^{2p^2} + 11^p \equiv 7^2 + 11 = 60 \pmod{p} \implies p = 2, 3, 5$.

3. $\left(\frac{-6}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{2}{p}\right)$,

$\left(\frac{p}{3}\right) = 1 \iff p \equiv 1 \pmod{3}$, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \iff p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Dakle, svi traženi prosti p su ili $p \equiv 1 \pmod{3}, p \equiv \pm 1 \pmod{8} \implies p \equiv 1, 7 \pmod{24}$ ili $p \equiv -1 \pmod{3}, p \equiv \pm 3 \pmod{8} \implies p \equiv 5, 11 \pmod{24}$.

4. $h(-163) = 1$, jedina reducirana forma je $x^2 + xy + 41y^2$.

5. Primijetimo da su lijeva i desna strana multiplikativne pa pogledajmo što se dogodi za $n = p^k$.

$$\varphi(p^k)\sigma(p^k) = (p-1)p^{k-1}\frac{p^{k+1}-1}{p-1} = p^{2k} - p^{k-1} < p^{2k}.$$

Stoga je $\varphi(n)\sigma(n) < n^2$ za sve $n > 1$. Trivijalno se vidi da je $n = 1$ rješenje.

6. Jednadžba glasi $x^2 + (x+1)^2 = z^2 \implies z^2 = 2x^2 + 2x + 1 \implies 2z^2 = (2x+1)^2 + 1$. Pellovska jednadžba $a^2 - 2b^2 = -1$ ima beskonačno mnogo rješenja (minimalno je $(1, 1)$) i u svima vrijedi $2 \nmid a$. Stoga $x = \frac{a-1}{2}$ daje rješenje tražene jednadžbe.