

Teorija brojeva

2. kolokvij, 26.6.2015.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadatci se rješavaju na ovim papirima. Odmah potpišite sva tri lista koje ste dobili. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $59x^2 + 88xy + 33y^2$.
2. Odredite $h(-63)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -63$.
3. Neka je $K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$K(n) = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k^2 | n\},$$

gdje je $\text{card}(A)$ broj elemenata skupa A .

(a) Je li $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa $f(n) = \sum_{d|n} K(d)$ multiplikativna funkcija?

(b) Dokažite da je

$$\sum_{d|n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \text{ kvadrat prirodnog broja,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{497}{156}$ i $\frac{5 + \sqrt{7}}{3}$.
5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 81.
6. Nađite najmanja rješenja u skupu prirodnih brojeva (ako postoje) jednadžbi $x^2 - 125y^2 = -1$ i $x^2 - 125y^2 = 1$.

Teorija brojeva

2. kolokvij, 26.6.2015.

NAPOMENE: Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Ima ukupno šest zadataka. Zadatci se rješavaju na ovim papirima. Odmah potpišite sva tri lista koje ste dobili. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i dva papira A4 s formulama.

1. Nađite reduciranu kvadratnu formu ekvivalentnu s $122x^2 + 62xy + 8y^2$.
2. Odredite $h(-68)$, te nađite sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -68$.
3. Neka je $K : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$K(n) = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k^3 | n\},$$

gdje je $\text{card}(A)$ broj elemenata skupa A .

(a) Je li $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa $f(n) = \sum_{d|n} K(d)$ multiplikativna funkcija?

(b) Dokažite da je

$$\sum_{d|n} \mu(d)K\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \text{ kub prirodnog broja,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

4. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak brojeva $\frac{497}{180}$ i $\frac{6 + \sqrt{8}}{7}$.
5. Nađite sve Pitagorine trokute u kojima je jedna stranica jednaka 93.
6. Nađite najmanja rješenja u skupu prirodnih brojeva (ako postoje) jednadžbi $x^2 - 173y^2 = -1$ i $x^2 - 173y^2 = 1$.

Teorija brojeva - rješenja

2. kolokvij, 26.6.2015.

1. Reducirana kvadratna forma ekvivalentna s $59x^2 + 88xy + 33y^2$ je $3x^2 + 2xy + 4y^2$.
2. Sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -63$:

$$x^2 + xy + 16y^2, 2x^2 \pm xy + 8y^2, 3x^2 + 3xy + 6, 4x^2 + xy + 4y^2$$

3. Označimo li sa $s(n)$ indikatorsku funkciju potpunih kvadrata u \mathbb{N} (tj. vrijednost funkcije je 1 ako je n potpuni kvadrat, a 0 inače), lako je provjeriti da je s multiplikativna funkcija, pa je i $K(n) = \sum_{d|n} s(d)$ multiplikativna funkcija, a iz Möbiusove formule inverzije slijedi $\sum_{d|n} \mu(d)K(\frac{n}{d}) = s(n)$. Također je sada očito da je f multiplikativna funkcija.

$$4. \frac{497}{156} = [3, 5, 2, 1, 1, 1, 3], \frac{5 + \sqrt{7}}{3} = [2, \overline{1, 1, 4, 1}]$$

5. Pitagorini trokuti kojima je jedna stranica jednaka 81:

$$(81, 108, 135), (81, 360, 369), (81, 1092, 1095), (81, 3280, 3281) \text{ prim.},$$

6. Za $x^2 - 125y^2 = -1$ je najmanje rješenje $(x, y) = (682, 61)$, a za $x^2 - 125y^2 = 1$ je $(x, y) = (930249, 83204)$.

Teorija brojeva - rješenja

2. kolokvij, 26.6.2015.

1. Reducirana kvadratna forma ekvivalentna s $122x^2 + 62xy + 8y^2$ je $2x^2 + 2xy + 8y^2$.

2. Sve reducirane kvadratne forme s diskriminantom $d = -68$:

$$x^2 + 17y^2, 2x^2 + 2xy + 9y^2, 3x^2 \pm 2xy + 6y^2$$

3. Označimo li sa $c(n)$ indikatorsku funkciju kubova u \mathbb{N} (tj. vrijednost funkcije je 1 ako je n treća potencija prirodnog broja, a 0 inače), lako je provjeriti da je c multiplikativna funkcija, pa je i $K(n) = \sum_{d|n} c(d)$ multiplikativna funkcija, a iz Möbiusove formule inverzije slijedi $\sum_{d|n} \mu(d)K(\frac{n}{d}) = c(n)$. Također je sada očito da je f multiplikativna funkcija.

4. $\frac{497}{180} = [2, 1, 3, 5, 2, 1, 2], \frac{6 + \sqrt{8}}{7} = [1, 3, \overline{1, 4}]$

5. Pitagorini trokuti kojima je jedna stranica jednaka 93:

$$(93, 124, 155), (93, 476, 485) \text{ prim.}, (93, 1440, 1443), (93, 4324, 4325) \text{ prim.}$$

6. Za $x^2 - 173y^2 = -1$ je najmanje rješenje $(x, y) = (1118, 85)$, a za $x^2 - 173y^2 = 1$ je $(x, y) = (2499849, 190060)$.