Numerička Analiza 2

Kolokvij br. 2., vježba
(Kolokvij: 28.6.2019. u 9:00 u PR2 i PR3.)

Svi programi rezultate moraju prikazati i grafički (aproksimacije i analitička točna rješenja) za vizualnu usporedbu i kontrolu. Svako rješenje mora imati svoj test program koji ne zahtijeva nikakav ulaz. Na primjer, rješenje prvog zadatka se testira programom `zad1.m` koji poziva odgovarajuće funkcije i postavlja parametre.

Bit će četiri zadatka, od kojih barem dva uključuju pisanje programa u Matlabu. Teorijski zadaci su iz tema koje su bile na predavanjima nakon prvog kolokvija.

Kako sam najavio na vježbama, osim navedena četiri zadatka bit će ponuđen i jedan dodatni zadatak iz gradiva koje je bilo uključeno u prvi kolokvij. Oni koji to žele mogu ga rješavati i osvojene bodove zamijeniti s najlošijim zadatkom iz prvog kolokvija (primijetite da to ne garantira povećanje broja bodova prvog kolokvija).

1 Zadaci za vježbu

1. Riješite numerički sljedeći problem:
$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u(x,y) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi/2,$$
sa rubnim uvjetima $u(x,0) = 4e^{-3x}$, $u(x,\pi/2) = 0$; $u(0,y) = 4\cos(3y)$, $u(1,y) = 4e^{-3}\cos(3y)$. Usporedite s analitičkim rješenjem (koje se lako pogodi).

2. Za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \tag{1}$$
sa inicijalnim uvjetom $u(x,0) = g(x)$ i rubnim uvjetima $u(0,t) = \rho_0(t)$, $u(1,t) = \rho_1(t)$ opišite metodu linija i iz nje, korištenjem trapezne metode za sustave ODJ, izvedite Crank–Nicolsonovu metodu i dokažite njenu stabilnost.

3. Riješite numerički sljedeći problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le 0.2$$

uz inicijalni uvjet $u(x, 0) = \sin(2x)$ i rubne uvjete $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$. Koristite Crank–Nicolsonovu metodu. Analitičko rješenje ovog problema je

$$u(x, t) = \mathbf{e}^{-8t} \sin 2x.$$

4. Riješite numerički sljedeći problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 0.1$$

uz inicijalni uvjet $u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$ i rubne uvjete $u(0, t) = 0$ (lijevi rub), $u(1, t) = 0$ (desni rub). Koristite jednu eksplicitnu i jednu implicitnu (npr. Crank–Nicolson) metodu. Usporedite konvergenciju za različite vrijednosti Courantova broja. Analitičko rješenje ovog problema je

$$u(x, t) = \mathbf{e}^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \mathbf{e}^{-(3\pi)^2 t} \sin 3\pi x.$$

5. Napravite funkciju za trigonometrijsku interpolaciju. Koeficijente računajte ili vlastitom FFT funkcijom koju napišite i testirajte ili Matlabovom `fft` funkcijom. Program mora omogućiti odabir stupnja interpolacije i grafički prikaz rezultata. Testirajte na umjetno generiranim podacima, uzorkovanjem funkcije $\sin 20x + \sin 6x + \sin 2014x$ na $[0, 1]$.

6. (Alternativa zadatku 5.) Neka je $\omega = e^{\mathbf{i}2\pi/n}$ i

$$V = (\omega^{kj})_{k,j=0:n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Diskretna Fourierova transformacija niza $f_0, \ldots, f_{n-1}$ je dana s

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\overline{V} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix},$$

gdje $\overline{V}$ označava kompleksno konjugiranje po elementima. Dokažite da je

- $\left(\frac{1}{n}\overline{V}\right)^{-1} = V$, te da je
- $f_j = \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{\mathbf{i}jk2\pi/n}$, $j = 0, \ldots, n-1$.

7. Riješite numerički sljedeći problem:

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u(x,y)-12.5\pi^2 u(x,y) = -25\pi^2\cos(\frac{5\pi}{2}x)\cos(\frac{5\pi}{2}y), \quad 0 \le x, y \le 0.4$$

sa rubnim uvjetima $u(x,0) = \cos(\frac{5\pi}{2}x)$, $u(x,0.4) = -\cos(\frac{5\pi}{2}x)$; $u(0,y) = \cos(\frac{5\pi}{2}y)$, $u(0.4,y) = -\cos(\frac{5\pi}{2}y)$.

Nadalje, izvedite općenitu diskretizacijsku shemu ako je u lijevom rubu umjesto Dirichletovog zadan Neumannov rubni uvjet

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}_{|x=0} = b(y).$$