1	2	3	4	5	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

2. kolokvij, 19.6.2024.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno pet zadataka. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu sa $143x^2 + 252y^2 + 112y^2$.
2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ za koje vrijedi
$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ i } f(n+11) = f(n), \ \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$
3. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak broja $\dfrac{5+\sqrt{55}}{6}$,
4. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 124.
5. Odredite ima li jednadžba
$$x^2 + 2x = 82y^2 - 2$$
rješenja u prirodnim brojevima i, ako ima, nađite jedno rješenje za koje je $x \geq 100$.

Rješenja:

1. $3x^2 - 2xy + 47y^2$
2. Rješenja su ove 4 funkcije.

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod{11}, \\ 1, & \text{inače} \end{cases}, f_4(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod{11}, \\ 1, & x \equiv 1,3,4,5,9 \pmod{11}, \\ -1, & x \equiv 2,6,7,8,10 \pmod{11} \end{cases}$$

3. $\dfrac{5+\sqrt{55}}{6} = [\overline{2, 14, 2, 2}]$
4. $(124, 957, 965)$, $(124, 1920, 1924)$, $(93, 124, 155)$, $(124, 3843, 3845)$
5. $(x, y) = (2942, 325)$

1	2	3	4	5	6	Σ

JMBAG

IME I PREZIME

Teorija brojeva

1. rok, 19.6.2024.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadaci se rješavaju na ovim papirima. Odmah se **čitljivo** potpišite. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Riješite sustav kongruencija
$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{24}, \\ x &\equiv 19 \pmod{28}, \\ x &\equiv 26 \pmod{63}. \end{aligned}$$

2. (a) Nađite najmanji primitivni korijen modulo 73.
   (b) Riješite (pomoću indeksa) kongruenciju $x^{20} \equiv 41 \pmod{73}$.

3. Izračunajte sljedeće Legendreove simbole: $\left(\frac{345}{907}\right)$, $\left(\frac{286}{823}\right)$.

4. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu sa $143x^2 + 252y^2 + 112y^2$.

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ za koje vrijedi
$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ i } f(n+11) = f(n),\ \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

6. Odredite ima li jednadžba
$$x^2 + 2x = 82y^2 - 2$$
rješenja u prirodnim brojevima i, ako ima, nađite jedno rješenje za koje je $x \geq 100$.

Rješenja:

1. $x \equiv 215 \pmod{504}$
2. (a) 5 (b) $x \equiv 31, 34, 39, 42 \pmod{73}$
3. $\left(\frac{345}{907}\right) = 1$, $\left(\frac{286}{823}\right) = -1$
4. $3x^2 - 2xy + 47y^2$
5. Rješenja su ove 4 funkcije.

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod{11}, \\ 1, & \text{inače} \end{cases}, f_4(x) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \pmod{11}, \\ 1, & x \equiv 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}, \\ -1, & x \equiv 2, 6, 7, 8, 10 \pmod{11} \end{cases}$$

6. $(x, y) = (2942, 325)$