Numerička Analiza 1 (2019.)

Kolokvij br. 1
Primjer za vježbu

Priprema za kolokovij

Kolokvij sadrži teorijske i praktične zadatke iz gradiva koje smo radili do 14.11.2019. (uključivo), te materijal iz skripte koji smo spominjali ali nismo detaljno obrađivali. Preciznije, kolokvij će sadržavati pitanja u vezi sadržaja sljedećih sekcija skripte:

- §1.5; §1.6.1
- §2.1 ;
- §3.1, §3.2, §3.3.1, §3.3.2, §3.3.3, §3.3.4, §3.5 (ali bez §3.5.4); §3.6; §3.7; §3.8; §3.9; §3.10 (Dokaz teorema 3.5.4 (Stein-Rosenberg ne treba znati, ali ga se mora znati iskazati i primijeniti kao ştо je napravljeno u slučaju dokaza konvergencije Gauss-Seidelov metode.).)

Praktiči dio kolokvija je obično jedan zadatak da se napiše program u Matlabu. To je ili metoda koju smo već radili ili neka jednostavna varijacija.

Uvod

Prvi blok zadatka je teorijski i njih rješavate u uvjetima *papir i olovka* – dakle klasično kao na bilo kojem pismenom ispitu. Molim da rješenja teorijskih zadataka budu napisana uredno i matematički korektno, sa odgovarajućom strukturom. Mora biti uvijek jasno što slijedi iz čega i zašto. Kada to završite, rješenja predajte dežurnom asistentu i nastavite s rješavanjem preostalog zadatka.

Zadnji zadatak je praktični i zahtijeva razvoj programa i testiranje na numeričkom primjeru. U tom dijelu kolokvija možete slobodno koristiti bilješke s predavanja i knjigu/skriptu po vlastitom izboru. Drugi oblici "pomoći" (Internet, gotovi programi, pomoć kolega, itd.) nisu dozvoljeni i molim da se toga strogo pridržavate. **Na računalu smije biti aktivan samo Matlab u radnom direktoriju koji je na početku prazan.** Svaki drugi "otvoren prozor" automatski znači diskvalifikaciju. Programe predajete tako da ih pošaljete emailom

```
To:     drmac@math.hr
Subject:NA1-2019-K1-Ime-Prezime
```

Naravno, priznaju se samo rješenja koja su poslana do momenta završetka kolokvija. Uz ovaj dio također možete predati i pisane bilješke, ako želite komentirati rezultate koje ste dobili.

Pažljivo pročitajte zadatke, nisu teški, vremena ima dovoljno – **dva sata**.

Kolokvij 1 (primjer)

Zadatak 1 (5 bodova)

Numeričko polje vrijednosti matrice $A \in \mathbb{M}_n$ je skup

$$\mathcal{F}(A) = \{y^* Ay/(y^* y) \ : \ y \in \mathbb{C}^n; y \neq 0\}.$$

Numerički radijus od A je $\nu(A) = \max\{|z| \ : \ z \in \mathcal{F}(A)\}$. Da li je funkcija $\nu(\cdot)$ norma? Usporedite $\nu(A)$ sa $\|A\|_2$. Usporedite $\nu(A)$ sa spektralnim radijusom $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$.

Neka je A normalna matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dokažite da je je u tom slučaju $\mathcal{F}(A)$ jednak konveksnoj ljusci (skupu svih konveksnih kombinacija) od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Zadatak 2 (20 bodova)

1. Opišite metodu SSOR(ω) (simetrizirani SOR) i izvedite je u obliku $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$.

2. Zatim dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je A hermitska matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima, onda matrica $M^{-1}N$ u SSOR metodi ima realne svojstvene vrijednosti.

3. Opišite Čebiševljevo polinomijalno ubrzanje metode SSOR.

Zadatak 3 (20 bodova)

1. Definirajte ireducibilne matrice.

2. Navedite primjer ireducibilne matrice koja se javlja u diskretizaciji diferencijalnih jednadžbi i pokažite da je ireducibilna.

3. Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

   - Matrica $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je ireducibilna ako i samo ako je njen graf $\Gamma(\mathsf{A})$ jako povezan.
   - Neka je $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ireducibilna matrica i neka je λ njena svojstvena vrijednost sa svojstvom da nije u unutrašnjosti niti jednog Geršgorinovog kruga. Tada je λ sadržana u presjeku svih kružnica $\partial\mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Zadatak 4 (10 bodova)

Odgovorite na dva od sljedeća tri pitanja:

- Definirajte Krilovljeve potprostore i opišite Arnoldijev algoritam za računanje njihovih ortonormiranih baza.
- Opišite Lanczosev algoritam (simetrična inačica Arnoldijevog algoritma).
- Dokažite da je Jacobijeva metoda za rješavanje sustava $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ konvergentna ako je A ireducibilno dijagonalno dominantna.

Zadatak 5 (20 bodova)

Opišite metodu GMRES. Pri tome treba jasno i detaljno opisati dio koji se odnosi na Arnoldijev algoritam, te dio koji se odnosi na optimalnu aproksimaciju iz danog Krilovljevog potprostora metodom najmanjih kvadrata (računanje QR faktorizacije pomoću Givensovih rotacija i računanje rješenja problema najmanjih kvadrata). Pokažite da niz normi reziduala monotono opada.

Zadatak 6 (25 bodova)

Implementirajte SSOR(ω) sa Čebiševljevim polinomijalnim ubrzanjem. Program testirajte na Poissonovoj jednadžbi (vidi skriptu).

Kolokvij 1 (primjer)

Zadatak 1 (10 bodova)

Dokažite sljedeću inačicu Geršgorinovog torema (bez pozivanja na sam teorem): Neka je $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ njene svojstvene vrijednosti, tj. spektar od A. Za $i = 1, \ldots, n$ definirajmo Geršgorinove krugove

$$\mathcal{G}_i = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{ii}| \leq \rho_i\}, \quad \rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}| \tag{1}$$

Tada vrijedi: Sve svojstvene vrijednosti od A su sadržane u uniji Geršgorinovih krugova $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$.

Ako je A realna matrica i ako je za neki indeks j krug $\mathcal{G}_j$ disjunktan sa svim ostalim, što možemo zaključiti o dijelu spektra od A sadržanom u tom krugu? Objasnite.

Zadatak 2 (20 bodova)

Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

- Neka je $A \in \mathbb{M}_n$ strogo dijagonalno domimantna ili ireducibilno dijagonalno dominantna matrica. Tada su i Jacobijeva i Gauss-Seidelova metoda konvergentne sa svakom početnom iteracijom.
- (bonus bodovi +10) Neka je S_ω matrica SOR metode s parametrom ω. Tada je $spr(S_\omega) > |\omega - 1|$. Dakle, za konvergenciju SOR(ω) je nužno da je $\omega \in (0, 2)$. (Ovdje $spr(\cdot)$ označava spektralni radijus.)

Zadatak 3 (20 bodova)

1. Definirajte spektralni radijus $\rho(\cdot)$ i na dva primjera pokažite da on nije norma.
2. Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje
   - Za proizvoljnu matričnu normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{M}_n$ i svaku matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{M}_n$ vrijedi $\rho(\mathsf{A}) \leq \|\mathsf{A}\|$. Nadalje, za svaku matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i svaki $\epsilon > 0$ postoji inducirana matrična norma $|||\cdot|||$ za koju je $|||\mathsf{A}||| \leq \rho(\mathsf{A}) + \epsilon$.
   - Neka je $\|\cdot\|$ proizvoljna matrična norma na $\mathbb{M}_n$. Tada je za svaku matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$
   $$\rho(\mathsf{A}) = \lim_{k\to\infty} \|\mathsf{A}^k\|^{1/k}.$$

Zadatak 4 (20 bodova)

Detaljno opišite Čebiševljevo polinomijalno ubrzanje iterativnih metoda. Navedite barem dvije metode (na određenim klasama primjera) na koje možemo primijeniti tu tehniku. Objasnite zašto.

Zadatak 5 (30 bodova) [Vidi §3.2.]

Implementirajte "matrix free" Jacobijevu ili SSOR(ω) (bonus bodovi) metodu sa Čebiševljevim polinomijalnim ubrzanjem (bonus bodovi). Program testirajte na Laplaceovoj jednadžbi $-\triangle u(x, y) = 0$, sa domenom
$0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4$, i rubnim uvjetima

$$u(0, y) = e^y - \cos y, \quad u(4, y) = e^y \cos 4 - e^4 \cos y,$$

$$u(x, 0) = \cos x - e^x, \quad u(x, 4) = e^4 \cos x - e^x \cos 4.$$

Vaš program treba vratiti dva grafa (`figure(1), figure(2)`) u kojem je na prvom graf egzaktnog rješenja $u(x, y)$ (kojeg lako pogodite) a na drugom graf izračunate numeričke aproksimacije. Za crtanje grafova koristite iste naredbe kao u sličnom zadatku iz zadataka koji su bili dani za vježbu.

Zadatak 5 (B varijanta) (15 bodova)[Vidi §3.2.]

Metodom konačnih diferencija diskretizirajte rubni problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 16\pi^2 \sin 4\pi x, \quad 0 < x < 1, && (2) \\ u(0) &= u(1) = 0. && (3) \end{aligned}$$

Dobiveni linearni sustav $Ax = b$ riješite Jacobijevom metodom, te Jacobijevom metodom sa polinomijalnim ubrzanjem,

Sve metode napisati kao Matlab funkcije (pomoć oko sintakse: `>> help function`). Ulazni podaci neka budu A, b, početna iteracija, tolerancija za numeričku konvergenciju, maksimalni broj iteracija i spektralni radijus matrice koja ganerira iteracije. Pri tome, radi jednostavnosti, pretpostavite da imate egzaktni spektralni radijus i računajte ga koristeći Matlab funkcije `eig, max, abs`. Pri implementaciji Čebiševljevih polinoma rekurziju implementirajte s minimalnim utroškom memorije. Izlazni podaci neka budu aproksimacija rješenja i vektor izračunatih reziduala. Usporediti konvergenciju reziduala za sve metode.

Varirajte broj diskretnih točaka i dobivene aproksimacije usporedite s točnim rješenjem (kojeg lako odredite analitički). Usporedbu napravite jednostavno grafički, koristite MATLAB–ovu grafiku, npr. funkciju `plot`.