Numerička Analiza 1 (2018/2019)

Vježba za Kolokvij br. 2
(17.1.2019.)

Sažetak

Termin kolokvija: 28.1.2019. u 9:00. (Provjerite raspored!) Termini usmenih: oni koji žele usmeni ispit odmah 28.1. ili 29.1. neka to naznače na kolokviju; za ostale, usmeni ispit počinje 30.1.2019. u 8:00.

Uvod

Kada završite teorijske zadatke, rješenja predajte dežurnom asistentu i nastavite s rješavanjem preostalog programskog zadatka, koji zahtijeva razvoj programa i testiranje na numeričkom primjeru. Na računalu smije biti aktivan samo Matlab. Svaki drugi "otvoren prozor" automatski znači diskvalifikaciju.

Programe predajete tako da ih pošaljete emailom

`To: drmac@math.hr`

`Subject:NA1-K2-Ime-Prezime`

Naravno, priznaju se samo rješenja koja su poslana do momenta završetka kolokvija. Uz ovaj dio također možete predati i pisane bilješke, ako želite komentirati rezultate koje ste dobili. Na svakom papiru kojeg predate treba biti: Vaše ime i prezime i JMBAG.

Kolokvij 2

Sadržaj kolokvija je materijal iz sekcija §II.4 i §II.5, tj. teme koje smo obrađivali u drugom dijelu semestra. Nije potrebno znati dokaz konvergencije QR metode. Očekuje se da svako zna samostalno napisati Matlab program za sve obrađene metode (metoda potencija, inverzne iteracije, RQ iteracije (shiftovi), iteracije potprostora, QR iteracije, redukcija na Hessenbergovu formu, QR iteracije na Hessenbergovoj matrici (bulge chasing), Jacobijeva metoda s raznim pivotnim strategijama).

Također, ponoviti opću teoriju i to: sekcija 1. (Svojstvene vrijednosti), posebno 1.1, 1.2 (Schurova forma - bilo što iz 1.2 može biti teorijsko pitanje na kolokviju), 1.5, 1.6.

Kolokvij se sastoji od 5 zadataka; ovdje imate za vježbu 6 tipičnih.

Bit će dan i jedan zadatak sa temom iz prvog kolokvija kojeg, ako ga riješite u potpunosti, možete iskoristiti za zamjenu najlošije bodovanog zadatka iz prvog kolokvija. Ova mogućnost je opcionalna, tj. ne morate rješavati dodatni zadatak.

Zadatak 1 (20 bodova)

Detaljno dokažite sljedeće tvrdnje:

(i) Za $x \neq \mathbf{0}$ i proizvoljni $\rho \in \mathbb{C}$ je (ρ, x) svojstveni par matrice $\mathsf{A} - \dfrac{r}{x^*x}x^*$, gdje je $r = \mathsf{A}x - \rho x$. Matrica $\delta\mathsf{A} = -\dfrac{r}{x^*x}x^*$ ima normu $\|\delta\mathsf{A}\|_2 = \|r\|_2/\|x\|_2$. Pri tome je $\|r\|_2$ minimalna ako je $\rho = \dfrac{x^*\mathsf{A}x}{x^*x}$.

(ii) Neka je A dijagonalizabilna, $\mathsf{A} = \mathsf{S}\Lambda\mathsf{S}^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. Ako je ρ svojstvena vrijednost matrice $\mathsf{A} + \delta\mathsf{A}$ onda je

$$\min_{i=1:n} |\lambda_i - \rho| \leq \|\mathsf{S}\|\|\mathsf{S}^{-1}\|\|\delta\mathsf{A}\|$$

sa svakom matričnom normom $\|\cdot\|$ za koju je norma dijagonalne matrice maksimalna apsolutna vrijednost dijagonalnih elemenata, npr. $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

Objasnite praktičnu korist navedenih rezultata u numeričkom računanju svojstvenih vrijednosti i vektora.

Zadatak 2 (20 bodova)

- Opišite metodu iteracija potprostora i dokažite konvergenciju k dominantnom dijelu spektra.
- Opišite metodu inverznih iteracija i pokažite kako se konvergenciju može ubrzati trnslacijama matrice (*shifts*).

Zadatak 3 (20 bodova)

Dokažite sljedeću tvrdnju:

Ako je u svakom koraku k Jacobijeve metode, primijenjene na realnu $n \times n$ simtričnu matricu A, pivotna pozicija (i_k, j_k) odabrana tako da je $|a^{(k)}_{i_k,j_k}| = \max_{i \neq j} |a^{(k)}_{ij}|$, onda je $\Omega(A^{(k+1)}) \leq \Omega(A^{(k)})\sqrt{1 - \dfrac{2}{n(n-1)}}$, pa je $\lim_{k\to\infty} \Omega(A^{(k)}) = 0$. Ovdje je $\Omega(A) = \|A - \operatorname{diag}(A)\|_F = \sqrt{\sum_{i\neq j} |a_{ij}|^2}$.

Nadalje, objasnite kako u k-tom koraku metode iz matrice $A^{(k)}$ možemo dobiti aproksimacije svojstenih vrijednosti, te kako ocjenjujemo pogrešku u tim aproksimacijama.

Zadatak 4 (30 bodova)

Napišite Matlab funkciju koja realnu kvadaratnu matricu A ortogonalnom transformacijom sličnosti reducira na Hessenbergovu formu H. Zatim u odvojenoj funkciji implementirajte *bulge chasing* na matrici H. Opišite detalje tehnike *bulge chasing*, te kako te dvije funkcije zajedno (redukcija na Hessenbergovu formu i *bulge chasing*) daju QR metodu za računanje Schurove forme od A. Zašto QR iteracije čuvaju Hessenbergovu strukturu? Kako izgleda realna Schurova forma od A?

Zadatak 5 (20 bodova)

(i) Za $n \times n$ matricu A, sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, opišite metodu potencija i dokažite konvergenciju u slučaju $|\lambda_1| > \max_{i=2:n} |\lambda_i|$. O čemu ovisi brzina konvergencije? Kako bi se konvergenciju moglo ubrzati pomoću translacije $\mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A} - \alpha I$?

(ii) Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Neka je u_1 svojstveni vektor od A (uz svojstvenu vrijednost λ_1) i neka je v proizvoljan vektor za kojeg je $v^* u_1 = 1$. Sa proizvoljnim skalarom σ definiramo matricu $\widetilde{A} = A - \sigma u_1 v^*$. Dokažite da su svojstvene vrijednosti od $\widetilde{A}$, redom, $\lambda_1 - \sigma, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Da li tu činjenicu možemo iskoristiti u metodi potencija za računanje i drugih svojstvenih vrijednosti osim dominantne? (Na primjer, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ i metodom potencija aproksimiramo λ_1, a dalje nam treba i aproksimacija za λ_2.) Nadalje, dokažite konvergenciju metode potencija.

Zadatak 6 (20 bodova)

Napišite Matlab funkciju koja realnu kvadaratnu matricu A ortogonalnom transformacijom sličnosti reducira na Hessenbergovu formu H. Zatim u odvojenoj funkciji implementirajte *bulge chasing* na matrici H. Opišite detalje tehnike *bulge chasing*, te kako te dvije funkcije zajedno (redukcija na Hessenbergovu formu i *bulge chasing*) daju QR metodu za računanje Schurove forme od A. Zašto QR iteracije čuvaju Hessenbergovu strukturu? Kako izgleda realna Schurova forma od A?