Numerička Analiza 1

Kolokvij br. 1
Primjer za vježbu

Priprema za kolokovij

Kolokvij sadrži teorijske i praktične zadatke iz gradiva koje smo radili do petka 26.10. (uključivo), te materijal iz skripte koji smo spominjali ali nismo detalno obrađivali. Preciznije, kolokvij će sadržavati pitanja u vezi sadržaja sljedećih sekcija skripte:

- §1.5; §1.6.1
- §2.1 ; §2.2. (do teorema 2.2.5)
- §3.5; §3.6; §3.7; §3.8; §3.9; §3.10; (Dokaz teorema 3.5.4 (Stein-Rosenberg ne treba).)

Praktiči dio kolokvija je obično jedan zadatak da se napiše program u Matlabu. To je ili metoda koju smo već radili ili neka jednostavna varijacija. Prva zadaća je primjer kako bi mogao izgledati kolokvij.

Uvod

Prvih pet zadatka su teorijski i njih rješavate u uvjetima *papir i olovka* – dakle klasično kao na bilo kojem pismenom ispitu. Molim da rješenja teorijskih zadataka budu napisana uredno i matematički korektno, sa odgovarajućom strukturom. Mora biti uvijek jasno što slijedi iz čega i zašto. Kada to završite, rješenja predajte dežurnom asistentu i nastavite s rješavanjem preostalog zadatka.

Zadnji zadatak je praktični i zahtijeva razvoj programa i testiranje na numeričkom primjeru. U tom dijelu kolokvija možete slobodno koristiti bilješke s predavanja i knjige po vlastitom izboru. Drugi oblici "pomoći" (Internet, gotovi programi, pomoć kolega, itd.) nisu dozvoljeni i molim da se toga strogo pridržavate. **Na računalu smije biti aktivan samo Matlab u**

radnom direktoriju koji je na početku prazan. Svaki drugi "otvoren prozor" automatski znači diskvalifikaciju. Programe predajete tako da ih pošaljete emailom

```
To:     drmac@math.hr
Subject:NA1-2011-K1-Ime-Prezime
```

Naravno, priznaju se samo rješenja koja su poslana do momenta završetka kolokvija. Uz ovaj dio također možete predati i pisane bilješke, ako želite komentirati rezultate koje ste dobili.

Pažljivo pročitajte zadatke, nisu teški, vremena ima dovoljno – **dva sata**. Sretno.

Kolokvij 1

Zadatak 1 (5 bodova)

Numeričko polje vrijednosti matrice $A \in \mathbb{M}_n$ je skup

$$\mathcal{F}(A) = \{y^* A y \ : \ y \in \mathbb{C}^n; y \neq 0\}.$$

Numerički radijus od A je $\nu(A) = \max\{|z| \ : \ z \in \mathcal{F}(A)\}$. Da li je funkcija $\nu(\cdot)$ norma? Usporedite $\nu(A)$ sa $\|A\|_2$. Usporedite $\nu(A)$ sa spektralnim radijusom $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$.

Neka je A normalna matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dokažite da je je u tom slučaju $\mathcal{F}(A)$ jednak konveksnoj ljusci (skupu svih konveksnih kombinacija) od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Zadatak 2 (20 bodova)

1. Opišite metodu SSOR(ω) (simetrizirani SOR) i izvedite je u obliku $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$.

2. Zatim dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je A hermitska matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima, onda matrica $M^{-1}N$ u SSOR metodi ima realne svojstvene vrijednosti.

3. Opišite Čebiševljevo polinomijalno ubrzanje metode SSOR.

Zadatak 3 (20 bodova)

1. Definirajte ireducibilne matrice.

2. Navedite primjer ireducibilne matrice koja se javlja u diskretizaciji diferencijalnih jednadžbi i pokažite da je ireducibilna.

3. Dokažite jednu od sljedeće dvije tvrdnje:

   - Matrica $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je ireducibilna ako i samo ako je njen graf $\Gamma(\mathsf{A})$ jako povezan.
   - Neka je $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ireducibilna matrica i neka je λ njena svojstvena vrijednost sa svojstvom da nije u unutrašnjosti niti jednog Geršgorinovog kruga. Tada je λ sadržana u presjeku svih kružnica $\partial\mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Zadatak 4 (10 bodova)

Odgovorite na dva od sljedeća tri pitanja:

- Definirajte Krilovljeve potprostore i opišite Arnoldijev algoritam za računanje njihovih ortonormiranih baza.
- Opišite Lanczosev algoritam (simetrična inačica Arnoldijevog algoritma).
- Dokažite da je Jacobijeva metoda za rješavanje sustava $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ konvergentna ako je A ireducibilno dijagonalno dominantna.

Zadatak 5 (20 bodova)

Opišite metodu GMRES. Pri tome treba jasno i detaljno opisati dio koji se odnosi na Arnoldijev algoritam, te dio koji se odnosi na optimalnu aproksimaciju iz danog Krilovljevog potprostora metodom najmanjih kvadrata (računanje QR faktorizacije pomoću Givensovih rotacija i računanje rješenja problema najmanjih kvadrata). Pokažite da niz normi reziduala monotono opada.

Zadatak 6 (25 bodova)

Implementirajte SSOR(ω) sa Čebiševljevim polinomijalnim ubrzanjem. Program testirajte na Poissonovoj jednadžbi (vidi zadaću).

Napomena

Još jednom podsjećam da za zadnji zadatak možete koristiti bilješke s predavanja i knjige po Vašem izboru, ali programe morate napisati sami u vrijeme kolokvija i točno te programe napisane u vrijeme kolokvija sa svog maila poslati na navedenu adresu. Svaki pokušaj korištenja nedozvoljenih oblika pomoći (a to je po definiciji sve osim samostalnog pisanja programa za vrijeme kolokvija, korištenja vlastitih bilješki i knjiga) će rezultirati diskvalifikacijom i gubitkom bodova ovog kolokvija. Slanje programa u tuđe ime i slične nedozvoljene nečasne radnje će također biti sankcionirane. U vrijeme rješavanja ovog zadatka je svaki pristup Internetu zabranjen.