NIZOVI KRUŽNICA U TROKUTIMA

ZVONKO ČERIN*, ZAGREB

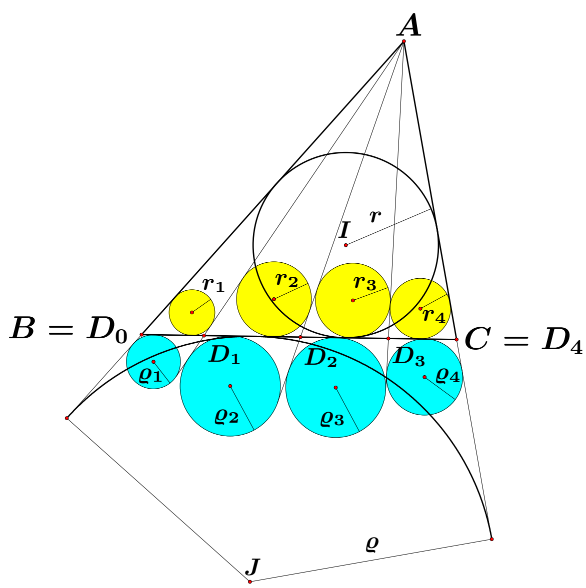
Sažetak. Za uređeni konačan niz točaka $D_0 = B,\ D_1,\ D_2, \dots,\ D_{n-1},\ D_n = C$ na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC želimo odrediti vezu koja vrijedi za polumjere $r,\ r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n$ upisanih kružnica trokuta ABC i $AD_{k-1}D_k$ za $k = 1, \dots, n$ i za polumjere $\varrho,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \dots,\ \varrho_n$ pripisanih kružnica trokutima ABC i $AD_{k-1}D_k$ za $k = 1, \dots, n$ koje dodiruju stranicu $\overline{BC}$. Te veze su izražene formulama

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{r_1}{\varrho_1}\,\frac{r_2}{\varrho_2} \cdots \frac{r_n}{\varrho_n}$$

i

$$1 - \frac{2\,r}{h} = \left(1 - \frac{2\,r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2\,r_2}{h}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\,r_n}{h}\right),$$

gdje je h duljina visine iz vrha A na pravac BC. Razmatramo i posebno interesantan slučaj kada je $n = 2$ i $r_1 = r_2$. Na taj način postižemo poboljšanja dvaju članaka [10] i [11].



Slika 1: Slučaj $n = 4$.

* Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu PMF-a Sveučilišta u Zagrebu. Bavi se topologijom, geometrijom i matematičkom edukacijom.
e-mail: cerin@math.hr.

U ovom članku želimo opisati mala poboljšanja nekih rezultata o kružnicama i trokutima iz nedavno izašle nove knjige [6]. Radi se o dijeljenju trokuta na konačan broj trokuta i potrazi za odnosima koji postoje među polumjerima njima upisanih i pripisanih kružnica.

Za bilo koji prirodan broj n, neka je $D_0 = B$, D_1, D_2,... , D_{n-1}, $D_n = C$ uređeni skup od $n+1$ različitih točaka na stranici $\overline{BC}$ bilo kakvog trokuta ABC. Neka nam $r, r_1, r_2, \dots, r_n$ označavaju polumjere kružnica upisanih redom u trokute ABC i $AD_{k-1}D_k$ za $k = 1, \dots, n$. Neka ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ... , ϱ_n budu polumjeri pripadnih pripisanih kružnica koje dodiruju stranicu $\overline{BC}$ (vidi sliku 1 za slučaj $n = 4$). Neka je $\mu = 1 - \frac{2\,r}{h}$ i $\nu = \frac{r}{\varrho}$, gdje h označava duljinu visine iz vrha A na pravac BC. Pozitivni realni brojevi μ_k i ν_k se slično definiraju za svaki trokut $AD_{k-1}D_k$. Slova a, b i c označavaju duljine stranica trokuta ABC. Prisjetimo se (vidi [4, str. 13, Exercise 5] ili [9, str. 68]) da je $S = \frac{a\,h}{2} = r\,s = \varrho\,(s-a)$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg i S površina trokuta ABC.

U prva dva dokaza teorema 1 koristiti ćemo sljedeću lemu.

Lema 1.

$$\mu = \nu = \frac{c+b-a}{c+b+a}.$$

Dokaz. Imamo

$$\mu = 1 - \frac{2\,r}{\frac{2\,r\,s}{a}} = 1 - \frac{a}{s} = \frac{c+b-a}{c+b+a}$$

i

$$\nu = \frac{s-a}{s} = \frac{c+b-a}{c+b+a}.$$

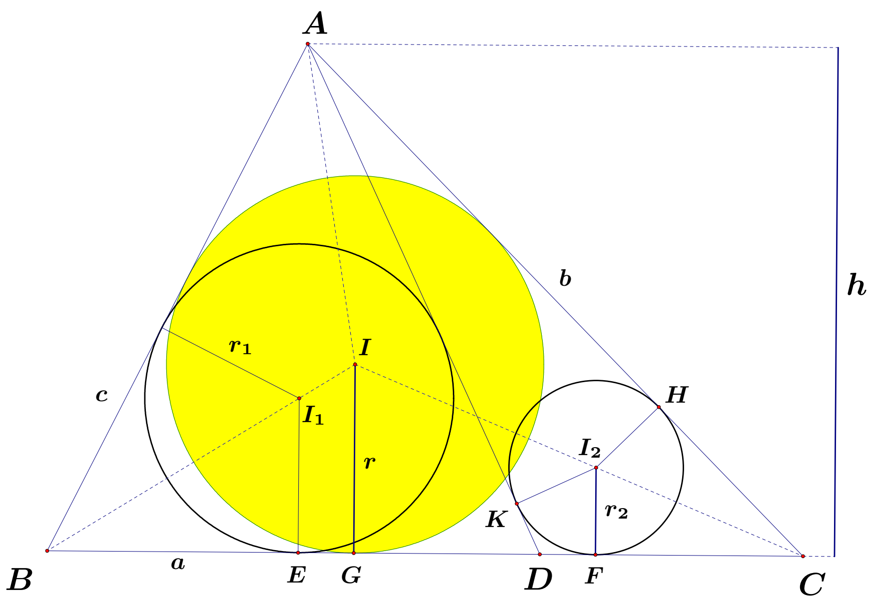
□

Prvi dio teorema 1 za $n = 2$ pojavljuje se kao primjer 5 u [6, str. 33] i za $n = 3$ kao problem 5.4.10 u [6, str. 41] dok je drugi dio za $n = 2$ bio prvi problem na 12. međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Keszthelyu (Mađarska) 1970. godine (vidi također [8]). Treći zadatak drugog izbornog kruga na latvijskoj 44. matematičkoj olimpijadi 1994. godine (vidi [5, str. 8]) je tražio da se dokaže da produkt $\nu_1\,\nu_2\,\cdots\,\nu_n$ ne zavisi od broja n niti od izbora točaka D_0, D_1,..., D_n. Još jedan zadatak s istog takmičenja prikazao je autor u članku [1].

Teorem 1. *Brojevi μ, ν, μ_k i ν_k zadovoljavaju jednakosti*

$$\mu = \mu_1\,\mu_2\,\cdots\,\mu_n \qquad i \qquad \nu = \nu_1\,\nu_2\,\cdots\,\nu_n.$$

Dokaz. Budući da je $\mu = \nu$ i $\mu_k = \nu_k$ za $k = 1, \dots, n$, dovoljno je dokazati samo prvu jednakost. Njen dokaz se lagano provodi matematičkom indukcijom ako znamo da je ona točna za $n = 2$. U [6, str. 33] dan je potpuno elementaran dokaz ovog posebnog slučaja. Njega ćemo iznijeti niže. Poslije ćemo izložiti još tri nova dokaza. Prva dva povezuju jednakost $\mu = \mu_1 \mu_2$ sa Stewartovim teoremom (vidi [4, str. 6], [7], [8], i [9, str. 58]). Drugi je načinjen na računalu u složenim računalnim programima (softwareu) Maple V i Mathematica. Treći dokaz (samo u programu Maple V) koristi pravokutne koordinate i formulu $r = \frac{S}{s}$ bez leme 1 i Stewartovog teorema. Umjesto relacije $\mu = \mu_1 \mu_2$ dokazuje se ekvivalentna jednakost $a\, r_1\, r_2 + S(r - r_1 - r_2) = 0$. $\square$



Slika 2: Oznake za prvi dokaz slučaja $n = 2$.

Prvi dokaz iz knjige [6]. Neka je $D = D_1$ unutrašnja točka stranice $\overline{BC}$ i neka su I, I_1 i I_2 središta upisanih kružnica trokuta ABC, ABD i ADC. Označimo ortogonalne projekcije točaka I, I_1 i I_2 na stranicu $\overline{BC}$ s G, E i F a ortogonalne projekcije točke I_2 na pravce AC i AD s H i K. Iz sličnih (pravokutnih) trokuta CIG i CI_2F imamo $\frac{r_2}{|CF|} = \frac{r}{|CG|}$ ili $|CF| = \frac{r_2}{r}|CG|$ gdje je $|CG| = \frac{a+b-c}{2} = s - c$.

Površina S_1 trokuta ABD je

$$\frac{1}{2}\, r_1 \left[|AB| + |BD| + (|DK| + |KA|)\right] =$$

(jer je površina umnožak polumjera upisane kružnice i polovice opsega)

$$\frac{1}{2}\, r_1 \left[|AB| + (|BD| + |DF|) + |AH|\right] =$$

(jer je $|DK| = |DF|$ i $|KA| = |AH|$)

$$\frac{1}{2}\, r_1 \left[|AB| + (|BC| - |CF|) + (|AC| - |CF|)\right] =$$

(jer je $|BD| + |DF| = |BF| = |BC| - |CF|$ i
$|AH| = |AC| - |CH| = |AC| - |CF|$)

$$\frac{1}{2}\, r_1 \left[|AB| + |BC| + |AC| - 2\,|CF|)\right] = r_1 \left[s - (s-c)\frac{r_2}{r}\right]$$

(jer je $|AB| + |BC| + |AC| = 2\, s$ i $|CF| = (s-c)\frac{r_2}{r}$).

Na sličan način se vidi da je površina S_2 trokuta ADC dana izrazom $r_2\left[s - (s-b)\frac{r_1}{r}\right]$. Zato je

$$\frac{a\,h}{2} = S = S_1 + S_2 = (r_1 + r_2)\, s - a\,\frac{r_1\, r_2}{r}.$$

Nakon množenja obiju strana s $2\, r$ imamo

$$a\, h\, r = 2\,(r_1 + r_2)\, r\, s - 2\, a\, r_1\, r_2$$

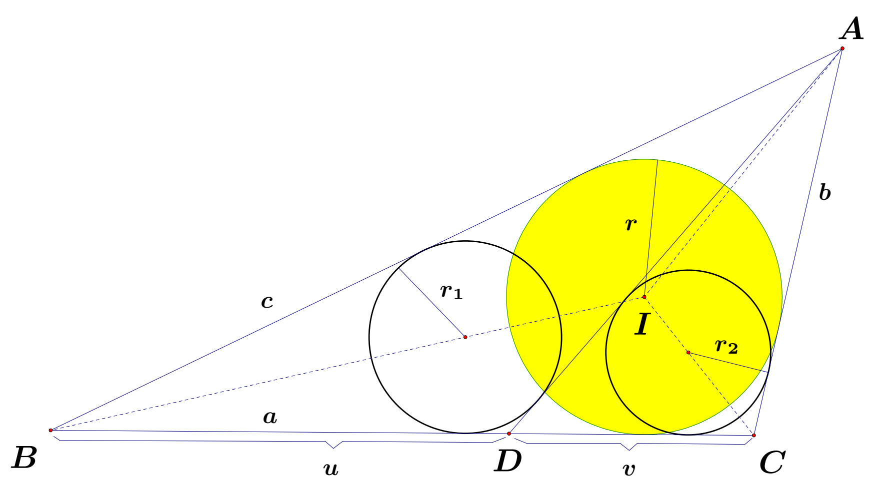
i stoga

$$r = (r_1 + r_2) - \frac{2\, r_1\, r_2}{h},$$

jer je $r\, s = \frac{a\,h}{2}$. I na kraju se dobiva

$$1 - \frac{2\, r}{h} = 1 - \frac{2\,(r_1 + r_2)}{h} + \frac{4\, r_1\, r_2}{h^2} = \left(1 - \frac{2\, r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2\, r_2}{h}\right)$$

kao što smo i željeli. $\square$



Slika 3: Oznake za drugi dokaz slučaja $n = 2$.

Drugi dokaz pomoću Stewartovog teorema. Neka je $D = D_1$ unutrašnja točka stranice $\overline{BC}$. Neka je $u = |BD|$, $v = |DC|$ i $d = |AD|$. Razlika

$$\mu_1\,\mu_2 - \mu = \left(\frac{c+d-u}{c+d+u}\right)\left(\frac{b+d-v}{b+d+v}\right) - \frac{c+b-u-v}{c+b+u+v} =$$

$$\frac{2[(u+v)(d^2+u\,v)-c^2v-b^2u]}{(c+d+u)(b+d+v)(c+b+u+v)} = 0$$

jer je $(u+v)(d^2+u\,v) = c^2v + b^2u$ prema Stewartovom teoremu. $\square$

Treći dokaz u programima Maple V i Mathematica. Utipkajmo u program Maple V sljedeće naredbe:

```
m:=(a,b,c)->(b+c-a)/(b+c+a): e:=eliminate({mu[1]=m(u,c,d),
mu[2]=m(v,b,d), mu=m(u+v,b,c), (u+v)*(d^2+u*v)=c^2*v+b^2*u},
{b,c,d}):  factor(e[2][1]);
```

Za izračun dobijemo izraz $(u+v)(\mu_1-1)(\mu_2-1)(\mu_1\,\mu_2-\mu)$ koji mora biti jednak nula. Očigledno, to će se desiti onda i samo onda ako je $\mu = \mu_1\,\mu_2$.

Tako smo se opet uvjerili da su relacije $(u+v)(d^2+u\,v) = c^2v+b^2u$ (Stewartov teorem) i $\mu = \mu_1\,\mu_2$ ekvivalentne tvrdnje.

Gornje naredbe u programu Mathematica (s $m1$, $m2$ i $m0$ umjesto μ_1, μ_2 i μ) izgledaju ovako:

```
m[a_,b_,c_]=(b+c-a)/(b+c+a):
Eliminate[{m1==m[u,c,d], m2==m[v,b,d], m0==m[u+v,b,c],
(u+v)*(d^2+u*v)==c^2*v+b^2*u}, {b,c,d}];
```

Izračun će ovdje biti jednostavno tražena jednakost $m1\,m2 = m0$. $\square$

Četvrti dokaz u programu Maple V. Koristit ćemo pravokutni koordinatni sistem u ravnini i pretpostaviti da točke A, B, C i D imaju koordinate $\left(\frac{(f^2-1)\,g\,r_2}{f\,g-1}, \frac{2\,f\,g\,r_2}{f\,g-1}\right)$, $(-u,\,0)$, $(r_2\,(f+g),\,0)$ i $(0,\,0)$ za neke pozitivne realne brojeve f, g, r_2, i u. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova D i C u trokutu ADC dok je r_2 polumjer njegove upisane kružnice. Primijetimo da je $\frac{\sphericalangle C}{2} + \frac{\sphericalangle D}{2} < \frac{\pi}{2}$ pa je

$$0 < \cot\left(\frac{\sphericalangle C}{2} + \frac{\sphericalangle D}{2}\right) = \frac{g+f}{f\,g-1}$$

što povlači $f\,g > 1$. Još vrijedi i jednakost $r_1 = \frac{2\,S_1}{c+u+|AD|}$. Prvo zadajemo točke, skraćenicu `FS` i funkcije udaljenosti i površine (eng. <u>dis</u>tance i <u>ar</u>ea). Za objašnjenje tih funkcija pogledajte članak [3].

```
A:=[(f^2-1)*g*r[2]/(f*g-1),2*f*g*r[2]/(f*g-1)]: B:=[-u,0]:
C:=[(f+g)*r[2],0]: D_:=[0,0]: FS:=u->factor(simplify(u)):
```

```
di:=(a,b)->FS(sqrt((a[1]-b[1])^2+(a[2]-b[2])^2)):
ar:=(a,b,c)->FS((a[2]*c[1]-b[1]*a[2]-a[1]*c[2]+
                  a[1]*b[2]+b[1]*c[2]-c[1]*b[2])/2):
```

Dokaz se provodi tako da se vidi da je izračun (eng. output) sljedećih naredbi jednak nuli.

```
FS(subs({a=u+r[2]*(f+g),b=r[2]*f*(1+g^2)/(f*g-1),c=di(A,B),
r[1]=2*ar(A,B,D_)/(di(A,B)+u+(f^2+1)*g*r[2]/(f*g-1))},
a*r[1]*r[2]+ar(A,B,C)*(2*ar(A,B,C)/(a+b+c)-r[1]-r[2]))); □
```

Sada ćemo diskutirati neke posljedice teorema 1.

Za jednakostranični trokut vrijedi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ što uvršteno u $a\,r_1\,r_2 + S(r - r_1 - r_2) = 0$ daje $a^2 - 2\sqrt{3}\,a\,(r_1 + r_2) + 8\,r_1\,r_2 = 0$ a to je teorem iz zbirke "Sanpojojitsu" u Japanu (17. stoljeće). U članku [11] on je dokazan uz pomoć programa Mathematica.

Ako je D unutrašnja točka stranice $\overline{BC}$ (tj., $D \neq B$ i $D \neq C$), onda je $r_1 > 0$ i $r_2 > 0$ pa je uvijek $r_1 + r_2 > r$.

Jer je $S = \frac{a\,h}{2}$, gdje je $h = h_a$ duljina visine na stranicu $\overline{BC}$, dobivamo $h_a = \frac{2\,r_1\,r_2}{r_1+r_2-r}$. S druge strane, poznato je da duljine svih triju visina zadovoljavaju jednakost $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Uvrstimo li gornje vrijednosti za h_a, h_b i h_c u tu jednakost nakon sređivanja dobivamo sljedeći rezultat koji nam daje informaciju o šest polumjera upisanih kružnica u trokute određene unutrašnjim točkama na svakoj stranici.

Korolar 1. *Neka su X, Y, Z unutrašnje točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka r, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 budu polumjeri kružnica upisanih redom u trokute ABC, ABX, ACX, BCY, BAY, CAZ, CBZ. Neka je $W = x_1\,x_2\,y_1\,y_2\,z_1\,z_2$, $U = \frac{W}{x_1\,x_2} + \frac{W}{y_1\,y_2} + \frac{W}{z_1\,z_2}$ i $V = \frac{W}{x_1} + \frac{W}{x_2} + \frac{W}{y_1} + \frac{W}{y_2} + \frac{W}{z_1} + \frac{W}{z_2}$. Onda je $U\,r^2 - V\,r + 2\,W = 0$.*

Taj izraz za duljinu visine možemo također koristiti i u poznatim nejednakostima $h_a + h_b + h_c \geq 9\,r$ i $h_a\,h_b\,h_c \geq 27\,r^3$ i slično kao i gore zaključiti da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 2. *Uz pretpostavke iz korolara 1, vrijedi*

$$9\,r^4 - 9\,\sigma_1\,r^3 + (9\,U + 2\,V)\,r^2 - (9\,M + 2\,N)\,r + 2\,\sigma_4 \geq 0,$$

$$27\,r^6 - 27\,\sigma_1\,r^5 - 27\,(\sigma_2 - V)\,r^4 - 27\,P\,r^3 + 8\,\sigma_6 \geq 0,$$

gdje je $V = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$, $U = \sigma_2 - V$, $M = \sum_{i,j,k=1}^{2} x_i\,y_j\,z_k$, $N = \sigma_3 - M$, i $P = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$, a σ_k je ciklička suma svih produkata od k elemenata iz skupa $\{\,x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2,\,z_1,\,z_2\,\}$.

Kada se u jednakost $h_a = \frac{2\,r_1\,r_2}{r_1+r_2-r}$ stavi $\varrho_a = r_1 = r_2$ i riješi po ϱ_a dobiva se $\varrho_a = \frac{h_a - \sqrt{h_a^2 - 2\,r\,h_a}}{2}$. Drugo rješenje $\varrho_a^* = \frac{h_a + \sqrt{h_a^2 - 2\,r\,h_a}}{2}$ nije polumjer jednakih kružnica upisanih u trokute ABD i ACD jer je $2\,\varrho_a^* > h_a$ dok je očigledno da su promjeri tih kružnica manji od duljine visine h_a. Koristeći tu formulu za ϱ_a (koja je poseban slučaj problema 5.4.11 u [6]), naš dokaz relacije

$$\left(\frac{r}{\varrho_a}-1\right)^2+\left(\frac{r}{\varrho_b}-1\right)^2+\left(\frac{r}{\varrho_c}-1\right)^2=1$$

iz članka [10] (gdje je ta formula za ϱ_a ponovo izvedena) u programu Maple V ima sljedeći unos (eng. input):

```
ro:=h->(h-sqrt(h^2-2*h*r))/2:  z:=u->(r/ro(u)-1)^2:
FS(subs(S=(a+b+c)*r/2, subs({a=2*S/a, b=2*S/b, c=2*S/c},
z(a)+z(b)+z(c)-1)));
```

Kao izračun dobije se nula što zaključuje dokaz uz pomoć računala. Ista metoda odmah nam pruža mogućnost da dokažemo i ovu relaciju koja još uvijek ima dosta jednostavan iskaz:

$$\left(\frac{r}{\varrho_a}-1\right)^4+\left(\frac{r}{\varrho_b}-1\right)^4+\left(\frac{r}{\varrho_c}-1\right)^4=\frac{3\,(a^2+b^2+c^2)-2\,(b\,c+c\,a+a\,b)}{a^2+b^2+c^2+2\,(b\,c+c\,a+a\,b)}.$$

Za njen dokaz treba u definiciji funkcije `z` zamijeniti eksponent 2 s 4 i u izrazu `z(a)+z(b)+z(c)-1` zamijeniti broj 1 s `x` i riješiti po x.

S druge strane, ako u relaciji $a\,r_1\,r_2+S\,(r-r_1-r_2)=0$ stavimo $\varrho_a=r_1=r_2$ i $r=\frac{2\,S}{a+b+c}$ i riješimo po varijabli S dobit ćemo

$$S=\frac{(a+b+c+\sqrt{(b+c)^2-a^2})\,\varrho_a}{2}.$$

Kako je $S=\frac{(a+b+c)\,r}{2}$, možemo lagano zaključiti (vidi [10]) da je polumjer dvije jednake kružnice upisane u trokute ABD i ADC također moguće izraziti kao

$$\varrho_a=\frac{(a+b+c)r}{a+b+c+\sqrt{(b+c)^2-a^2}}=\frac{r\left(a+b+c-\sqrt{(b+c)^2-a^2}\right)}{2\,a}.$$

Promatrajmo sada na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom točke D, E i F takve da parovi trokuta (ABD, ADC), (BCE, BEA) i (CAF, CFB) imaju jednake polumjere upisanih kružnica. Neka je $d=|AD|$, $e=|BE|$ i $f=|CF|$. Ako jednakost $S_1+S_2=S$ napišemo kao

$$\frac{(c+|BD|+d)\varrho_a}{2}+\frac{(b+|DC|+d)\varrho_a}{2}=\frac{(a+b+c+\sqrt{(b+c)^2-a^2})\,\varrho_a}{2}$$

dobit ćemo $d=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2}=\sqrt{s(s-a)}$ kao i u članku [10] budući da je $|BD|+|DC|=|BC|=a$ i $s=\frac{a+b+c}{2}$.

S tim prikazom duljine d dužine AD, i sličnih za e i f, možemo sada istražiti različite simetrične funkcije u varijablama d, e i f i pogledati daju li neke od njih interesantne zaključke. To ćemo sada učiniti za funkcije k i j definirane pravilima $m \mapsto (e\,f)^m + (f\,d)^m + (d\,e)^m$ i $m \mapsto d^m + e^m + f^m$. Uvedimo oznake $\sigma = a + b + c$, $\kappa = a^2 + b^2 + c^2$, i $\tau = b\,c + c\,a + a\,b$. Onda vrijedi $j(2) = \frac{\sigma^2}{4}$ (tj., $d^2 + e^2 + f^2 = s^2$ (vidi [10])), $j(4) = \frac{\sigma^2(3\,\kappa - 2\,\tau)}{16}$ i $j(-2) = \frac{2\,\tau - \kappa}{4\,S^2}$. Slično, za funkciju k vrijedi $k(2) = \frac{\sigma^2(2\,\tau - \kappa)}{16}$, $k(-2) = \frac{1}{S^2}$, i $k(-4) = \frac{3\,\kappa - 2\,\tau}{\sigma^2\,S^2}$. Dokazi tih jednakosti uz pomoć računala su izuzetno jednostavni pa ih prepuštamo čitateljima za vježbu.

Napomena. Ovaj članak je malo izmijenjeni autorov rad [2].

Literatura

[1] Zvonko Čerin, *Problem iz Latvije*, E-Math, (prijavljeno). Na Internet adresi:
`http://www.math.hr/~emath`

[2] Zvonko Čerin, *Chains of circles in triangles*, (prijavljeno).

[3] M. Bator, Z. Čerin i M. Ćulav, *Analitička geometrija ravnine računalom*, Matematičko-fizički list, 54 (2003/2004), 36-47.

[4] H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[5] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Canada, 1997.

[6] H. Fukagawa i J. F. Rigby, *Traditional Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries*, SCT Publishing, Singapore, 2002.

[7] Marko Grba, *Trigonometrijski dokaz Stewartovog teorema*, Matematičko-fizički list, 53 (2002/2003), 209.

[8] Željko Hanjš, *Stewartov teorem*, Matematičko-fizički list, 47 (1996/1997), 157-158.

[9] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[10] Vladimir Volenec i Željko Hanjš, *A Property of Triangles*, Mathematics and Informatics Quarterly, **12** (2002), 48–49.

[11] Hinoto Yonemitsu i Jim Boyd, *A Problem from Seventeenth Century Japan*, Mathematics and Informatics Quarterly, **12** (2002), 139–141.