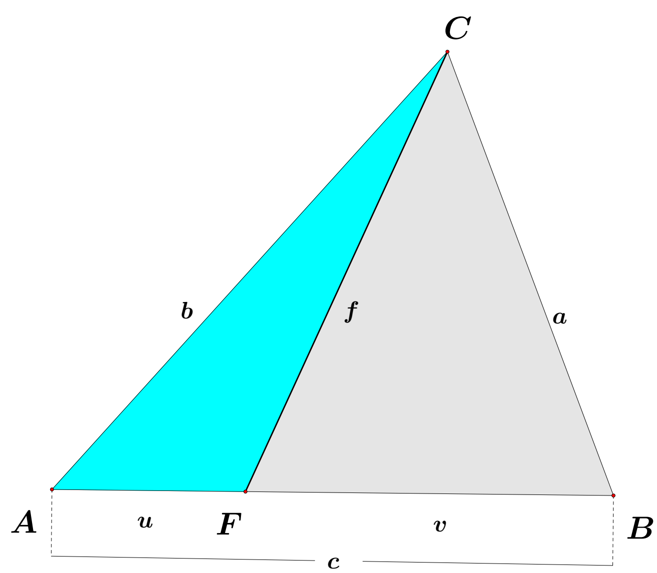
NEKA SVOJSTVA SUSJEDNIH TROKUTA

ZVONKO ČERIN*, ZAGREB

Sažetak. Za susjedne trokute (npr. FCA i FCB gdje je vrh F unutrašnja točka dužine AB u trokutu ABC) istražujemo odnose koji vrijede za različite njihove elemente poput poluopsega, promjera opisanih, upisanih i pripisanih kružnica. Isto tako razmatramo i posebno interesantan slučaj kada je su te veličine jednake.

1. Jednostavna svojstva susjednih trokuta

Za trokute FCA i FCB kažemo da su *susjedni* ako je F unutrašnja točka dužine AB (vidi Sliku 1). Lagano se može provjeri da ako je F unutrašnja točka stranice AB trokuta ABC onda su trokuti FCA i FCB susjedni i da se svaki par susjednih trokuta dobiva na taj način.



Slika 1: Susjedni trokuti.

* Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu PMF-a Sveučilišta u Zagrebu. Bavi se topologijom, geometrijom i matematičkom edukacijom.
e-mail: cerin@math.hr.

Za susjedne trokute FCA i FCB koristimo oznake $|AF| = u$, $|FB| = v$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|AB| = c$ i $|FC| = f$. Skoro sve oznake koje se odnose na prvi trokut FCA imaju za eksponent slovo A dok one koje se odnose na drugi trokut FCB imaju za eksponent slovo B. Oznake bez eksponenta A ili B primjenjuju se na trokut ABC. Izuzetci tih pravila su rijetki. Na primjer, h_u je visina trokuta FCA na stranicu AF.

U ovom članku želimo opisati neka zanimljiva svojstva susjednih trokuta. Krenimo s onima koje istražuju odnose koji vrijede za različite podatke o susjednim trokutima (npr. za njihove visine, poluopsege, polumjere opisanih, upisanih i pripisanih kružnica).

Očigledno je $h_u = h_v$ dok relacija $S = S^A + S^B$ za površine povlači $f(h_f^A + h_f^B) = c\,h$ i $b\,h_b^A + a\,h_a^B = c\,h$.

Odredimo sada kada će biti $h_f = h_f^A = h_f^B$ i $h_0 = h_b^A = h_a^B$. Iz jednakosti $u\,h = f\,h_f$ i $v\,h = f\,h_f$ slijedi $u = v$ pa je točka F polovište stranice $|AB|$ i $|CF|$ je težišnica vrha C. Slično, iz jednakosti $u\,h = b\,h_0$ i $v\,h = a\,h_0$ slijedi $\frac{u}{v} = \frac{b}{a}$ pa je točka F presjek simetrale kuta C sa stranicom $|AB|$ i $|CF|$ je simetrala kuta C.

Ako je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta ABC onda imamo $s^A = \frac{b+f+u}{2}$, $s^B = \frac{a+f+v}{2}$, $c = u + v$ i $c(f^2 + u\,v) = a^2\,v + b^2\,u$ prema Stewartovom teoremu (vidi [5, str. 6], [8] i [12, str. 58]). Eliminacijom parametara f, u, v dobijemo sljedeći rezultat (uz oznake $s_a = \frac{c+b-a}{2}$ i $s_b = \frac{c-b+a}{2}$).

Teorem 1. *Za poluopsege susjednih trokuta vrijedi relacija*

$$2\,c\,s^A\,s^B - s(s_b\,s^A + s_a\,s^B) + 2\,s\,s_a\,s_b = 0.$$

Pokušajmo sada odrediti kada će vrijediti $s^A = s^B$. Iz jednakosti $\frac{b+u+f}{2} = \frac{a+(c-u)+f}{2}$ dobivamo $u = s_b$ i $v = s_a$. Dakle, točka F mora dijeliti stranicu $|AB|$ u omjeru $s_b : s_a$ pa se radi o točki u kojoj pripisana kružnica dodiruje stranicu $|AB|$. Odaberemo li na sličan način točke E na $|AC|$ i D na $|BC|$ primjenom Cevainog teorema (vidi [12, str. 61]) zaključujemo da se pravci AD, BE i CF sijeku u Nagelovoj točki trokuta ABC (vidi [12, str. 150]).

Sada taj isti postupak ponovimo za $\kappa = a^2 + b^2 + c^2$. Iz $\kappa^A = b^2 + f^2 + u^2$ i $\kappa^B = a^2 + f^2 + v^2$ kao i gore isključenjem f, u, v dobijemo da vrijedi ovaj teorem.

Teorem 2. *Sljedeći polinom od κ^A i κ^B je jednak nuli:*

$$\left(\kappa^A - \kappa^B\right)^2 + \left(3\,a^2 - 3\,b^2 - c^2\right)\kappa^A + \left(3\,b^2 - 3\,a^2 - c^2\right)\kappa^B + 2\left(a^2 + b^2\right)c^2 + 2\left(a^2 - b^2\right)^2.$$

Ako krenemo od $\kappa^A = \kappa^B$ sada točka F mora dijeliti stranicu $|AB|$ u omjeru $\kappa_b : \kappa_a$ gdje je $\kappa_a = c^2 + b^2 - a^2$ i $\kappa_b = c^2 - b^2 + a^2$. Odaberemo li na sličan način točke E na $|AC|$ i D na $|BC|$, pravci AD, BE i CF

se sijeku u Lemoinevoj točki antikomplementarnog trokuta od ABC (to je centralna točka $X(69)$ u [9]).

Na sličan način postupamo s kotangensima Brocardovih kuteva susjednih trokuta. Kako je $\delta = \cot\omega = \frac{\kappa}{4S}$ eliminacijom dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 3. *Sljedeći polinom od δ^A i δ^B je jednak nuli:*

$$4\,S^2\left(\delta^A+\delta^B\right)\left(\kappa\left(\delta^A+\delta^B\right)-4\,S\,\delta^A\,\delta^B\right)-S\left(U\delta^A+V\delta^B\right)+c^2\,W,$$

gdje je $W = c^2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)^2$, $V = c^4+\left(6\,a^2+2\,b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)^2$ i $U = c^4+\left(2\,a^2+6\,b^2\right)+\left(a^2-b^2\right)^2$.

Zanimljivi problem sada je da se odredi uvjet kada će susjedni trokuti imati iste Brocardove kuteve (tj. kada je $\delta^A = \delta^B$) i da se točka F tada konstruira ravnalom i šestarom.

2. Opisane kružnice susjednih trokuta

Prisjetimo se formule $R = \frac{a\,b\,c}{4\,S}$ za polumjer opisane kružnice trokuta ABC. Jer je $R^A = \frac{b\,f\,u}{4\,\frac{u\,h_u}{2}} = \frac{b\,f}{2\,h_u}$, $R^B = \frac{a\,f\,v}{4\,\frac{v\,h_v}{2}} = \frac{a\,f}{2\,h_v}$ i $h_u = h_v$, odmah dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 4. *Za polumjere opisanih kružnica susjednih trokuta vrijedi $a\,R^A = b\,R^B$.*

Drugi dokaz prethodnog teorema jasan je iz Slike 2 na kojoj nam analiza kuteva prema teoremu o obodnom i središnjem kutu nad tetivom kružnice pokazuje da su trokuti AO^AB' i AO^AB' slični.

Lagano se vidi kada je $R^A = R^B$. Očigledno vrijedi ova tvrdnja:

Trokut ABC je jednakokračan (točnije $a = b$) onda i samo onda ako postoji unutrašnja točka F dužine $|AB|$ tako da susjedni trokuti FCA i FCB imaju jednake polumjere opisanih kružnica.

3. Upisane i pripisane kružnice susjednih trokuta

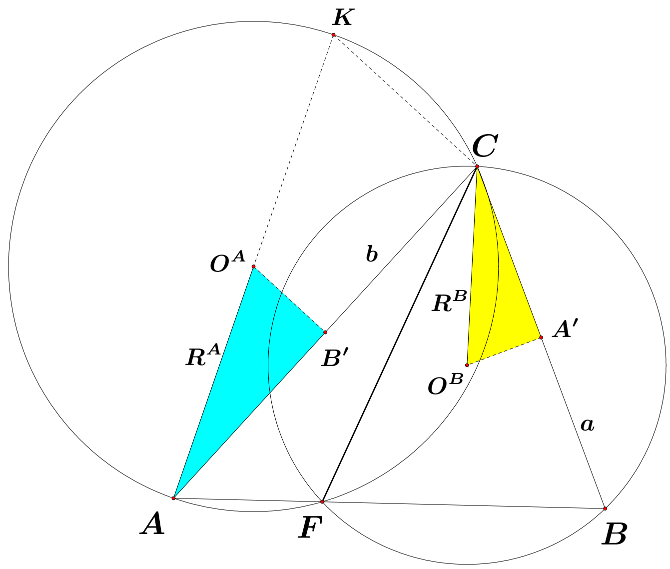
Poslije ovih dosta laganih i pomalo dosadnih veličina prelazimo na složenije i zanimljivije polumjere r i ϱ upisanih i pripisanih kružnica.

Prvi dio sljedećeg teorema dokazan je na četiri načina u autorovom članku [3] (čak i za nizove konačno mnogo susjednih trokuta). Drugi dio se može dokazati na sličan način (vidi Sliku 3).

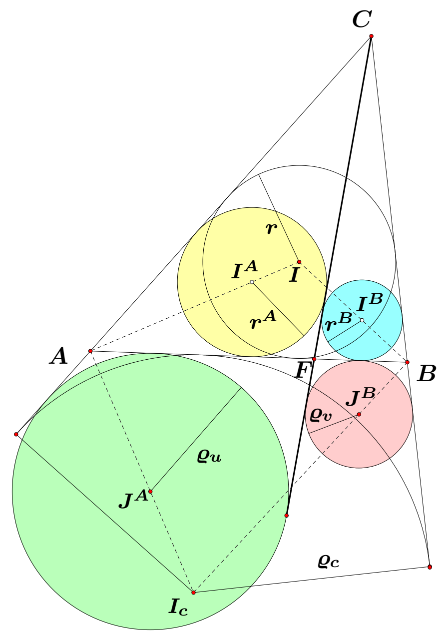
Teorem 5. *Polumjeri upisanih i pripisanih kružnica susjednih trokuta zadovoljavaju relacije:*

(1) $c\,r^A\,r^B + S(r - r^A - r^B) = 0.$

(2) $c\,\varrho_u\,\varrho_v + S(\varrho_u + \varrho_v - \varrho_c) = 0.$



Slika 2: Drugi dokaz Teorema 3.



Slika 3: Upisane i pripisane kružnice susjednih trokuta.

Sada ćemo diskutirati neke posljedice teorema 5.

Za jednakostranični trokut vrijedi $S = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ i $r = \frac{c\sqrt{3}}{6}$ što uvršteno u $c\,r^A\,r^B + S(r - r^A - r^B) = 0$ daje $c^2 - 2\sqrt{3}\,c\,(r^A + r^B) + 8\,r^A\,r^B = 0$ a to je teorem iz zbirke "Sanpojojitsu" u Japanu (17. stoljeće). U članku [14] on je dokazan uz pomoć programa Mathematica. S druge strane, uvrstimo li još $\varrho_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ u $c\,\varrho_u\,\varrho_v + S(\varrho_u + \varrho_v - \varrho_c) = 0$ imamo $3\,c^2 - 2\sqrt{3}\,c\,(\varrho_u + \varrho_v) - 8\,\varrho_u\,\varrho_v = 0$.

Jer je F unutrašnja točka stranice $\overline{AB}$ vidimo da je $r^A > 0$, $r^B > 0$, $\varrho_u > 0$ i $\varrho_v > 0$ pa je uvijek $r^A + r^B > r$ i $\varrho_u + \varrho_v < \varrho_c$.

4. Formula za visinu i primjene

Jer je $S = \frac{c\,h_c}{2}$, gdje je h_c duljina visine na stranicu $\overline{AB}$, dobivamo $h_c = \frac{2\,r^A\,r^B}{r^A + r^B - r} = \frac{2\,\varrho_u\,\varrho_v}{\varrho_c - \varrho_u - \varrho_v}$. S druge strane, poznato je da duljine svih triju visina zadovoljavaju $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ i $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_c}$. Uvrstimo li gornje vrijednosti za h_a, h_b i h_c u te jednakosti nakon sređivanja možemo dobiti informaciju o šest polumjera upisanih i o šest polumjera pripisanih kružnica u trokute određene unutrašnjim točkama na svakoj stranici. Ovo je jednostavniji slučaj prve jednakosti.

Korolar 1. *Neka su X, Y, Z unutrašnje točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka r, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 budu polumjeri kružnica upisanih redom u trokute ABC, ABX, ACX, BCY, BAY, CAZ, CBZ. Neka je $W = x_1\,x_2\,y_1\,y_2\,z_1\,z_2$, $U = \frac{W}{x_1\,x_2} + \frac{W}{y_1\,y_2} + \frac{W}{z_1\,z_2}$ i $V = \frac{W}{x_1} + \frac{W}{x_2} + \frac{W}{y_1} + \frac{W}{y_2} + \frac{W}{z_1} + \frac{W}{z_2}$. Onda je $U\,r^2 - V\,r + 2\,W = 0$.*

Taj izraz za duljinu visine možemo također koristiti i u poznatim nejednakostima $h_a + h_b + h_c \geq 9\,r$ i $h_a\,h_b\,h_c \geq 27\,r^3$ i slično kao i gore zaključiti da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 2. *Uz pretpostavke iz korolara 1, vrijedi*

$$9\,r^4 - 9\,\sigma_1\,r^3 + (9\,U + 2\,V)\,r^2 - (9\,M + 2\,N)\,r + 2\,\sigma_4 \geq 0,$$

$$27\,r^6 - 27\,\sigma_1\,r^5 - 27\,(\sigma_2 - V)\,r^4 - 27\,P\,r^3 + 8\,\sigma_6 \geq 0,$$

gdje je $V = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$, $U = \sigma_2 - V$, $M = \sum_{i,j,k=1}^{2} x_i\,y_j\,z_k$, $N = \sigma_3 - M$, i $P = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$, a σ_k je ciklička suma svih produkata od k elemenata iz skupa $\{\,x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\,\}$.

5. Jednaki polumjeri

Posebnu pažnju privukla su pitanja kada će biti $r^A = r^B$ odnosno $\varrho_u = \varrho_v$.

Kada se u jednakost $h_c = \frac{2\,r^A\,r^B}{r^A + r^B - r}$ stavi $\vartheta_c = r^A = r^B$ i riješi po ϑ_c dobiva se $\vartheta_c = \frac{h_c - \sqrt{h_c^2 - 2\,r\,h_c}}{2}$. Drugo rješenje $\vartheta_c^* = \frac{h_c + \sqrt{h_c^2 - 2\,r\,h_c}}{2}$ nije polumjer jednakih kružnica upisanih u trokute FCA i FCB jer je

$2\,\vartheta_c^* > h_c$ dok je očigledno da su promjeri tih kružnica manji od duljine visine h_c. Koristeći tu formulu za ϑ_c (koja je poseban slučaj problema 5.4.11 u [7]), naš dokaz relacije

$$\left(\frac{r}{\vartheta_a}-1\right)^2+\left(\frac{r}{\vartheta_b}-1\right)^2+\left(\frac{r}{\vartheta_c}-1\right)^2=1$$

iz članka [13] (gdje je ta formula za ϑ_c ponovo izvedena) u programu Maple V ima sljedeći unos (eng. input):

```
ro:=h->(h-sqrt(h^2-2*h*r))/2:  z:=u->(r/ro(u)-1)^2:
factor(simplify(subs(S=(a+b+c)*r/2,
subs({a=2*S/a, b=2*S/b, c=2*S/c}, z(a)+z(b)+z(c)-1)));
```

Kao izračun dobije se nula što zaključuje dokaz uz pomoć računala. Ista metoda odmah nam pruža mogućnost da dokažemo i ovu relaciju koja još uvijek ima dosta jednostavan iskaz:

$$\left(\frac{r}{\vartheta_a}-1\right)^4+\left(\frac{r}{\vartheta_b}-1\right)^4+\left(\frac{r}{\vartheta_c}-1\right)^4=\frac{3\,(a^2+b^2+c^2)-2\,(b\,c+c\,a+a\,b)}{a^2+b^2+c^2+2\,(b\,c+c\,a+a\,b)}.$$

Za njen dokaz treba u definiciji funkcije `z` zamijeniti eksponent 2 s 4 i u izrazu `z(a)+z(b)+z(c)-1` zamijeniti broj 1 s `x` i riješiti po x.

Analogno, kada se u jednakost $h_c = \frac{2\,\varrho_u\,\varrho_v}{\varrho_c-\varrho_u-\varrho_v}$ stavi $\xi_c = \varrho_u = \varrho_v$ i riješi po ξ_c dobiva se $\xi_c = \frac{-h_c+\sqrt{h_c^2+2\,\varrho_c\,h_c}}{2}$. Koristeći tu formulu za ξ_c možemo na sličan način dokazati relaciju

$$\frac{1}{\varrho_a}\left(\frac{\varrho_a}{\xi_a}-1\right)^2+\frac{1}{\varrho_b}\left(\frac{\varrho_b}{\xi_b}-1\right)^2+\frac{1}{\varrho_c}\left(\frac{\varrho_c}{\xi_c}-1\right)^2=\frac{3}{r}$$

Ista metoda odmah nam pruža mogućnost da dokažemo i ovu relaciju

$$\frac{1}{\varrho_a}\left(\frac{\varrho_a}{\xi_a}-1\right)^4+\frac{1}{\varrho_b}\left(\frac{\varrho_b}{\xi_b}-1\right)^4+\frac{1}{\varrho_c}\left(\frac{\varrho_c}{\xi_c}-1\right)^4=\frac{5}{r}+4\left(\frac{\varrho_a}{h_a^2}+\frac{\varrho_b}{h_b^2}+\frac{\varrho_c}{h_c^2}\right).$$

S druge strane, ako u relaciji $c\,r^A\,r^B + S\,(r-r^A-r^B)=0$ stavimo $\vartheta_c = r^A = r^B$ i $r=\frac{2\,S}{a+b+c}$ i riješimo po varijabli S dobit ćemo

$$S=\frac{(a+b+c+\sqrt{(a+b)^2-c^2})\,\vartheta_c}{2}.$$

Slično, ako u relaciji $c\,\varrho_u\,\varrho_v + S\,(\varrho_u+\varrho_v-\varrho_c)=0$ stavimo $\xi_c=\varrho_u=\varrho_v$ i $\varrho_c=\frac{2\,S}{a+b-c}$ i riješimo po varijabli S dobit ćemo

$$S=\frac{(a+b-c+\sqrt{(a+b)^2-c^2})\,\xi_c}{2}.$$

Kako je $S=\frac{(a+b+c)\,r}{2}$, možemo lagano zaključiti (vidi [13]) da je polumjer dvije jednake kružnice upisane u trokute FCA i FCB također moguće izraziti kao

$$\vartheta_c = \frac{(a+b+c)r}{a+b+c+\sqrt{(a+b)^2-c^2}} = \frac{r\left(a+b+c-\sqrt{(a+b)^2-c^2}\right)}{2\,c}.$$

Na isti način iz $S = \frac{(a+b-c)\,\varrho_c}{2}$, možemo lagano zaključiti da je polumjer dvije jednake kružnice pripisane trokutima FCA i FCB (koje diraju stranice $|AF|$ i $|FB|$) moguće prikazati kao

$$\xi_c = \frac{(a+b-c)\varrho_c}{a+b-c+\sqrt{(a+b)^2-c^2}} = \frac{\varrho_c\left(\sqrt{(a+b)^2-c^2}-a-b+c\right)}{2\,c}.$$

6. Duljine zajedničkih stranica

Promatrajmo sada na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom točke D, E i F takve da parovi trokuta (ABD, ADC), (BCE, BEA) i (CAF, CFB) imaju jednake polumjere upisanih kružnica. Neka je $d = |AD|$, $e = |BE|$ i $f = |CF|$. Ako jednakost $S_1 + S_2 = S$ napišemo kao

$$\frac{(b+u+f)\vartheta_c}{2} + \frac{(a+v+f)\vartheta_c}{2} = \frac{(a+b+c+\sqrt{(a+b)^2-c^2})\,\vartheta_c}{2}$$

dobit ćemo $f = \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2} = \sqrt{s\,s_c}$ kao i u članku [13] budući da je $u+v=c$ i $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Analogno možemo promatrati na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom točke D, E i F takve da parovi trokuta (ABD, ADC), (BCE, BEA) i (CAF, CFB) imaju jednake polumjere pripisanih kružnica (zajedničkih vrhova). Neka je $d = |AD|$, $e = |BE|$ i $f = |CF|$. Ako jednakost $S_1 + S_2 = S$ napišemo kao

$$\frac{(b-u+f)\xi_c}{2} + \frac{(a-v+f)\xi_c}{2} = \frac{(a+b-c+\sqrt{(a+b)^2-c^2})\,\xi_c}{2}$$

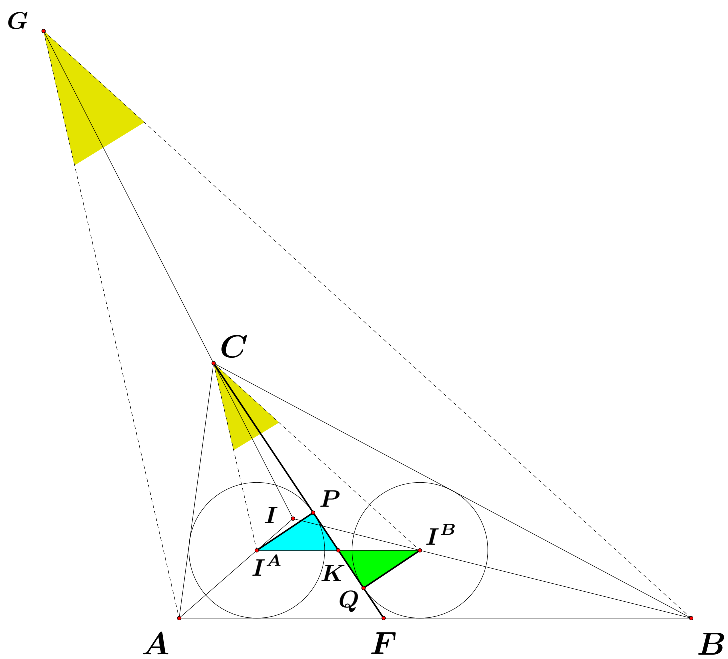
dobit ćemo ponovo $f = \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2} = \sqrt{s\,s_c}$ što vodi na važan zaključak da susjedni trokuti imaju jednake polumjere upisanih kružnica onda i samo onda kada imaju jednake polumjere pripisanih kružnica (zajedničkog vrha).

S tim prikazom duljine f dužine CF, i sličnih za d i e, možemo sada istražiti različite simetrične funkcije u varijablama d, e i f i pogledati daju li neke od njih interesantne zaključke. To ćemo sada učiniti za funkcije V i U definirane pravilima $m \mapsto (e\,f)^m + (f\,d)^m + (d\,e)^m$ i $m \mapsto d^m + e^m + f^m$. Uvedimo oznake $\sigma = a+b+c$, $\kappa = a^2+b^2+c^2$, i $\tau = b\,c + c\,a + a\,b$. Onda vrijedi $U(2) = \frac{\sigma^2}{4}$ (tj., $d^2+e^2+f^2 = s^2$ (vidi

[13])), $U(4) = \frac{\sigma^2(3\,\kappa - 2\,\tau)}{16}$ i $U(-2) = \frac{2\,\tau - \kappa}{4\,S^2}$. Slično, za funkciju V vrijedi $V(2) = \frac{\sigma^2(2\,\tau - \kappa)}{16}$, $V(-2) = \frac{1}{S^2}$, i $V(-4) = \frac{3\,\kappa - 2\,\tau}{\sigma^2\,S^2}$. Dokazi tih jednakosti uz pomoć računala su izuzetno jednostavni pa ih prepuštamo čitateljima za vježbu.

7. Prva konstrukcija točke F

Problem određivanja točke F na hipotenuzi $|AB|$ pravokutnog trokuta ABC takve da trokuti FCA i FCB imaju jednake polumjere upisanih kružnica postavljen je u sovjetskom časopisu "Matematika u školi" još 1954. godine u [10] kada je i dano rješenje (koje nigdje ne koristi pretpostavku da je trokut pravokutan). Kasnije je 1960. godine u istom časopisu u [11] dana konstrukcija točke F ravnalom i šestarom. Nju ćemo sada malo pojednostavljenu opisati.

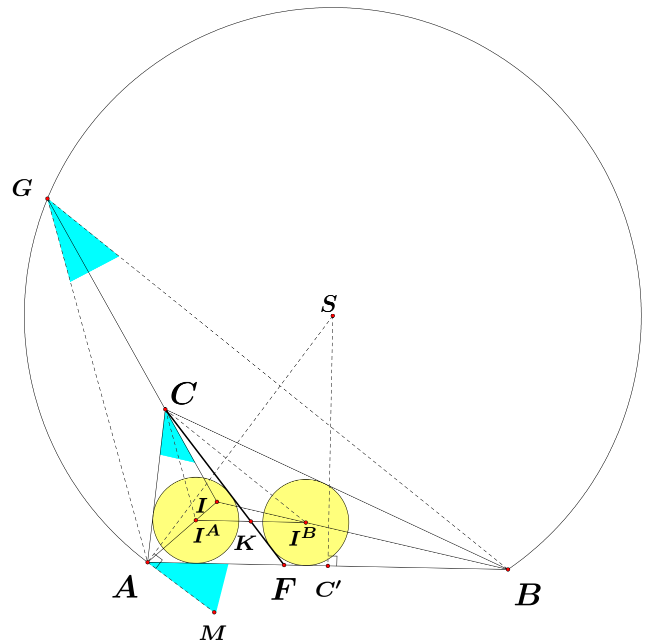


Slika 4: Analiza prve konstrukcije.

Pretpostavimo da smo točku F već odredili. Neka su P i Q projekcije središta I^A i I^B upisanih kružnica trokuta FCA i FCB na dužinu CF i neka je K presjek pravaca CF i I^AI^B. Onda je po pretpostavci $|I^AP| = |I^BQ|$ pa su pravokutni trokuti I^APK i I^BQK sukladni i točka K je polovište dužine I^AI^B (vidi Sliku 4). S druge strane, jer su CI^A i CI^B simetrale kuteva $\sphericalangle ACF$ i $\sphericalangle FCB$ vidimo da je $\sphericalangle I^ACI^B = \frac{\sphericalangle C}{2}$. Ako je G presjek paralela kroz točke A i B sa pravcima CI^A i CI^B

onda je $\sphericalangle AGB = \frac{\sphericalangle C}{2}$ i točka G leži na simetrali kuta $\sphericalangle C$ jer su trokuti AGB i I^ACI^B homotetični iz središta I upisane kružnice trokuta ABC budući da su im odgovarajuće stranice paralelne i pravci AI^A i BI^B se sijeku u I.

Zato su koraci za konstrukciju točke F sljedeći (vidi Sliku 5):



Slika 5: Prva konstrukcija točke F.

(1) Na dužinu $|AB|$ prenesemo kut $\frac{\sphericalangle C}{2}$ (tj. odredimo točku M takvu da je $\sphericalangle MAB = \frac{\sphericalangle C}{2}$).

(2) Presjek simetrale dužine $|AB|$ i okomice u točki A na pravac AM je središte S luka kružnice koji predstavlja geometrijsko mjesto svih točaka iz kojih se dužina $|AB|$ vidi pod kutem $\frac{\sphericalangle C}{2}$.

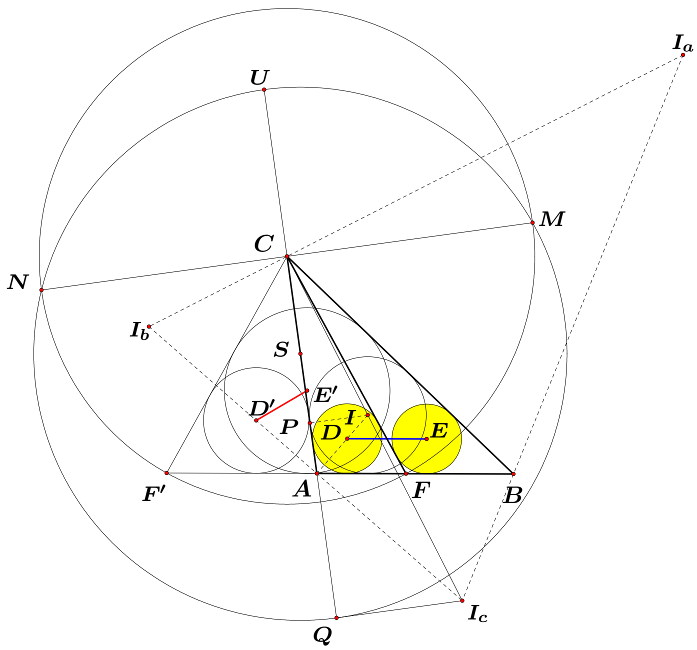
(3) Neka je G presjek toga luka sa zrakom IC.

(4) Neka su I^A i I^B presjeci pravaca AI i BI s paralelama točkom C s pravcima AG i BG. Neka je K polovište dužine I^AI^B.

(5) Tražena točka F je presjek pravaca AB i CK.

8. Druga konstrukcija točke F

Druga konstrukcija točke F koristi činjenicu da je $|CF|$ jednako kvadratnom korijenu iz produkta poluopsega $s = \frac{a+b+c}{2}$ i $s_c = \frac{a+b-c}{2}$. Neka su P i Q projekcije središta I upisane kružnice i I_c središta pripisane kružnice trokuta ABC na pravac AC. Budući da je $|CP| = s_c$ i $|CQ| = s$, koraci druge konstrukcije su sljedeći (vidi Sliku 6):



Slika 6: Druga konstrukcija točke F.

(1) Prvo nađemo točke I i I_c (presjek pravca CI s okomicom u točki A na pravac AI) i njihove projekcije P i Q na pravac AC.

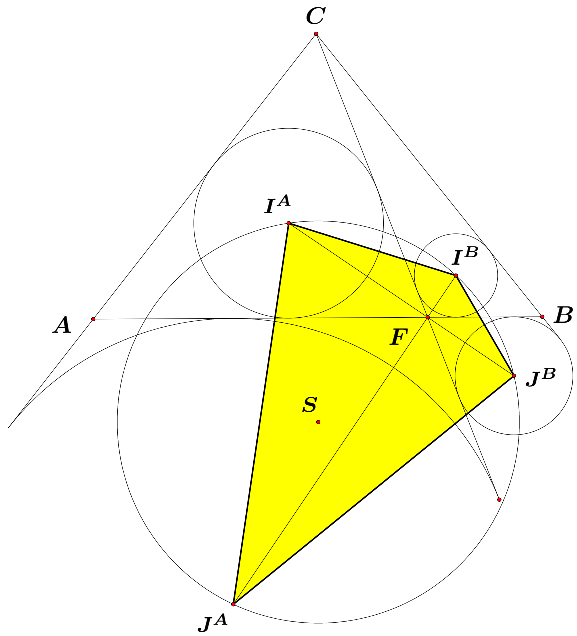
(2) Neka je U refleksija točke P u točki C. Onda je $|CQ| = s$ i $|CU| = s_c$. Neka je S polovište dužine QU. Okomica u točki C na pravac AC siječe kružnicu kojoj je dužina $|QU|$ promjer u točkama M i N. Pri tome je $|CM| = |CN| = \sqrt{|QC| \cdot |CU|} = \sqrt{s\, s_c}$.

(3) Kružnica sa središtem u točki C i polumjerom $|CN|$ siječe pravac AB u točkama F i F'. Neka su D, E, D' i E' središta upisanih kružnica trokuta FCA, FCB, $F'CA$ i $F'CB$. Ako pravac CF prolazi polovištem dužine $|DE|$ onda je F tražena točka. U protivnom je to točka F'.

9. Istokračni trokuti i susjedni trokuti

Središta upisanih i pripisanih kružnica susjednih trokuta možemo iskoristiti za ovu karakterizaciju istokračnih trokuta odnosno kao ilustraciju pojavljivanja tetivnih četverokuta s okomitim dijagonalama (vidi Sliku 7).

Teorem 6. *Neka su FCA i FCB susjedni trokuti i neka su I^A, J^A i I^B, J^B središta upisane i pripisane kružnice trokuta FCA i FCB. Četverokut $J^A I^A I^B J^B$ ima okomite dijagonale. On će biti tetivan onda i samo onda ako je $a = |CB| = |CA| = b$.*



Slika 7: Četverokut s vrhovima u središtima upisanih i pripisanih kružnica.

Dokaz. Opisati ćemo kako ovaj teorem dokazati u programu Maple V na računalu.

Koristit ćemo pravokutni koordinatni sistem u ravnini i pretpostaviti da točke C, B, I^B i F imaju koordinate $\left(\frac{(f^2-1)\,g\,r_2}{f\,g-1},\ \frac{2\,f\,g\,r_2}{f\,g-1}\right)$, $(r_2\,(f+g),\ 0)$, $(f\,r_2,\ r_2)$ i $(0,\ 0)$ za neke pozitivne realne brojeve f, g i r_2. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova F i B u trokutu FCB dok je r_2 polumjer njegove upisane kružnice. Primijetimo da je $\frac{\sphericalangle F}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2} < \frac{\pi}{2}$ pa je

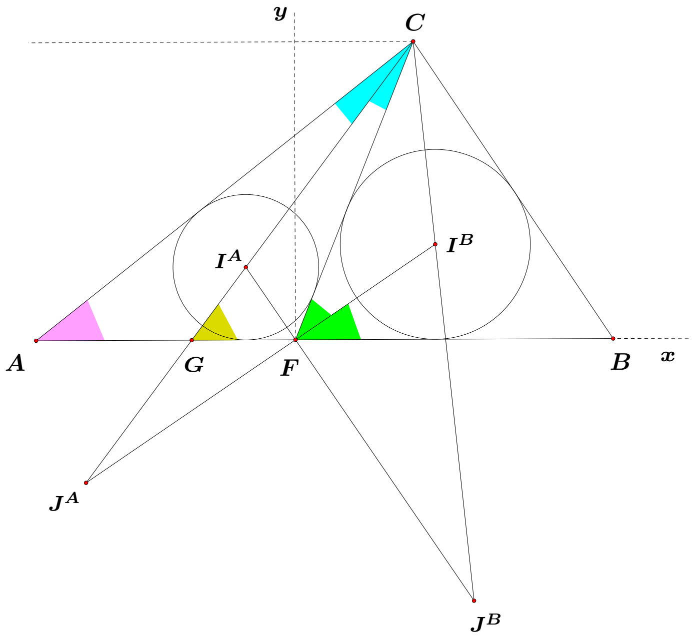
$$0 < \cot\left(\frac{\sphericalangle F}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2}\right) = \frac{f+g}{f\,g-1}$$

što povlači nejednakost $f\,g > 1$.

Prvo zadajemo točke. Za objašnjenje funkcija koje koristimo pogledajte članak [4].

```
C:=[(f^2-1)*g*r[2]/(f*g-1),2*f*g*r[2]/(f*g-1)]:
B:=[(f+g)*r[2],0]: F:=[0,0]: IB:=[f*r[2],0]
```

Ako je kotangens kuta $\sphericalangle FCI^A$ realni broj h onda je $h > f$ jer je $\sphericalangle ACF < \sphericalangle CFB$. Neka pravac CI^A siječe pravac FB u točki G. Onda je $\sphericalangle CAB = 2(\sphericalangle I^B FB - \sphericalangle GCF)$ i $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle I^B FB - \sphericalangle GCF$ (vidi Sliku 8). Sada lagano izračunamo naklone pravaca AC i GC.



Slika 8: Odabir koordinata točaka u dokazu Teorema 6.

```
kAC:=FS(subs({tan(x)=1/f,tan(y)=1/h},expand(tan(2*(x-y))))):
kGC:=FS(subs({tan(x)=1/f,tan(y)=1/h},expand(tan(2*x-y))):
```

Trojke koeficijenata njihovih jednadžbi daje funkcija `pravackt`.

```
pAC:=pravackt(kAC,C):pGC:=pravackt(kGC,C):
```

Točke A, I^A, J^A i J^B su presjeci odgovarajućih pravaca.

```
A:=presjek2p(pravac2t(F,B),pAC):
IA:=presjek2p(okomica(F,pravac2t(F,IB)),pGC):
JA:=presjek2p(pravac2t(F,IB),pGC):
JB:=presjek2p(pravac2t(C,IB), okomica(F,pravac2t(F,IB))):
```

Sada nađemo središte S opisane kružnice trokuta $I^A I^B J^B$.

```
S:=presjek2p(okomica(poloviste(IA,IB),pravac2t(IA,IB)),
              okomica(poloviste(IB,JB),pravac2t(IB,JB)));
```

Zatražimo li sada da četvrta točka J^A ima od točke S istu udaljenost kao i točka I^B dobit ćemo nužan i dovoljan uvjet da $J^A I^A I^B J^B$ bude tetivan četverokut (tj. da mu vrhovi leže na kružnici).

```
uvj1:=FS(udaljenost2t(JA,S)^2-udaljenost2t(IB,S)^2)=0;
```

Slično je

```
uvj2:=FS(udaljenost2t(A,C)^2-udaljenost2t(B,C)^2)=0;
```

uvjet da su stranice $|AC|$ i $|BC|$ trokuta ABC iste duljine.

Rješenja prvog uvjeta su $h_1 = \frac{f+g}{1-f\,g}$ i $h_2 = \frac{1+f\,g}{g-f}$ a drugog vrijednosti h_1 i h_2 i još $h_3 = \frac{f-g}{1+f\,g}$ i $h_4 = \frac{f\,g-1}{f+g}$. Dokaz je gotov ako primjetimo da su vrijednosti h_3 i h_4 obje manje od f pa ne mogu nastupiti u našoj situaciji. $\square$

Napomena. Pojedini dijelovi ovog članka dolaze nešto izmijenjeni iz autorovog rada [2].

Literatura

[1] Zvonko Čerin, *Geometrijski problem iz Latvije*, mathe, (prijavljeno). Na Internet adresi: `http://www.math.hr/~mathe`.

[2] Zvonko Čerin, *Chains of circles in triangles*, (prijavljeno).

[3] Zvonko Čerin, *Nizovi kružnica u trokutima*, Matematičko-fizički list, **54** br. 4 (2003/2004), 244-248. (prvobitna duža verzija je na adresi `http://www.math.hr/~cerin`).

[4] M. Bator, Z. Čerin i M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list, 54 (2003/2004), 36-47.

[5] H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[6] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Canada, 1997.

[7] H. Fukagawa i J. F. Rigby, *Traditional Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries*, SCT Publishing, Singapore, 2002.

[8] Željko Hanjš, *Stewartov teorem*, Matematičko-fizički list, 47 (1996/1997), 157-158.

[9] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, 2000. (Internet address: `http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia/`).

[10] Matematika u školi, Moskva, SSSR, 1954, br. 5, str. 86.

[11] Matematika u školi, Moskva, SSSR, 1960, br. 6, str. 82.

[12] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[13] Vladimir Volenec i Željko Hanjš, *A Property of Triangles*, Mathematics and Informatics Quarterly, **12** (2002), 48–49.

[14] Hinoto Yonemitsu i Jim Boyd, *A Problem from Seventeenth Century Japan*, Mathematics and Informatics Quarterly, **12** (2002), 139–141.