Numerička Analiza 2

Vježba za prvi kolokvij
23.4.2018.

1 Uvod

Sljedeći zadaci su odabrani za vježbu – pripremu za prvi kolokvij. Osim ovakvih zadataka, na kolokviju su moguća i teorijska pitanja o npr. stabilnosti, konvergenciji, konstrukciji metoda određenog tipa (npr. Runge-Kutta, višekoračne metode itd.)

U kolokviju će biti dva programska zadatka (inicijalni problem, rubni problem). Pri pisanju programa neće biti moguće korištenje pomoćne literature.

2 Zadaci

1. Napišite Matlab funkcije koje implementiraju Eulerovu i trapeznu metodu za rješavanje inicijalnog problema i primijenite ih na problem

$$y'(x) = -200xy(x)^2, \quad y(-1) = 1/101.$$

Za različite duljine vremenskog intervala eksperimentirajte sa različitim brojevima točaka diskretizacije (uključujući i jako veliki broj diskretnih točaka, tj. mali korak h). Što primjećujete? Usporedite izračunate aproksimacija sa egzaktnim rješenjem (koje treba odrediti analitički). Objasnite.

2. Napišite *Matlab* funkcije koje implementiraju Eulerovu i trapeznu metodu za rješavanje inicijalnog problema i primijenite ih na problem

$$y'(t) + ay(t) = r, \quad y(0) = y_0,$$

sa $a = 1$, $r = 1$, $y_0 = 0$. Za različite duljine vremenskog intervala eksperimentirajte sa različitim brojevima točaka diskretizacije (uključujući i jako veliki broj diskretnih točaka, tj. mali korak h). Što primjećujete? Objasnite. Usporedite izračunate aproksimacija sa egzaktnim rješenjem $y(t) = (y_0 - \frac{r}{a})e^{-at} + \frac{r}{a}$. Program za testiranje treba omogućiti grafičku usporedbu aproksimacija i analitičkog rješenja.

3. Pokažite da poboljšana Eulerova metoda ima za red veličine manju lokalnu pogrešku diskretizacije u odnosu na Eulerovu metodu.

4. Napišite Matlab funkcije koje implementiraju Adams–Bashfortovu m–koračnu metodu sa $m = 2$, $m = 3$ i $m = 4$. Za potrebne inicijalne vrijednosti koristite odgovarajuću Runge–Kuttinu metodu (koeficijente odgovarajuće RK metode potražite u literaturi/na Internetu). Odaberite test primjere (npr. koristite materijale iz kolegija o ODJ kojeg ste ranije slušali) i usporedite dobivene rezultate sa analitički dobivenim točnim rješenjima i sa rezultatom kojeg daje `ode45` (`Matlab`). Usporedite sa odgovarajućim Runge–Kuttinim metodama.

5. Objasnite problem numeričkog rješavanja krutih sustava ODJ. Ilustrirajte primjerom.

6. Sustav ODJ

$$\begin{aligned} x''(t) &= x(t) - y(t) - (3x'(t))^2 + (y'(t))^3 + 6y''(t) + 2t, \quad 1 \leq t \leq 1.5 \\ y'''(t) &= y''(t) - x'(t) + e^{x(t)} - t \\ x(1) &= 2,\ x'(1) = -4;\ y(1) = -2,\ y'(1) = 7,\ y''(1) = 6 \end{aligned}$$

   standardnom procedurom prebacite u sustav prvog reda, odgovarajuće dimenzije. Zatim ga riješite Runge–Kutta metodom RK4. Za referentne vrijednosti uzmite `ode45` iz Matlab-a.

7. Koristeći centralne diferencije, opišite diskretizaciju rubnog problema

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

   sa Dirichletovim rubnim uvjetima $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Odaberite test primjer i grafički ilustrirajte kvalitetu aproksimacija.

8. Opišite diskretizaciju rubnog problema

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x)$$

   sa Dirichletovim rubnim uvjetima $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Prvo primijenite rješenje prethodnog zadataka.

   Drugi način neka bude: Uz čvorove x_i uvedite pomoćne čvorove $x_{i\pm1/2}$ na polovištima između x_i i $x_{i\pm1}$. Zatim $\kappa(x)u'(x)$ diskretizirajte centralnim diferencijama u tim pomoćnim čvorovima. Pomoću tako dobivenih vrijednosti diskretizirajte centralnim diferencijama $(\kappa(x)u'(x))'$ u čvorovima x_i. Dobiveni linearni sustav $AU = F$ usporedite sa onim iz prvog rješenja. Usporedite dvije metode na test primjerima. Što primjećujete?

9.
- Za rubni problem

$$
\begin{aligned}
&y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \\
&y(\alpha) = y_\alpha, \;\; y(\beta) = y_\beta
\end{aligned}
$$

  izvedite diskretizaciju pomoću konačnih diferencija. Koristite centralne diferencije i diskretnu mrežu ekvidistantnih čvorova

$$\alpha = x_0, x_1, \ldots, x_n = \beta.$$

  Dobiveni diskretni problem zapišite u obliku sustava jednadžbi $Ax = b$.

- Nakon toga, dobivenom diskretizacijskom shemom riješite

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) - \frac{2}{x^2}y(x) = 0, \;\; y(1) = 5, \; y(2) = 3.$$

  Program organizirajte kao funkciju. Numeričko rješenje grafički usporedite s analitičkim rješenjem $y(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$. Za rješavanje sustava jednadžbi koristite prikladnu iterativnu metodu (koristeći znanja iz NA1).