

# DIOFANTSKE APROKSIMACIJE I PRIMJENE

## 4. zadaća

1. Navedite podskup  $\mathcal{R}_1$  ravnine  $E^2$  koji je konveksan i čija je površina  $\mu(\mathcal{R}_1) = 10$ , ali  $\mathcal{R}_1$  ne sadrži niti jednu cjelobrojnu točku.
2. Navedite podskup  $\mathcal{R}_2$  ravnine  $E^2$  koji je simetričan s obzirom na ishodište i čija je površina  $\mu(\mathcal{R}_2) = 10$ , ali  $\mathcal{R}_2$  ne sadrži niti jednu cjelobrojnu točku.
3. Skicirajte podskup  $\mathcal{R}_3$  ravnine  $E^2$  definiran sa

$$\mathcal{R}_3 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1^2 - 2x_2^2| < 1\}.$$

Je li skup  $\mathcal{R}_3$  simetričan s obzirom na ishodište, je li konveksan, kolika mu je površina, koliko cjelobrojnih točaka sadrži?

4. Neka su  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  realni brojevi, te  $n$  prirodan broj. Dokažite da postoje cijeli brojevi  $p_1, p_2, q$  takvi da vrijedi:

$$0 < q \leq n \quad \text{i} \quad \left(\alpha_1 - \frac{p_1}{q}\right)^2 + \left(\alpha_2 - \frac{p_2}{q}\right)^2 \leq \frac{4}{\pi n q^2}.$$

5. Nađite prirodne brojeve  $q, p_1, p_2$  sa svojstvom da je  $q > 10^9$ , te da vrijedi

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p_1}{q}\right| < q^{-3/2}, \quad \left|\sqrt{3} - \frac{p_2}{q}\right| < q^{-3/2}.$$

Andrej Dujella