METRIČKI PROSTORI

Zvonko Čerin

redovni profesor

PMF-Matematički odjel

Sveučilišta u Zagrebu

Kopernikova 7
10010 Zagreb
CROATIA, Europe
CERIN@MATH.HR

Sažetak. Ovo je tekst predavanja iz kolegija "Metrički prostori" koje već više godina predajem u zimskom semestru i to dva sata tjedno (uz dva sata vježbi). Ranije je taj kolegij predavao prof. K. Horvatić. Ja sam uglavnom zadržao njegov slijed izlaganja i glavne teme ali sam načinio i neke preinake i dodao mnoge stvari. Krenuo sam od rukom pisanih zapisa anonimnog studenta njegovih predavanja i pripremio na računalu ovu verziju kojom želim razumjevanje i usvajanje ove dosta apstraktne materije što je moguće više olakšati mnogobrojnim crtežima. Svi dokazi su pažljivo i cjelovito izloženi. Djelovi koji su namijenjenji samo izuzetno sposobnim (tj. izvrsnim) studentima i studenticama započinju sa

——————————— $\boxed{5}$ ———————————

a završavaju sa

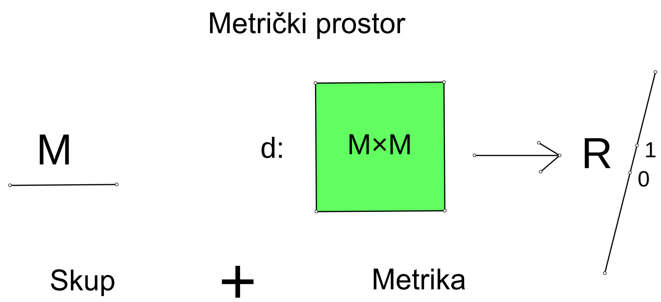
. . . . $\boxed{5}$ . . . .

Iako je ova verzija nepotpuna i nekorigirana nadam se da će ipak nekima biti korisna. Ako dobronamjerni čitatelji primjete neke pogreške ili imaju primjedbe bilo bi mi drago da ih uključim u budućim doradama teksta.

1. Metrički prostori

DEFINICIJA 1.1. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sa Kartezijevog kvadrata nepraznog skupa X u skup $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva kažemo da je *metrika* (na skupu X) ako ona zadovoljava slijedeća četiri uvjeta za bilo kakav izbor elemenata a, b, i c iz skupa X.

(MET 1) $d(a, b) \geq 0$.
(MET 2) $d(a, b) = 0$ ako i samo ako je $a = b$.
(MET 3) $d(a, b) = d(b, a)$.
(MET 4) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.



SLIKA 1. Definicija metričkog prostora.

Metriku na skupu možemo još nazivati i *funkcija udaljenosti*, *razdaljinska funkcija*, ili *metrička funkcija*. Naziv metrika je svakako najkraći pa se i najčešće koristi.

Uvjeti (MET 1) — (MET 4) su aksiomi metrike i svaki od njih dade se preciznije nazvati opisnim imenima POZITIVNA DEFINITNOST za (MET 1), STROGOST za (MET 2), SIMETRIČNOST za (MET 3), i NEJEDNAKOST TROKUTA za (MET 4). Dakle, metrika na skupu X je stroga simetrična pozitivno definitna realna funkcija na kvadratu $X \times X$ koja zadovoljava nejednakost trokuta.

Ako se aksiom (MET 2) zamijeni slabijim zahtjevom

(pseudoMET 2) $a = b$ povlači $d(a, b) = 0$.

onda se za funkciju d kaže da je *pseudometrika* na skupu X. Prema tome, aksiomi za pseudometriku su

- (MET 1),
- (pseudoMET 2),
- (MET 3), i
- (MET 4).

S druge strane, ako se ispusti simetričnost (MET 3), onda se za funkciju d kaže da je *kvazimetrika* na skupu X. Dakle, aksiomi za kvazimetriku su

- (MET 1),
- (MET 2), i
- (MET 4).

Slično, ako se pak aksiom (MET 4) zamijeni sa jačim zahtjevom

(ultraMET 4) $\quad d(a, c) \leq max\{d(a, b), d(b, c)\}$.

onda se za funkciju d kaže da je *ultrametrika* na skupu X. Prema tome, aksiomi za ultrametriku su

- (MET 1),
- (MET 2),
- (MET 3), i
- (ultraMET 4).

Definicija 1.2. Uređeni par (X, d) koji se sastoji od nepraznog skupa X i na njemu definirane metrike d nazivamo *metrički prostor* a pri tom elemente skupa X zovemo *točke* metričkog prostora.

Mnogo puta ćemo ispuštati naznaku metrike na metričkom prostoru pa ćemo pisati jednostavno X (ili neku drugo slovo ili oznaku) za metrički prostor dok će metrika na X biti jasna iz konteksta i pretežno će biti označena simbolom d ili ϱ (čitaj: ro – grčko slovo r).

Propozicija 1.1. *U svakom metričkom prostoru (X, d) za svaki prirodan broj $n \geq 3$ i za sve točke $x_1, \ldots, x_n$ iz X vrijedi nejednakost mnogokuta:*

(nMET 4) $\quad d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n = 3$, su (MET 4) i (3MET 4) očigledno ekvivalentne tvrdnje (radi se samo o zamjeni slova).

Pretpostavimo sada da nejednakost (nMET 4) vrijedi za $n = k$ za neki prirodan broj $k \geq 3$ i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ točke metričkog prostora X. Iz (MET 4) (stavimo li $a = x_1$, $b = x_k$, i $c = x_{k+1}$) slijedi nejednakost

$$d(x_1, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1}).$$

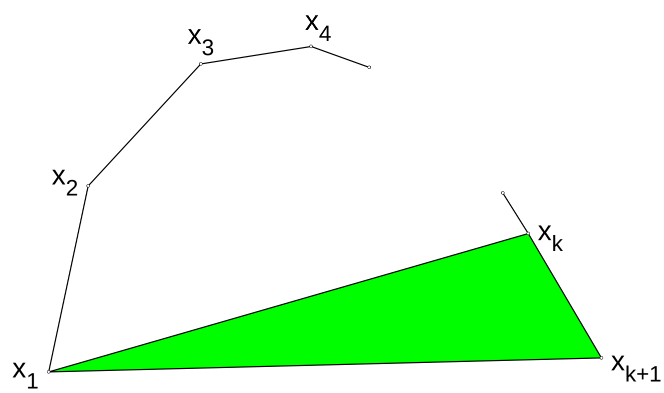
Po pretpostavci, prvi sumand desne strane gornje nejednakosti je manji ili najviše jednak sumi

$$d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k).$$

Zato je

$$d(x_1, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_k, x_{k+1}).$$

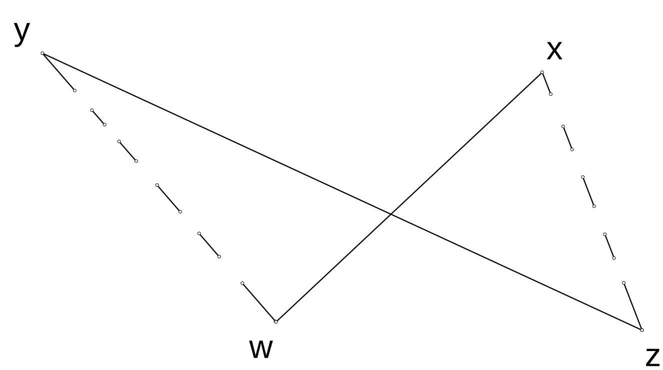
Time smo dokazali korak indukcije pa iz aksioma matematičke indukcije slijedi istinitost propozicije. $\square$



SLIKA 2. Korak indukcije u dokazu Propozicije 1.1.

PROPOZICIJA 1.2. *Za bilo koje četiri točke w, x, y, i z metričkog prostora X vrijedi nejednakost*

(MET 4č) $\quad |\, d(w,\, x) - d(y, z)\,| \le d(w,\, y) + d(x,\, z)$



SLIKA 3. U Propoziciji 1.2 je apsolutna vrijednost razlike duljina punih crta najviše jednaka zbroju isprekidanih crta.

DOKAZ. Primjenimo li Propoziciju 1.1 na točke w, y, z, x dobivamo

$$d(w,\, x) \le d(w,\, y) + d(y,\, z) + d(z,\, x)$$

pa prebacivanjem $d(y,\, z)$ na lijevu stranu i upotrebom simetričnosti slijedi

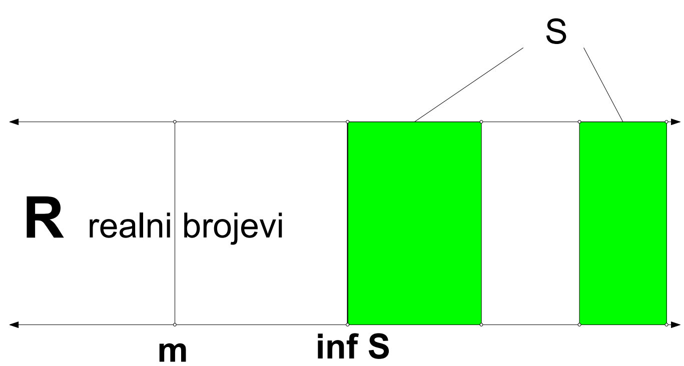
$$d(w,\, x) - d(y,\, z) \le d(w,\, y) + d(x,\, z)$$

Ponovimo li isto to za točke y, w, x, z slično dobivamo

$$d(y,\,z) - d(w,\,x) \leq d(w,\,y) + d(x,\,z).$$

Posljednje dvije nejednakosti povlače nejednakost (MET 4č). □

Prisjetimo se sada nekih pojmova vezanih uz prirodni uređaj skupa $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva. Realni broj m zovemo *donja međa* podskupa S od $\mathbb{R}$ ako je $m \leq s$ za svaki $s \in S$. Ako neprazni podskup S ima bar jednu donju među onda kažemo da je on *odozdo omeđen*. Za neprazni odozdo omeđen podskup S od $\mathbb{R}$, skup svih njegovih donjih međa prema svojstvu neprekidnosti realnih brojeva ima najveći element kojeg zovemo *infimum* (pod)skupa S i označavamo $inf\,S$. Dakle, infimum (pod)skupa S je takva njegova donja međa k da za svaku drugu njegovu donju među m vrijedi $m \leq k$. Prema tome, donja međa k od S je infimum ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $s \in S$ takav da je $k \leq s < k + \varepsilon$. Primjetimo da infimum (pod)skupa S može a i ne mora pripadati (pod)skupu S. Ako $inf\,S$ pripada (pod)skupu S onda je $inf\,S$ najmanji (minimalni) element (pod)skupa S.



Slika 4. Broj m je donja međa podskupa S od $\mathbb{R}$ a najveća od njih je njegov infimum inf S.

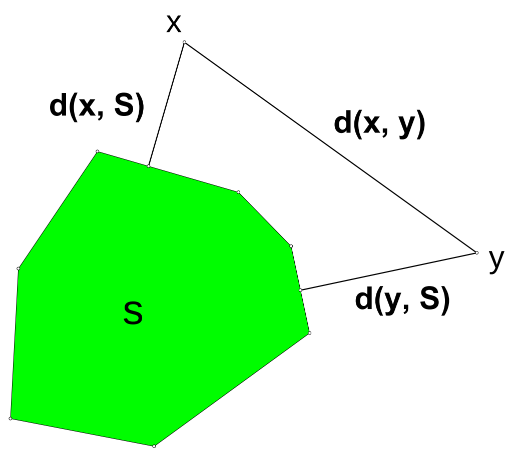
Potpuno analogno se za neprazni (pod)skup S u $\mathbb{R}$ definiraju gornje međe, supremum $sup\,S$ (najmanja gornja međa), i maksimum (ako on postoji, tj., ako je $sup\,S \in S$).

Ako je (pod)skup S u $\mathbb{R}$ istovremeno omeđen i odozgo i odozdo onda kažemo da je to *omeđeni* (pod)skup. Dakle, svaki neprazni omeđeni (pod)skup ima i infimum i supremum pri čemu niti jedan od njih ne mora pripadati tom (pod)skupu. Naprimjer, za otvoreni segment $(0,\,1)$ infimum je broj 0 (nula) a supremum je broj 1 (jedan).

Definicija 1.3. Za točku x metričkog prostora $(X,\,d)$ i njegov neprazni podskup S definiramo *udaljenost* $d(x,\,S)$ *točke* x *od podskupa* S da bude infimum skupa $\{d(x,s)\,:\,s \in S\}$.

Primjetimo da je gornja definicija korektna jer ako je S neprazan podskup od X, skup $\{d(x,s)\,:\,s \in S\}$ će biti neprazan i zbog aksioma (MET 1) omeđen odozdo nulom pa njegov infimum svakako postoji i pri tome je on veći ili jednak nula. Također je očigledno da je $d(x,\,S)=0$ ako je $x \in S$ dok primjer $x=0$ i $S=(0,\,1)$ pokazuje da $d(x,\,S)=0$ ne povlači nužno da je $x \in S$.

PROPOZICIJA 1.3. *Za bilo koji neprazni podskup S metričkog prostora $(X,\,d)$ i bilo koji par njegovih točaka $x,\,y \in X$ vrijedi nejednakost*
(DIST) $\quad |\,d(x,\,S)-d(y,\,S)\,| \leq d(x,\,y).$



SLIKA 5. Apsolutna vrijednost razlike udaljenosti dvije točke do podskupa S je najviše jednaka udaljenosti tih točaka.

DOKAZ. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Neka je $a = d(x,\,S)$ i $b = d(y,\,S)$. Znamo da postoji $t \in S$ takav da je $d(y,t) \leq b+\varepsilon$. Za svaki $s \in S$ sada primjenom nejednakosti (MET 4č) dobivamo

$$d(x,\,s)-b \leq d(x,\,s)-d(y,\,t)+\varepsilon \leq d(x,\,y)+d(s,\,t)+\varepsilon.$$

Neka je

$$A = \{\,d(x,\,s)-b\,:\,s \in S\,\}$$

i

$$B = \{\,d(x,\,y)+d(s,\,t)+\varepsilon\,:\,s \in S\,\}.$$

Zbog gornje nejednakosti, sigurno je $\inf A \leq \inf B$. Za $s=t$, vidimo da je broj $d(x,\,y)+\varepsilon$ iz skupa B. Slijedi da je $\inf A \leq d(x,\,y)+\varepsilon$. Jer to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, slijedi da je $a-b \leq d(x,\,y)$ budući da je $\inf A = a-b$. Kako je gornji argument potpuno simetričan s obzirom na točke x i y, na isti način slijedi $b-a \leq d(x,\,y)$. Tako smo dokazali nejednakost (DIST). $\square$

Definicija 1.4. Za neprazne podskupove S i T metričkog prostora $(X,\, d)$ definiramo *udaljenost* $d(S,\, T)$ *podskupova* S i T da bude infimum skupa $\{d(x,y) \,:\, x \in S,\, y \in T\}$.

Primjetimo da je gornja definicija korektna jer ako su S i T neprazni podskupovi od X, skup $\{d(x,y) \,:\, x \in S,\, y \in T\}$ će biti neprazan i zbog aksioma (MET 1) omeđen odozdo nulom pa njegov infimum svakako postoji i pri tome je on veći ili jednak nula. Također je očigledno da je $d(S,\, T) = 0$ ako se S i T sijeku dok primjer $S = (-1,\, 0)$ i $T = (0,\, 1)$ pokazuje da $d(S,\, T) = 0$ ne povlači nužno da se S i T sijeku.

Definicija 1.5. Neka su $(X,\, d)$ i $(Y,\, \varrho)$ metrički prostori. Funkcija $f \,:\, X \to Y$ je *izometrija* (ili *izometričko preslikavanje*) od X *na* Y ako je ona bijekcija i ako čuva udaljenosti, tj., ako vrijede uvjeti

(BIJE) Postoji funkcija $g \,:\, Y \to X$ za koju su ispunjene jednakosti $f \circ g = id_Y$ i $g \circ f = id_X$, gdje su id_X i id_Y identične funkcije.

(IZO) Jednakost $d(x,\, y) = \varrho(f(x),\, f(y))$ je ispunjena za sve točke x i y u prostoru X.

Primjeri izometrija su translacije i rotacije u ravnini dok su homotetije i inverzije primjeri funkcija koje obično nisu izometrije.

Definicija 1.6. Za metričke prostore $(X,\, d)$ i $(Y,\, \varrho)$ kažemo da su *metrički ekvivalentni* ili *izometrični* i pišemo $X \underset{m}{\cong} Y$ ako postoji bar jedna izometrija od X na Y.

Propozicija 1.4. *Relacija izometričnosti* $\underset{m}{\cong}$ *je relacija ekvivalencije, tj. ona ima svojstva refleksivnosti (relacija* $X \underset{m}{\cong} X$ *vrijedi za svaki prostor* X*), simetričnosti (relacija* $X \underset{m}{\cong} Y$ *uvijek povlači relaciju* $Y \underset{m}{\cong} X$*), i tranzitivnosti (relacije* $X \underset{m}{\cong} Y$ *i* $Y \underset{m}{\cong} Z$ *zajedno uvijek povlače relaciju* $X \underset{m}{\cong} Z$*).*

Dokaz. Refleksivnost je posljedica činjenice da je identično preslikavanje svakog metričkog prostora očigledno izometrija. Slično, svojstvo simetričnosti slijedi iz činjenice da je inverz svake izometrije i sam izometrija dok tranzitivnost slijedi zato jer je kompozicija izometrija i sama izometrija. □

Zadatak 1.1. Neka je $(X,\, d)$ metrički prostor. Dokaži da je skup $Izo(X,\, d)$ svih izometrija prostora X na sebe nekomutativna grupa u odnosu na operaciju koja bilo kakvim izometrijama f i g iz $Izo(X,\, d)$ pridružuje njihovu kompoziciju $g \circ f$.

Rješenje. Prvo moramo provjeriti da je kompozicija $g \circ f$ dvije izometrije $f,\, g \in Izo(X,\, d)$ opet izometrija prostora X na sebe.

Jer je kompozicija bijekcija opet bijekcija i svaka izometrija je po definiciji bijekcija, vidimo da je $g \circ f$ bijekcija.

Da bi smo provjerili da je udaljenost bilo koje dvije točke x i y iz X jednaka udaljenosti njihovih slika $(g \circ f)(x)$ i $(g \circ f)(y)$, vidimo da vrijedi

$$d((g\circ f)(x),\,(g\circ f)(y))\overset{(1)}{=}d(g(f(x)),\,g(f(y)))\overset{(2)}{=}$$
$$d(f(x),\,f(y))\overset{(3)}{=}d(x,\,y).$$

Pri tome su jednakosti (2) i (3) posljedice toga što izometrije g i f čuvaju udaljenosti dok (1) slijedi iz definicije kompozicije.

Sada pokazujemo da je inverz f^{-1} izometrije $f\in Izo(X,\,d)$ opet izometrija iz $Izo(X,\,d)$.

Neka su x i y bilo koje točke iz prostora X. Jer je f bijekcija, možemo naći točke a i b iz X takve da vrijedi $x=f(a)$ i $y=f(b)$. Imamo redom

$$d(f^{-1}(x),\,f^{-1}(y))\overset{(1)}{=}d(f^{-1}(f(a)),\,f^{-1}(f(b)))\overset{(2)}{=}$$
$$d(a,\,b)\overset{(3)}{=}d(f(a),\,f(b))\overset{(4)}{=}d(x,\,y).$$

Tu smo u (1) i (4) koristili to kako su točke a i b odabrane, u (2) da je kompozicija $f^{-1}\circ f=id_X$, i u (3) koristimo pretpostavku da je f izometrija.

I na kraju, da provjerimo da grupa $(Izo(X,\,d),\,\circ\,)$ nije komutativna, neka je $(X,\,d)$ ravnina $\mathbb{R}^2$ s Euklidskom metrikom, neka je f rotacija oko ishodišta za 90 stupnjeva, i neka je g refleksija u x-osi. Onda je $f\circ g\neq g\circ f$ jer kompozicija $f\circ g$ preslikava točku $(1,\,0)$ u točku $(0,\,1)$ dok je kompozicija $g\circ f$ preslikava u točku $(0,\,-1)$. Očito su te slike $(0,\,1)$ i $(0,\,-1)$ različite. □

2. Primjeri metričkih prostora

2.1. Pravac. Na skupu $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva možemo definirati *standardnu metriku* pravilom $d_1(a,\,b)=|a-b|$. Drugim riječima, mi za udaljenost dvaju realnih brojeva uzimamo apsolutnu vrijednost njihove razlike. Ovako definirana funkcija $d_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ očigledno zadovoljava aksiome (MET 1) – (MET 3). Provjerimo sada da funkcija d_1 također ima svojstvo (MET 4). Neka su a, b, i c bilo kakva tri realna broja. Ako su sva tri jednaka ili su pak dva od njih jednaka onda očigledno vrijedi $d_1(a,\,c)\leq d_1(a,\,b)+d_1(b,\,c)$. Zato možemo pretpostaviti da su ta tri broja svi različiti. Vidimo sada da vrijedi jedna i samo jedna od slijedećih šest mogućnosti: (i) $a<b<c$, (ii) $a<c<b$, (iii) $b<a<c$, (iv) $b<c<a$, (v) $c<a<b$, i (vi) $c<b<a$. Ako vrijedi (i) onda je

$$d_1(a,\,c)=c-a,\quad d_1(a,\,b)=b-a,\quad \text{i}\quad d_1(b,\,c)=c-b$$

pa je

$$d_1(a,\,c)=d_1(a,\,b)+d_1(b,\,c).$$

Ako pak vrijedi (ii), onda je

$$d_1(a,\,c)=c-a,\quad d_1(a,\,b)=b-a,\quad \text{i}\quad d(b,\,c)=b-c$$

pa je

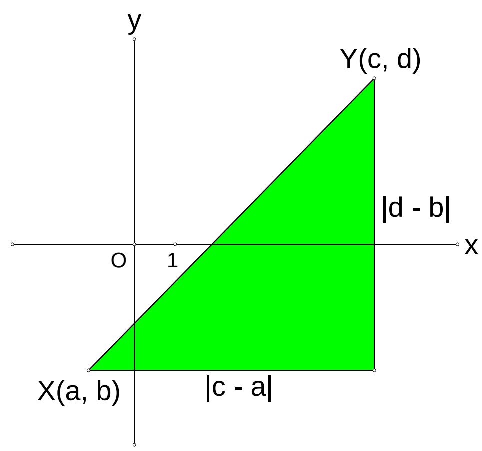
$$d_1(a,\, c) < d_1(a,\, b) + d_1(b,\, c)$$

budući da je to zapravo nejednakost

$$c - a < (b - a) + (b - c) = 2\,b - c - a$$

koja vrijedi jer je $2\,c < 2\,b$. Slično se provjere i preostala četiri slučaja.

Funkcija $\varrho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa $\varrho(a,\, b) = \arctan|a - b|$ za sve $a,\, b \in \mathbb{R}$ je također metrika na brojevnom pravcu $\mathbb{R}$. Ključna provjera svojstva (MET 4) je vrlo slična gornjoj provjeri za metriku d_1 i koristi činjenicu da je funkcija arctan strogo rastuča.



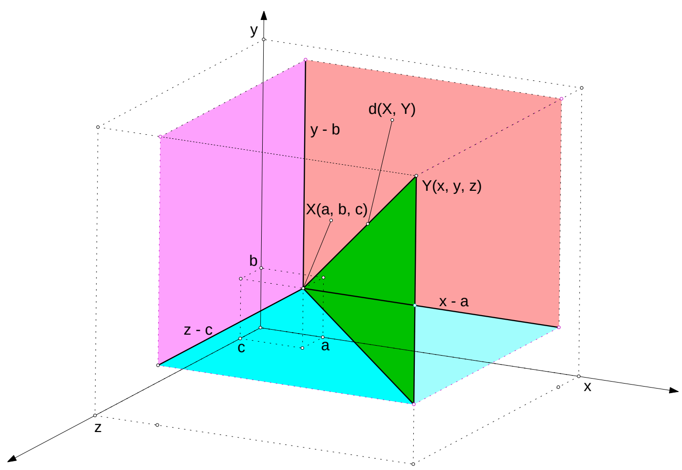
Slika 6. U ravnini $\mathbb{R}^2$ je udaljenost između točaka $X(a,\, b)$ i $Y(c, d)$ jednaka $\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

2.2. Ravnina. Znamo da točke ravnine možemo zamišljati kao uređene parove realnih brojeva tj. kao skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Uvedemo li oznaku $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vidimo da je ravninu moguće poistovjetiti sa skupom $\mathbb{R}^2$. Pravilom $d_2(a,\, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ za parove $a = (a_1,\, a_2)$ i $b = (b_1,\, b_2)$ iz $\mathbb{R}^2$ definirana je *Euklidska metrika* na ravnini. Ponovo je provjera svojstava (MET 1) — (MET 3) trivijalna dok je svojstvo (MET 4) upravo tvrdnja da je u svakom trokutu zbroj dviju stranica veći ili jednak trećoj stranici. To objašnjava izbor imena nejednakost trokuta za svojstvo (MET 4).

2.3. Euklidski n-dimenzionalni prostor. Prethodna dva primjera možemo poopćiti na slijedeći način. Neka je n bilo koji prirodan broj. Neka nam $\mathbb{R}^n$ bude oznaka za skup svih uređenih n-torki $a = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ realnih brojeva. Pravilom

$$d_n(a,\, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

definirana je *Euklidska metrika* $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nejednakost trokuta za d_n pokazuje se lagano matematičkom indukcijom. Primjetimo da se d_n za n jednak jedan i dva podudara sa d_1 i d_2 iz prva dva primjera.



SLIKA 7. U 3-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ je udaljenost između točaka $X(a, b, c)$ i $Y(x, y, z)$ jednaka $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

2.4. Normirani linearni prostori. Prisjetimo se da neku funkciju $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ definiranu na realnom linearnom prostoru V nazivamo *norma* (na prostoru V) ako za sve vektore $a, b \in V$ i sve realne brojeve λ vrijedi

(NOR 1) $\|a\| \geq 0$.
(NOR 2) $\|a\| = 0$ ako i samo ako je $a = 0$.
(NOR 3) $\|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\|$.
(NOR 4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Kako je pridodno opisati gornja četiri svojstva kao POZITIVNA DEFINITNOST za (NOR 1), HOMOGENOST za (NOR 3), STROGOST za (NOR 2), i NEJEDNAKOST TROKUTA za (NOR 4), možemo reči da je norma svaka stroga pozitivno definitna homogena funkcija na realnom linearnom prostoru koja zadovoljava nejednakost trokuta. Sada je *normirani linearni prostor* uređeni par $(V, \|\ \|)$ koji se sastoji od realnog linearnog prostora V i norme $\|\ \|$ na njemu.

Svaki normirani linearni prostor $(V, \|\ \|)$ postaje metrički prostor ako definiramo metriku $d_{\|\ \|}$ induciranu normom $\|\ \|$ pravilom

$$d_{\|\ \|}(a, b) = \|a - b\|$$

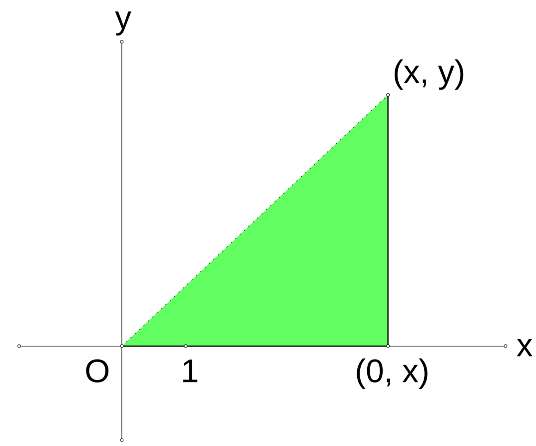
za sve $a, b \in V$. Primjetimo da svojstva (MET 1) i (MET 2) za $d_{\|\ \|}$ slijede iz (NOR 1) i (NOR 2), svojstvo (MET 3) iz (NOR 3) jer je

$$d_{\|\ \|}(a, b) = \|a - b\| = \|-(b - a)\| = |-1|\,\|b - a\| = d_{\|\ \|}(b, a),$$

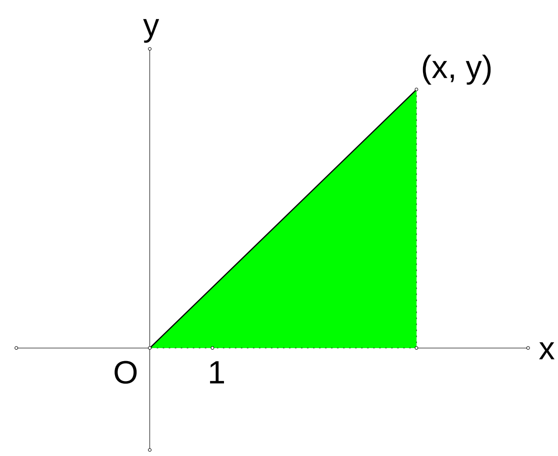
dok (MET 4) slijedi iz (NOR 4) jer za sve a, b, i c iz V vrijedi

$$\|a - c\| = \|(a - b) + (b - c)\| \leq \|(a - b)\| + \|(b - c)\|.$$

Pri tome je lijevi kraj te nejednakosti $d_{\| \|}(a,\, c)$ dok je njen desni kraj $d_{\| \|}(a,\, b) + d_{\| \|}(b,\, c)$.



SLIKA 8. U ravnini $\mathbb{R}^2$ je norma $\| (x,\, y) \|_1$ vektora $(x,\, y)$ jednaka $|x| + |y|$ (zbroju apsolutnih vrijednosti koordinata tj. zbroju duljina horizontalnog i vertikalnog podebljanog segmenta).



SLIKA 9. U ravnini $\mathbb{R}^2$ je norma $\| (x,\, y) \|_2$ vektora $(x,\, y)$ jednaka $\sqrt{x^2 + y^2}$ (najkraći put od ishodišta do točke određene vektorom).

Da bi smo naveli neke primjere normi, primjetimo da se za svaki prirodan broj n na linearnom prostoru $\mathbb{R}^n$ svih n-torki realnih brojeva $a = (a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ može definirati niz normi $\| \|_k$ tako da se za svaki prirodan broj k stavi

$$\| a \|_k = \sqrt[k]{|\, a_1 \,|^k + |\, a_2 \,|^k + \cdots + |\, a_n \,|^k}.$$

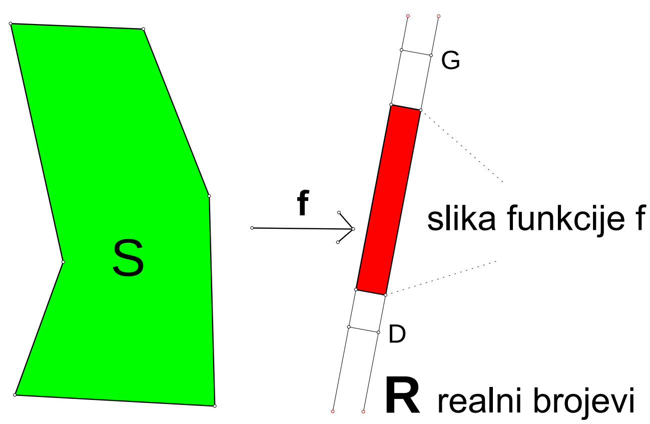
Uvjeti (NOR 1) - (NOR 3) su očigledno ispunjeni dok je uvjet (NOR 4) ekvivalentan jednoj varijanti Hölderove nejednakosti. Druga mogućnost je da definiramo normu $\| \, \|_\infty$ pravilom

$$\| a \|_\infty = \max\{| a_1 |, | a_2 |, \cdots , | a_n |\}.$$

Pri tome je interesantno da vrijedi $\lim_{k\to\infty} \| a \|_k = \| a \|_\infty$ za svaki vektor a iz V što donekle opravdava notaciju za normu $\| \, \|_\infty$.

Dakle, norme $\| \, \|_\infty$ i $\| \, \|_k$ induciraju metričke prostore $(\mathbb{R}^n, d_{\| \, \|_\infty})$ i $(\mathbb{R}^n, d_{\| \, \|_k})$ za svaki prirodan broj k pa smo tako dobili primjer skupa i na njemu definiranih beskonačno mnogo metrika. Primjetimo da je $d_n = d_{\| \, \|_2}$.

2.5. Prostor omeđenih funkcija. Slijedeći primjer opisuje jedno poopćenje dijela prethodnog primjera. Prisjetimo se da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ skupa S u skup svih realnih brojeva *omeđena* ako je njezina slika $f(S)$ (skup svih vrijednosti te funkcije) omeđeni podskup od $\mathbb{R}$. Drugim riječima, funkcija f je omeđena ako postoje realni brojevi D i G takvi da je $D < f(x) < G$ za svaki x u skupu S.



SLIKA 10. Shematska slika omeđene realne funkcije.

Skup $B(S)$ svih omeđenih realnih funkcija na skupu S postaje normirani linearni prostor ako definiramo zbroj $f + g$ vektora f i g, produkt λf realnog broja λ i vektora f, te normu $| f |_\infty$ vektora f pravilom $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ odnosno $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ za svaki $x \in S$ te $| f |_\infty = \sup_{x\in S} | f(x) |$. Svojstva (NOR 1)-(NOR 4) su očigledno ispunjena. Normu $| \, |_\infty$ zovemo normom supremuma ili kraće *supnorma*. Njome je inducirana metrika $d_{| \, |_\infty}$ i to tako da je

$$d_{| \, |_\infty}(f, g) = | f - g |_\infty = \sup_{x\in S} | f(x) - g(x) |.$$

Sada je par $(B(S), d_{| \, |_\infty})$ metrički prostor svih omeđenih realnih funkcija na skupu S. Neki izbori za skup S daju interesantne slučajeve.

Tako za $S = \mathbb{N}$ (skup svih prirodnih brojeva) dobivamo prostor $B(\mathbb{N})$ svih omeđenih nizova.

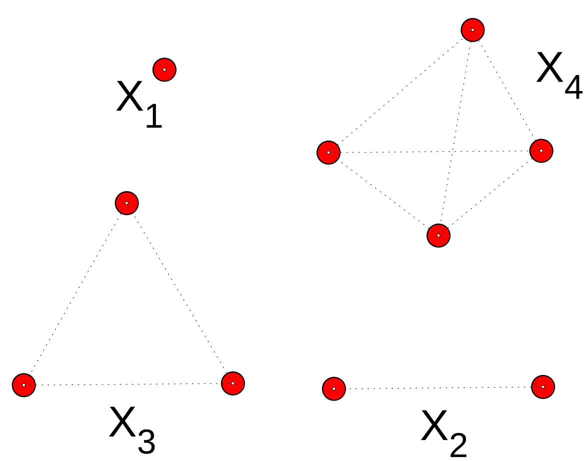
Ako je n bilo koji prirodan broj i $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, onda je $B(S)$ moguće identificirati sa $\mathbb{R}^n$. U tom slučaju je $\| \,\|_\infty = |\,|_\infty$.

2.6. Unitarni linearni prostori. Prisjetimo se da je funkcija $(\,,\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ *skalarni produkt* na realnom linearnom prostoru V ako za sve vektore a, b, i c i sve realne brojeve λ vrijede slijedeća četiri uvjeta:

(UNI 1) $(a, b) = (b, a)$.
(UNI 2) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$.
(UNI 3) $(a, \lambda\, b) = \lambda\,(a, b)$.
(UNI 4) $(a, a) \geq 0$ i iz $(a, a) = 0$ slijedi $a = 0$.

Uređeni par $(V, (\,,\,))$ koji se sastoji od realnog linearnog prostora V i skalarnog produkta na njemu zovemo *unitarni prostor*.

Ako je $(V, (\,,\,))$ unitarni prostor, onda se lagano provjerava da je funkcija $\| \,\|_{(\,,\,)} : V \to \mathbb{R}$ definirana sa $\| \,\|_{(\,,\,)}(a) = \sqrt{(a, a)}$ norma na realnom linearnom prostoru V. Dakle, svaki unitarni (realni linearni) prostor je na prirodan način normirani (realni linearni) prostor a svaki normirani (realni linearni) prostor je pak na prirodan način metrički prostor.



Slika 11. Prikaz diskretnih metričkih prostora od 1, 2, 3, i 4 točke. Udaljenost bilo koje dvije različite točke je uvijek 1.

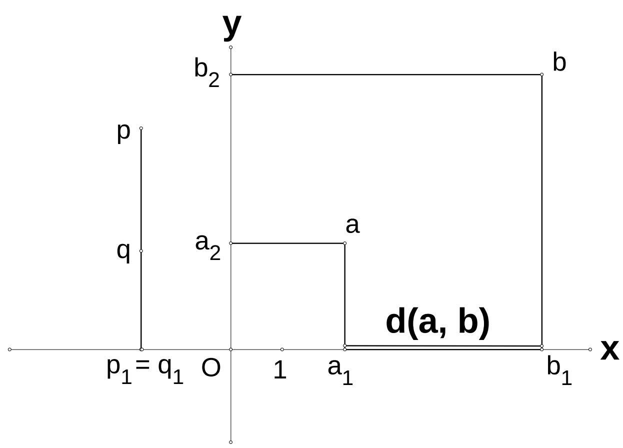
2.7. Diskretni metrički prostor. Na svakom nepraznom skupu S možemo definirati takozvanu *diskretnu metriku* D_0^S tako da stavimo $D_0^S(a, b) = 1$ ako je $a \neq b$ odnosno $D_0^S(a, b) = 0$ ako je $a = b$ za sve a i b iz skupa S. Provjera svojstava (MET 1) — (MET 4) za funkciju D_0^S je vrlo lagana. Par (S, D_0^S) zovemo *diskretni metrički prostor*. U takvom prostoru svaka točka na istoj je udaljenosti od svih drugih njoj različitih točaka pa ti prostori nisu zanimljivi.

2.8. Metrički prostor malih udaljenosti. Neka je $(M,\, d)$ bilo koji metrički prostor. Pravilom

$$d_{\clubsuit}(a,\, b) = \frac{d(a,\, b)}{1 + d(a,\, b)}$$

definirana je nova metrika $d_{\clubsuit}$ na M. Primjetimo da je udaljenost bilo koje dvije točke a i b iz M u metrici $d_{\clubsuit}$ manja od jedan.

2.9. Primjer pseudometrike. Ako su $a = (a_1,\, a_2)$ i $b = (b_1,\, b_2)$ točke ravnine $\mathbb{R}^2$, neka je $d(a,\, b) = |\, a_1 - b_1\,|$ (apsolutna vrijednost razlike prvih koordinata). Funkcija d je pseudometrika koja nije metrika jer sve točke s istom prvom koordinatom imaju (pseudo)udaljenost jednaku nula. Zato vrijedi (pseudoMET 2) a ne vrijedi (MET 2).



SLIKA 12. Primjer pseudometrike na ravnini. Točke p i q su različite iako im je pseudoudaljenost nula (jer imaju iste apcise – prve koordinate).

ZADATAK 2.1. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ nenegativna realna funkcija na skupu X. Pravilom

$$d(a,\, b) = \begin{cases} \max\{\, f(a),\ f(b)\,\} & \text{za } a \neq b, \\ 0 & \text{za } a = b\ , \end{cases}$$

za sve elemente $a,\, b \in X$, definirana je pseudometrika na skupu X. Ako funkcija f ima dodatno svojstvo da za sve $a,\, b \in X$ iz jednakosti $f(a) = 0 = f(b)$ slijedi jednakost $a = b$, onda je funkcija d metrika na skupu X.

Skica rješenja. Provjera svih uvjeta pseudometrike (MET 1), (pseudoMET 2), (MET 3), i (MET 4) provodi se lagano koristeći standardna svojstva funkcije maksimuma. Dodatna pretpostavka o ponašanju funkcije f nam očigledno treba da bi smo provjerili uvjet (MET 2). $\square$

3. Omeđeni i potpuno omeđeni prostori

Za metrički prostor $(M,\, d)$ kažemo da je *omeđen* ako je skup udaljenosti $d(a,\, b)$ za $a,\, b \in M$ omeđeni podskup od $\mathbb{R}$. Drugim riječima, $(M,\, d)$ je omeđen ako možemo naći (pozitivan) realan broj G takav da je $0 \le d(a,\, b) \le G$ za sve a i b iz M.

Primjetimo da se svaki neprazni podskup S metričkog prostora $(M,\, d)$ na prirodan način može opskrbiti metrikom tako da se funkcija $d\, :\, M \times M \to \mathbb{R}$ ograniči na podskup $S \times S$ od $M \times M$. Dakle, restrikcija funkcije d na podskup $S \times S$ dati će nam metriku na podskupu S. Prirodno je novu metriku označiti istim simbolom, tako da smo iz metričkog prostora $(M,\, d)$ dobili novi metrički prostor $(S,\, d)$. Kažemo da je $(S,\, d)$ *potprostor* metričkog prostora $(M,\, d)$. Ispustimo li oznaku metrike, vidimo da se svaki neprazni podskup S metričkog prostora M može promatrati kao njegov potprostor.

Sada možemo definirati da je neprazan podskup (ili potprostor) S metričkog prostora M *omeđen* ako je potprostor S omeđen, tj., ako postoji (pozitivan) realni broj G takav da je $0 \le d(a,\, b) \le G$ za sve a i b iz S. Primjetimo da je očigledno svaki podskup omeđenog podskupa i sam omeđen.

Naprimjer, jedinični zatvoreni krug $\mathbb{D}^2 = \{a \in \mathbb{R}^2\, :\, a_1^2 + a_2^2 \le 1\}$ je omeđeni podskup ravnine $(\mathbb{R}^2,\, d_2)$. Omeđeni su također pravac $\mathbb{R}$ sa metrikom $d(a,\, b) = \arctan|\, a - b\,|$, svaki diskretan metrički prostor $(S,\, D_0^S)$, i svaki metrički prostor $(M,\, d)$ sa metrikom $d_\clubsuit$.

Za neprazni podskup S metričkog prostora M pišemo $\mathit{diam}\, S = \infty$ ako S nije omeđen. Ako je pak S omeđen, onda $\mathit{diam}\, S$ označava realan (nenegativan) broj

$$\sup\{d(a,\, b)\, :\, a,\, b \in S\}.$$

Prošireni broj $\mathit{diam}\, S$ nazivamo *dijametar* (pod)skupa S. Primjetimo da za podskupove A i B metričkog prostora M relacija $A \subset B$ povlači nejednakost $\mathit{diam}\, A \le \mathit{diam}\, B$. Dakle, dijametar podskupa je manji ili najviše jednak dijametru skupa.

Propozicija 3.1. *Za svaka dva podskupa A i B metričkog prostora $(M,\, d)$ vrijedi nejednakost*

$$\mathit{diam}\,(A \cup B) \le \mathit{diam}\, A + \mathit{diam}\, B + d(A,\, B),$$

ili riječima, dijametar unije dvaju skupova manji je ili najviše jednak sumi njihovih dijametara i njihove udaljenosti.

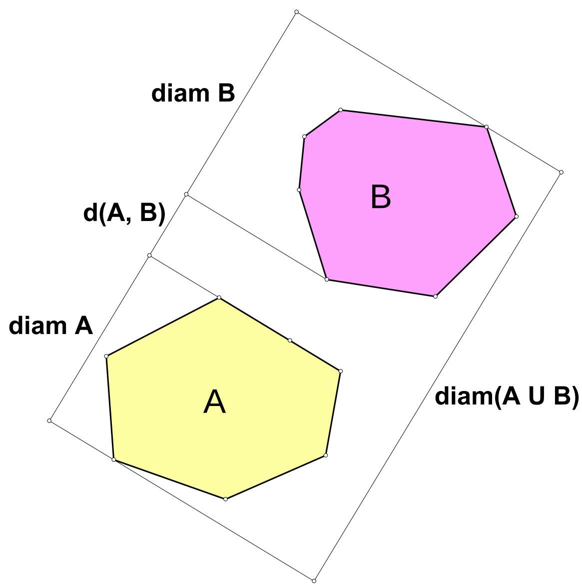
DOKAZ. Kako je udaljenost $d(A,\, B)$ skupova A i B jednaka infimumu udaljenosti $d(a,\, b)$ za a iz A i za b iz B, za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ možemo naći točke $a_\varepsilon \in A$ i $b_\varepsilon \in B$ takve da je $d(a_\varepsilon,\, b_\varepsilon) < d(A,\, B) + \varepsilon$. Sada primjenom nejednakosti mnogokuta za bilo kakve točke $a \in A$ i $b \in B$ imamo

$$d(a,\, b) \leq d(a,\, a_\varepsilon)+d(a_\varepsilon,\, b_\varepsilon)+d(b_\varepsilon,\, b) \leq diam\, A+d(A,\, B)+\varepsilon+diam\, B.$$

Gornja nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ pa zaključujemo da je

$$d(a,\, b) \leq diam\, A + d(A,\, B) + diam\, B.$$

za ma kakve $a \in A$ i $b \in B$. Kako je također



SLIKA 13. Dijametar unije dva skupa je najviše jednak sumi njihovih dijametara i udaljenosti.

$$d(a,\, x) \leq diam\, A \leq diam\, A + d(A,\, B) + diam\, B,$$

za sve a i x iz A, i slično je

$$d(y,\, b) \leq diam\, B \leq diam\, A + d(A,\, B) + diam\, B.$$

za sve y i b iz B, zaključujemo da je

$$d(x,\, y) \leq diam\, A + d(A,\, B) + diam\, B.$$

za ma kakve $x \in A \cup B$ i $y \in A \cup B$. Zato je

$$diam\,(A \cup B) \leq diam\, A + diam\, B + d(A,\, B).$$

□

KOROLAR 3.1. *Unija od konačno mnogo bilo kakvih omeđenih podskupova metričkog prostora je opet omeđeni podskup tog prostora.*

Dokaz. Lagani dokaz ovog korolara matematičkom indukcijom i upotrebom prethodne Propozicije možemo prepustiti čitateljima. □

Familiju $\mathcal{F} = \{ S_j : j \in J \}$ podskupova skupa S indeksiranu nekim skupom indeksa J ćemo zvati *pokrivačem* skupa S ako svaka točka od S pripada bar jednom od skupova S_j. Drugim riječima, unija svih članova familije mora biti čitavi skup S da bi ta familija bila pokrivač tog skupa. Već prema broju elemenata indeksnog skupa (broju indeksa) možemo imati konačne i prebrojive pokrivače skupova. Tako je pokrivač $\mathcal{F}$ konačan ako postoji prirodan broj n i bijekcija indeksnog skupa J na skup $\{1, 2, \ldots, n\}$. Slično je pokrivač $\mathcal{F}$ prebrojiv ako postoji bijekcija indeksnog skupa J na skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva.

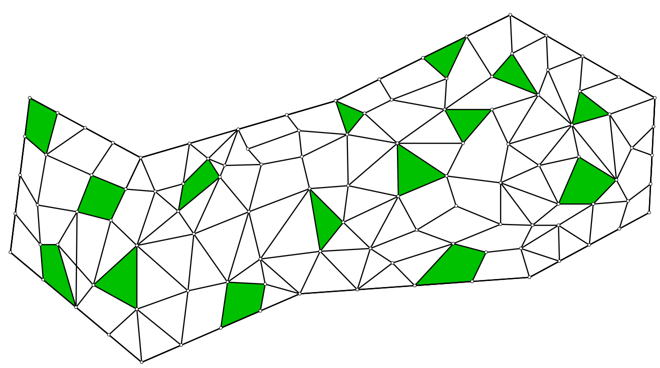
Slijedeći primjeri ilustriraju gornje definicije. Neka je

$$\mathcal{F}_1 = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b \}, \quad \mathcal{F}_2 = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b \},$$

$$\mathcal{F}_3 = \{ [n, n+1) : n \in \mathbb{Z} \}, \ \ \mathcal{F}_4 = \{ (-\infty, 0], (0, +\infty) \}, \ \ \mathcal{F}_5 = \{ \mathbb{R} \}.$$

Onda je $\mathcal{F}_1$ beskonačan neprebrojiv pokrivač pravca $\mathbb{R}$, nadalje $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ su njegovi prebrojivi pokrivači, dok su $\mathcal{F}_4$ i $\mathcal{F}_5$ konačni pokrivači od $\mathbb{R}$.

Definicija 3.1. Metrički prostor (M, d) je *potpuno omeđen* ako za svaki pozitivan realan broj ε postoji konačan pokrivač od M podskupovima dijametra manjeg od ε. U nekih autora se potpuno omeđeni metrički prostori zovu još i *totalno omeđeni* (metrički) prostori.



Slika 14. Potpuno omeđen metrički prostor se uvijek dade prikazati kao unija konačno mnogo po volji sitnih dijelova.

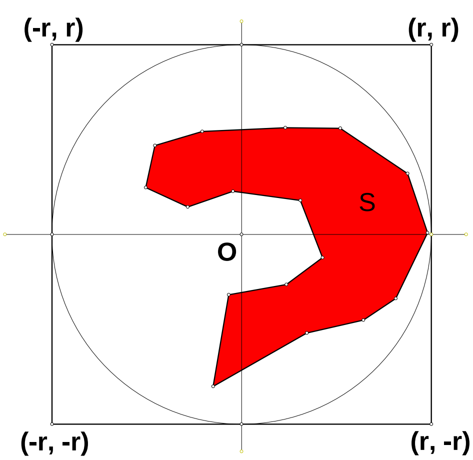
Očigledno je da su svi neprazni potprostori potpuno omeđenog metričkog prostora i sami potpuno omeđeni metrički prostori.

Iz Korolara 3.1 slijedi da je svaki potpuno omeđeni metrički prostor omeđen jer je unija konačno mnogo omeđenih potprostora. Obrat te tvrdnje, tj., da je svaki omeđeni metrički prostor potpuno omeđen, ne vrijedi kao što pokazuje diskretni metrički prostor $(\mathbb{N},\, D_0^{\mathbb{N}})$ koji je omeđen (ima dijametar jedan) ali nije potpuno omeđen jer su jedini njegovi potprostori dijametra manjeg od jedan jednočlani potprostori a konačno mnogo takvih sigurno ne mogu prekriti beskonačan skup $\mathbb{N}$.

Slijedeći teorem pokazuje da ekvivalentnost potpune omeđenosti i omeđenosti vrijedi u Euklidskim prostorima $(\mathbb{R}^n,\, d_n)$.

TEOREM 3.1. *Za svaki prirodan broj n, u Euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n,\, d_n)$ je svaki omeđeni potprostor potpuno omeđen.*

DOKAZ. Neka su dani prirodan broj n i omeđeni podskup S Euklidskog metričkog prostora $(\mathbb{R}^n,\, d_n)$. Moramo dakazati da je podskup S potpuno omeđen, tj., da za svaki pozitivan realan broj ε postoji konačan pokrivač od S skupovima čiji dijametri su manji od ε. Da to dokažemo dovoljno je pokazati da je S podskup nekog potpuno omeđenog skupa X u $\mathbb{R}^n$ jer je svaki podskup potpuno omeđenog skupa i sam potpuno omeđen.



SLIKA 15. Odabir centralne kocke duljine brida $2\,r$ koja sadrži omeđeni skup S u prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n = 2$.

Neka je slovo $O = (0, \ldots, 0)$ oznaka za ishodište prostora $\mathbb{R}^n$. Jer je jednočlan skup $\{\, O \,\}$ očigledno omeđen slijedi da je unija $S \cup \{\, O \,\}$ također omeđena. Zato postoji pozitivan realan broj r takav da je skup $S \cup \{\, O \,\}$ sadržan u skupu $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, gdje je $X_j = [-r,\, r]$ za svaki $j = 1, \ldots, n$.

Dakle, sada nam preostaje provjeriti da je kocka X potpuno omeđeni prostor. Neka je zadan bilo koji pozitivan realan broj ε. Odaberimo prirodan broj k tako velik da vrijedi $k > r\,\sqrt{n}/\varepsilon$. Podijelimo svaki od segmenata X_j na $2\,k$ segmenata

$$X_j^i = [r\,(i-1)/k,\; r\,i/k],$$

gdje je i element skupa $Z = \{-(k-1), -(k-2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k\}$. Očigledno je kocka X prekrivena familijom manjih kocaka

$$K_v = X_1^{i_1} \times X_2^{i_2} \times \cdots \times X_n^{i_n},$$

gdje je $v = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ bilo koja točka iz Z^n (Kartezijevog produkta n kopija skupa Z). Kocaka K_v ima konačno mnogo (preciznije, ima ih točno $(2\,k)^n$) i ako pokažemo da su im dijametri manji od ε naš dokaz će biti završen.

Ako su x i y dvije točke iz kocke K_v, onda za njihove koordinate vrijedi $|\,x_i - y_i\,| \leq r/k$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Zato je

$$d_n(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{n(r/k)^2} = r\sqrt{n}/k < \varepsilon.$$

Prema tome, dokazali smo da je *diam* $K_v < \varepsilon$. □

Zadatak 3.1. Vrijedi li tvrdnja prethodnog teorema za sve normirane linearne prostore?

4. Topologizacija metričkog prostora

Definicija 4.1. Neka je (M, d) metrički prostor, neka je x točka tog prostora, i neka je r pozitivan realan broj. Skup

$$K(x, r) = \{\, y \in M \,:\, d(x, y) \,<\, r\,\}$$

svih točaka prostora M koje su za manje od r udaljene od točke x nazivamo *otvorena kugla* (*sa središtem u točki* x s *polumjerom* r). U nekim situacijama važno je naglasiti metriku koja se koristi za određivanje otvorene kugle pa se tada koristi oznaka $K_d(x, r)$ i naziv *otvorena d-kugla.* Na sličan način definiramo *zatvorenu kuglu* $Z(x, r)$ odnosno *zatvorenu d-kuglu* $Z_d(x, r)$ (*sa središtem u točki* x i s *polumjerom* r) kao skup

$$\{\, y \in M \,:\, d(x, y) \,\leq\, r\,\},$$

gdje smo uključili i one točke koje su od x udaljene točno za r. Ovaj posljednji skup točaka naziva se *sfera* odnosno *d-sfera* (*sa središtem u točki* x i s *polumjerom* r) i označava sa $S(x, r)$ odnosno sa $S_d(x, r)$. Dakle,

$$S(x, r) = \{\, y \in M \,:\, d(x, y) \,=\, r\,\}.$$

Primjetimo da su za svaki skup M, svaki $x \in M$, i svaki pozitivan realan broj r, u diskretnom metričkom prostoru (M, D_0^M) kugle i sfere dane ovako:

$$K(x, r) = \begin{cases} \{\, x\,\}, & \text{ako je } r \leq 1, \\ M, & \text{ako je } r > 1. \end{cases}$$

$$Z(x, r) = \begin{cases} \{\, x\,\}, & \text{ako je } r < 1, \\ M, & \text{ako je } r \geq 1. \end{cases}$$

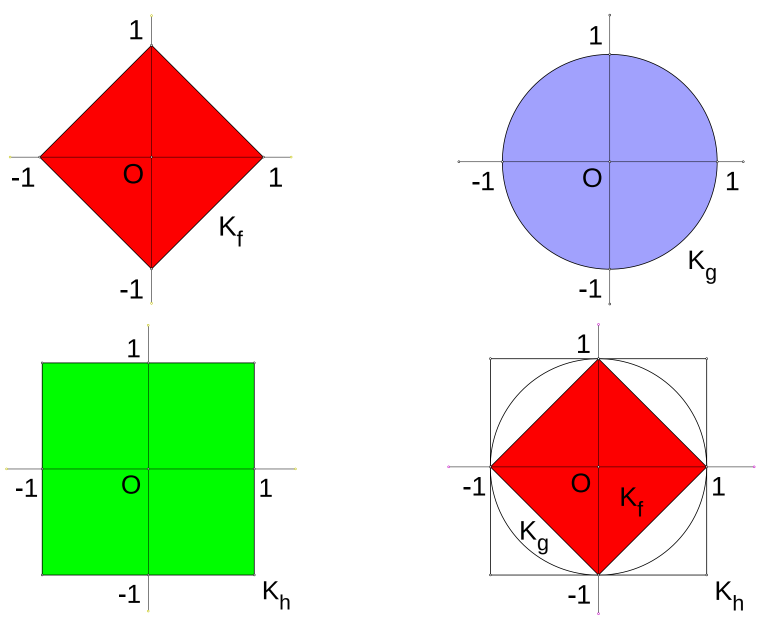
$$S(x,\, r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ako je } r < 1, \\ M \setminus \{\, x \,\}, & \text{ako je } r = 1, \\ \emptyset, & \text{ako je } r > 1. \end{cases}$$

Iz tog primjera zaključujemo da kugle različitih polumjera i istog centra u metričkom prostoru mogu biti identične. U Euklidskim prostorima to nije moguće jer je kugla jedinstveno određena svojim centrom i svojim polumjerom.

Slijedeći primjer pokazuje da kugle bitno ovise o metrici. Promatrajmo ravninu $\mathbb{R}^2$ sa slijedeće tri metrike:

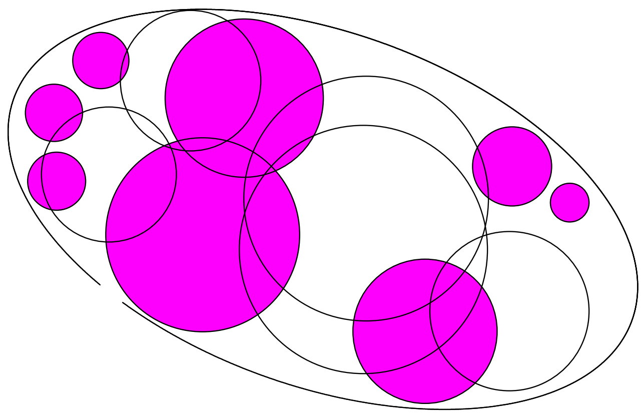
$$f(a,\, b) = |\, a_1 - b_1 \,| + |\, a_2 - b_2 \,|,$$
$$g(a,\, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$
$$h(a,\, b) = \max \{\, |\, a_1 - b_1 \,|,\, |\, a_2 - b_2 \,| \,\}.$$

Za otvorene kugle polumjera jedan s centrom u ishodištu $O = (0,\, 0)$ imamo da je $K_f(O,\, 1)$ unutrašnjost kvadrata sa vrhovima u točkama $(-1,\, 0)$, $(0,\, -1)$, $(1,\, 0)$, i $(0,\, 1)$, kugla $K_g(O,\, 1)$ je unutrašnjost kruga polumjera jedan sa centrom u ishodištu, dok je $K_h(O,\, 1)$ unutrašnjost kvadrata sa vrhovima u točkama $(-1,\, -1)$, $(-1,\, 1)$, $(1,\, -1)$, i $(1,\, 1)$.



Slika 16. Kugle oko ishodišta u ravnini radijusa 1 u odnosu na metrike f, g, i h odvojeno i sve tri zajedno.

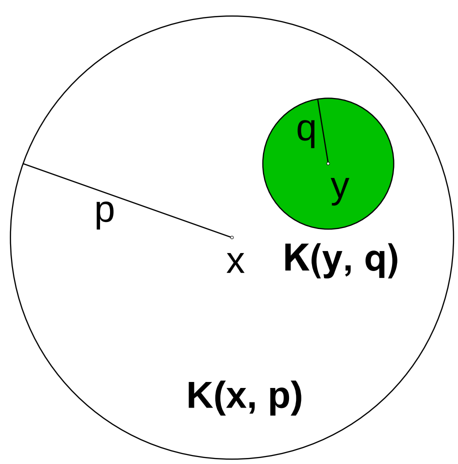
Definicija 4.2. Za podskup U metričkog prostora $(M,\, d)$ kažemo da je *d-otvoren* ako je on unija otvorenih d-kugala. Ako je jasno o kojoj metrici se radi, onda ćemo ispuštati oznaku metrike iz nazivlja i oznaka pa tako možemo jednostavnije reči da je podskup U metričkog prostora M *otvoren* ako je on unija otvorenih kugala.



SLIKA 17. Unutrašnjost elipse je otvoreni skup ravnine jer je unija otvorenih kugli.

Slijedeći teorem daje nam jednostavan kriterij za provjeru kada je podskup metričkog prostora otvoren. U njegovom dokazu koristiti ćemo ovu jednostavnu lemu.

LEMA 4.1. *Neka je x točka metričkog prostora M i neka je $p > 0$ realan broj. Onda za svaku točku y otvorene kugle $K(x, p)$ možemo naći pozitivan realan broj q takav da je $K(y, q) \subset K(x, p)$.*



SLIKA 18. Shematski prikaz Leme 4.1.

DOKAZ. Neka je $a = d(x, y)$. Jer je y točka otvorene kugle $K(x, p)$, sigurno je $a < p$. Zato postoji pozitivan realan broj q takav da je $a + q < p$. Taj broj će imati svojstvo da je $K(y, q) \subset K(x, p)$.

I doista, neka je z bilo koja točka otvorene kugle $K(y, q)$. Onda je $d(y, z) < q$. S druge strane, jer je $d(x, y) = a$, iz nejednakosti trokuta

(MET 4) slijedi

$$d(x,\, z) \le d(x,\, y) + d(y,\, z) < a + q < p.$$

Dakle, $d(x,\, z) < p$ što povlači da je $z \in K(x,\, p)$. Zato je

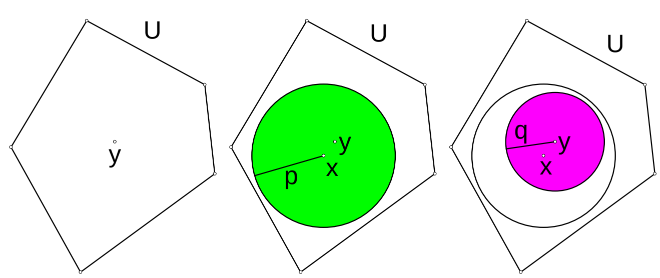
$$K(y,\, q) \subset K(x,\, p).$$

$\square$

TEOREM 4.1. *Podskup U metričkog prostora M je otvoren ako i samo ako za svaku točku x iz U možemo naći pozitivan realan broj r takav da je otvorena kugla $K(x,\, r)$ sadržana u skupu U.*

DOKAZ. ($\Longrightarrow$). Pretpostavimo da je podskup U unija otvorenih kugala i neka je y bilo koja točka od U. Po pretpostavci, postoji točka x (nužno iz skupa U) i pozitivan realan broj p takvi da je $y \in K(x,\, p) \subset U$. Iz prethodne leme slijedi postojanje pozitivnog realnog broja q takvog da je $K(y,\, q) \subset K(x,\, p)$. Očigledno je $K(y,\, q) \subset U$ pa je ova implikacija dokazana.

($\Longleftarrow$). Pretpostavimo da podskup U ima svojstvo da za svaku njegovu točku x možemo naći pozitivan realan broj r_x takav da je $K(x,\, r_x) \subset U$. Jer je $x \in K(x,\, r_x)$ za svaki x u skupu U, vidimo da je U unija familije otvorenih kugala $\{\, K(x,\, r_x) \,:\, x \in U \,\}$ (indeksirane elementima skupa U) pa je i ova implikacija dokazana. $\square$

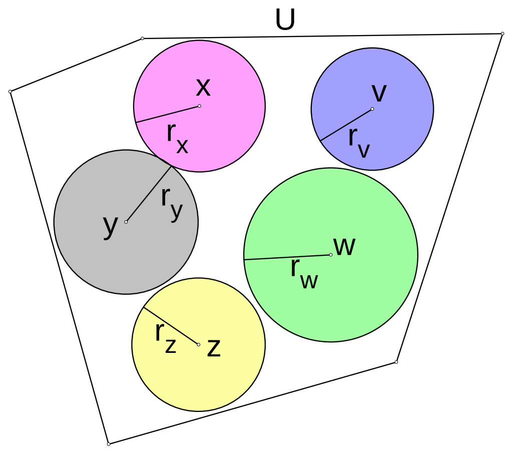


SLIKA 19. Koraci u dokazu implikacije ($\Longrightarrow$) u Teoremu 4.1.

Naš slijedeći rezultat opisuje osnovna svojstva kolekcije $\mathcal{U}_d$ svih otvorenih podskupova metričkog prostora $(M,\, d)$.

TEOREM 4.2. *Neka je $(M,\, d)$ metrički prostor i neka je $\mathcal{U}_d$ kolekcija svih njegovih otvorenih podskupova. Onda je*

(TOP 1) Unija bilo koje familije članova od $\mathcal{U}_d$ je član od $\mathcal{U}_d$.
(TOP 2) Presjek konačne mnogo članova od $\mathcal{U}_d$ je član od $\mathcal{U}_d$.
(TOP 3) Prazan podskup $\emptyset$ i čitav prostor M su članovi od $\mathcal{U}_d$.

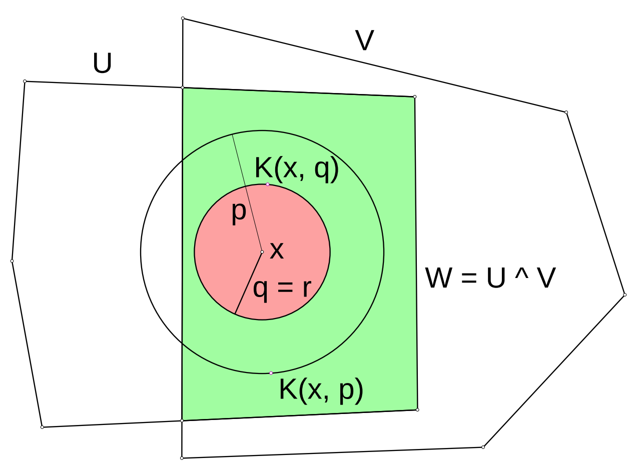


Slika 20. U dokazu implikacije ($\Longleftarrow$) u Teoremu 4.1 oko svake točke skupa U postoji otvorena kugla sadržana u skupu pa je on unija takvih kugli i zato otvoren.

Dokaz. (TOP 1). Ovo svojstvo očigledno vrijedi zato jer je unija skupova koji su unije otvorenih kugala ponovo unija otvorenih kugala (svih njih zajedno !!).

(TOP 2). Dovoljno je pokazati da je presjek svaka dva otvorena podskupa opet otvoreni podskup jer se nakom toga dokaz lagano provodi matematičkom indukcijom.

Neka su U i V otvoreni podskupovi metričkog prostora M. Neka je W njihov presjek. Da bi smo pokazali da je W također otvoren skup, pokazati ćemo da za svaku točku x iz W postoji pozitivan realan broj r takav da je otvorena kugla $K(x, r)$ sadržana u presjeku W.



Slika 21. Dokaz svojstva (TOP 2) u Teoremu 4.2.

Jer je točka x iz otvorenog skupa U, postoji pozitivan realan broj p takav da je otvorena kugla $K(x, p)$ sadržana u skupu U. Iz sličnog razloga, postoji pozitivan realan broj q takav da je $K(x, q) \subset V$. Neka je r manji od brojeva p i q. Tada je očigledno $K(x, r) \subset W$.

(TOP 3). Prazan skup $\emptyset$ je unija prazne familije otvorenih kugala dok se čitavi prostor M može prikazati kao unija familije

$$\{K(x, 1) \,:\, x \in M\}$$

otvorenih kugala gdje se kao indeksi koriste sve točke prostora M. Jasno da se ovdje broj 1 može zamijeniti bilo kojim pozitivnim realnim brojem. Zato su $\emptyset$ i M otvoreni skupovi. $\square$

Kolekciju $\mathcal{U}_d$ svih otvorenih podskupova metričkog prostora (M, d) zovemo *topološka struktura* ili jednostavno *topologija* na metričkom prostoru M.

Prema tome, vidimo da svaka metrika d na nepraznom skupu M inducira na njemu topologiju $\mathcal{U}_d$. U slijedećem paragrafu ćemo proučiti kako ta topologija ovisi od metrike, tj., kada različite metrike induciraju iste topologije.

5. Ekvivalentne metrike

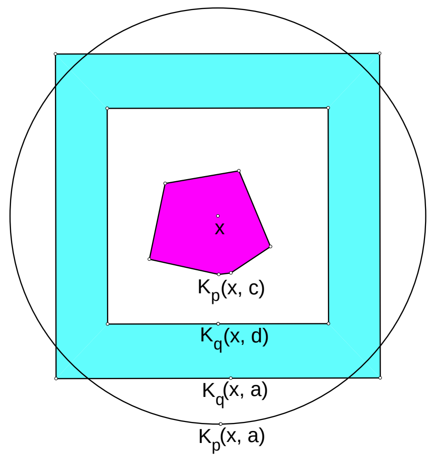
DEFINICIJA 5.1. Neka su p i q dvije metrike na istom nepraznom skupu M. Kažemo da su one *topološki ekvivalentne* i pišemo $p \underset{t}{\sim} q$ ako se topološka struktura $\mathcal{U}_p$ na metričkom prostoru (M, p) podudara s topološkom strukturom $\mathcal{U}_q$ na metričkom prostoru (M, q), tj., ako je $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_q$. Drugim riječima, metrike su topološki ekvivalentne ako induciraju istu topološku strukturu, tj., istu kolekciju otvorenih skupova.

Primjetimo da je relacija $\underset{t}{\sim}$ topološke ekvivalencije metrika doista relacija ekvivalencije na skupu svih metrika na istom nepraznom skupu jer relacija jednakosti familija ima svojstva refleksivnosti, simetričnosti, i tranzitivnosti.

TEOREM 5.1. *Dvije metrike p i q na istom nepraznom skupu M su topološki ekvivalentne ako i samo ako za svaku točku x prostora M i svaki pozitivan realan broj a postoji pozitivan realan broj b takav da je $K_p(x, b) \subset K_q(x, a)$ i $K_q(x, b) \subset K_p(x, a)$.*

DOKAZ. ($\Longrightarrow$). Pretpostavimo da je $p \underset{t}{\sim} q$. Neka su točka x iz M i pozitivan realan broj a zadani. Jer je otvorena kugla $K_q(x, a)$ element familije $\mathcal{U}_q$, iz $\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_p$, slijedi da je ta kugla p-otvoren skup, pa prema Teoremu 4.1 postoji pozitivan realan broj c takav da je $K_p(x, c) \subset K_q(x, a)$. Na isti način vidimo da postoji pozitivan realan broj d takav da je $K_q(x, d) \subset K_p(x, a)$. Neka je b pozitivan realan broj manji od brojeva c i d. Za njega očigledno vrijedi $K_p(x, b) \subset K_q(x, a)$ i $K_q(x, b) \subset K_p(x, a)$.

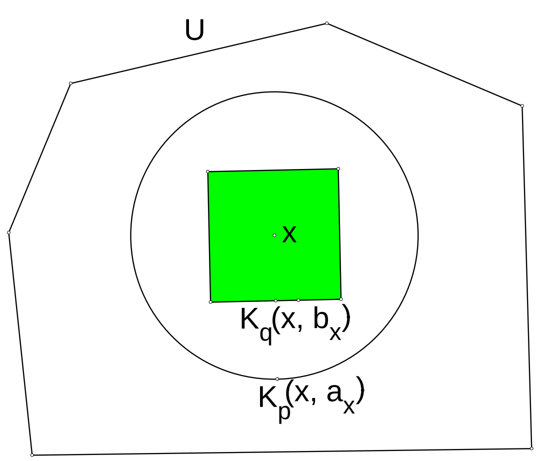
($\Longleftarrow$). Pretpostavimo da za svaku točku x prostora M i svaki pozitivan realan broj a postoji pozitivan realan broj b takav da je $K_p(x, b) \subset K_q(x, a)$ i $K_q(x, b) \subset K_p(x, a)$. Da bi smo pokazali da je



SLIKA 22. Dokaz implikacije ($\Longrightarrow$) u Teoremu 5.1.

$p \underset{t}{\sim} q$ dovoljno je provjeriti jednakost $\mathcal{U}_p = \mathcal{U}_q$. To će biti pokazano ako provjerimo da je $\mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_q$ i $\mathcal{U}_q \subset \mathcal{U}_p$. Argumenti za obje inkluzije su slični, pa ćemo dokazati samo prvu.

Neka je U neki član familije $\mathcal{U}_p$. Dakle, U je p-otvoren skup i naš zadatak je da vidimo da je on i q-otvoren. On će sigurno biti q-otvoren ako pokažemo da je unija otvorenih q-kugala.



SLIKA 23. Dokaz implikacije ($\Longleftarrow$) u Teoremu 5.1.

Neka je x bilo koja točka skupa U. Jer je skup U po pretpostavci p-otvoren, postoji pozitivan realan broj a_x takav da je $K_p(x,\, a_x) \subset U$. Po pretpostavci, možemo naći pozitivan realan broj b_x sa svojstvom da je $K_q(x,\, b_x) \subset K_p(x,\, a_x)$. Sada je jasno da je skup U unija familije $\{\, K_q(x,\, b_x) \,:\, x \in U \,\}$ otvorenih q-kugala. Zato je skup U q-otvoren. $\square$

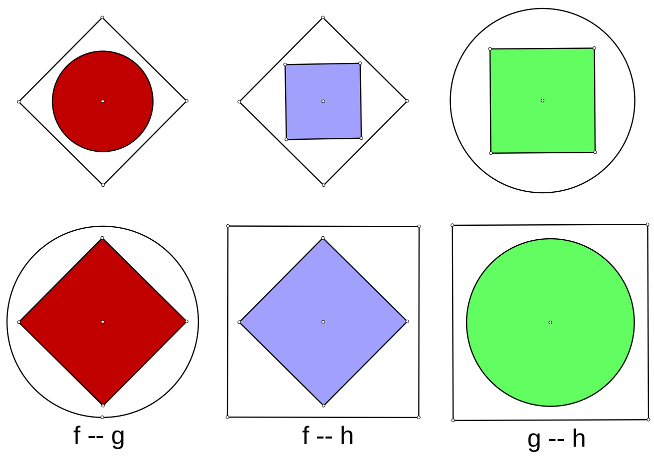
Primjetimo da su na ravnini $\mathbb{R}^2$ metrike f, g, i h definirane sa

$$f(a,\, b) = |\, a_1 - b_1\,| + |\, a_2 - b_2\,|,$$

$$g(a,\, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

$$h(a,\, b) = \max\{\, |\, a_1 - b_1\,|,\, |\, a_2 - b_2\,|\,\}.$$

topološki ekvivalentne jer je jasno da za svaki par $\{\,p,\, q\,\}$ iz skupa $\{\,f,\, g,\, h\,\}$ vrijedi da za svaku točku x ravnine i svaki pozitivan realan broj a postoji pozitivan realan broj b takav da je $K_p(x,\, b) \subset K_q(x,\, a)$ i $K_q(x,\, b) \subset K_p(x,\, a)$.



Slika 24. Shematski prikaz razloga topološke ekvivalentnosti metrika f, g, i h u ravnini.

Definicija 5.2. Za metriku d na nepraznom skupu M kažemo da je *omeđena* ako postoji pozitivan realan broj G takav da je $d(x,\, y) < G$ za sve točke x i y iz skupa M. Drugim riječima, ako je dijametar *diam* M čitavog prostora M konačan.

Propozicija 5.1. *Neka je M neprazan skup. Svaka metrika d na M je topološki ekvivalentna s nekom omeđenom metrikom ϱ na M.*

Dokaz. Neka je $\varrho = d_\clubsuit$, gdje je metrika $d_\clubsuit$ bila ranije definirana pravilom

$$d_\clubsuit(a,\, b) = \frac{d(a,\, b)}{1 + d(a,\, b)}$$

za sve točke a i b iz skupa M. Metrika ϱ je omeđena (za broj G možemo uzeti broj jedan), pa preostaje pokazati da su metrike d i ϱ topološki ekvivalentne.

Prema Teoremu 5.1, dovoljno je provjeriti da za svaku točku x prostora M i svaki pozitivan realan broj a postoji pozitivan realan broj b takav da je $K_\varrho(x,\, b) \subset K_d(x,\, a)$ i $K_d(x,\, b) \subset K_\varrho(x,\, a)$.

Neka su točka x prostora M i pozitivan realan broj a dani. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < 1$. Neka je b bilo koji pozitivan realan broj manji od broja $a/(1 + a)$.

Da bi smo pokazali inkluziju $K_\varrho(x,\, b) \subset K_d(x,\, a)$ moramo vidjeti da za točku y iz M iz $\varrho(x,\, y) < b$ slijedi $d(x,\, y) < a$. Neka je $w = d(x,\, y)$. Dakle, moramo dokazati da iz $w/(1 + w) < b$ slijedi $w < a$. Ali, jer je $b < a/(1 + a)$ vrijedi $w/(1 + w) < a/(1 + a)$. Pomnožimo li obje strane posljednje nejednakosti sa pozitivnim brojem $(1 + w)(1 + a)$ dobijemo $w + a\,w < a + a\,w$ ili $w < a$ što smo i željeli.

Kao posljednje, da bi smo pokazali inkluziju $K_d(x,\, b) \subset K_\varrho(x,\, a)$ moramo vidjeti da za točku y iz M iz $d(x,\, y) < b$ slijedi $\varrho(x,\, y) < a$. Neka je opet $w = d(x,\, y)$. Dakle, moramo dokazati da iz $w < b$ slijedi $w/(1 + w) < a$. Ali, jer je $b < a/(1 + a)$ vrijedi $w < a/(1 + a)$. Pomnožimo li obje strane posljednje nejednakosti sa pozitivnim brojem $1 + a$ dobijemo $w < a\,(1 - w)$ ili $w/(1 + w) < a\,(1 - w)/(1 + w)$. Ako sada primjetimo da je broj $(1 - w)/(1 + w)$ uvijek manji od jedan, jer je nejednakost $(1 - w)/(1 + w) < 1$ ekvivalentna nejednakosti $1 - w < 1 + w$ koja sigurno vrijedi budući da je $0 < 2\,w$. Kako je $w/(1 + w) = \varrho(x,\, y)$, slijedi ocjena $\varrho(x,\, y) < a$ što smo i trebali pokazati. $\square$

Zanimljivo je da skup svih metrika na nepraznom skupu dopušta još jednu vrstu ekvivalencije koja je mnogo finija od topološke ekvivalencije $\underset{t}{\sim}$. Dakle, u toj ekvivalenciji biti će više klasa ekvivalentnosti.

Definicija 5.3. Neka su p i q dvije metrike na istom nepraznom skupu M. Kažemo da su one *uniformno ekvivalentne* i pišemo $p \underset{u}{\sim} q$ ako postoje pozitivni realni brojevi h i k takvi da vrijedi

$$p(x,\, y) < h\,q(x,\, y) \quad \text{i} \quad q(x,\, y) < k\,p(x,\, y)$$

za sve x i y iz M.

Naprimjer, metrike f, g, i h na ravnini koje smo već dva puta spominjali su uniformno ekvivalentne.

Propozicija 5.2. *Svake dvije uniformno ekvivalentne metrike na istom nepraznom skupu M su uvijek i topološki ekvivalentne.*

Dokaz. Neka su p i q uniformno ekvivalentne metrike na skupu M. Odaberimo pozitivne realne brojeve h i k takve da vrijedi

$$p(x,\, y) < h\,q(x,\, y) \quad \text{i} \quad q(x,\, y) < k\,p(x,\, y)$$

za sve x i y iz M. Da bi smo pokazali da su metrike p i q topološki ekvivalentne, prema Teoremu 5.1, dovoljno je dokazati da za svaku točku x prostora M i svaki pozitivan realan broj a postoji pozitivan realan broj b takav da je $K_q(x,\, b) \subset K_p(x,\, a)$ i $K_p(x,\, b) \subset K_q(x,\, a)$.

Neka su točka x prostora M i pozitivan realan broj a dani. Neka je b pozitivan realan broj manji od brojeva a/h i a/k.

Da bi smo pokazali inkluziju $K_p(x,\, b) \subset K_q(x,\, a)$ moramo vidjeti da za točku y iz M iz $p(x,\, y) < b$ slijedi $q(x,\, y) < a$. Ali, po pretpostavci, iz nejednakosti $q(x, y) < k\, p(x, y)$ i $p(x, y) < a/k$ odmah slijedi nejednakost $q(x, y) < a$ što smo i željeli.

Analogno se dokazuje i druga inkluzija $K_q(x, b) \subset K_p(x, a)$. $\square$

Primjetimo da obrat prethodne Propozicije ne vrijedi općenito. To se može vidjeti na različite načine pa i upotrebom slijedeće interesantne propozicije.

Propozicija 5.3. *Omeđena i neomeđena metrika na nepraznom skupu ne mogu biti uniformno ekvivalentne.*

Dokaz. Neka je p omeđena a q neka je neomeđena metrika na nepraznom skupu M. Jer je metrika p omeđena, postoji pozitivan realan broj G takav da je $p(x, y) < G$ za sve točke x i y iz skupa M. S druge strane, jer metrika q nije omeđena, za svaki pozitivan realan broj B postoje točke x_B i y_B iz skupa M takve da vrijedi $q(x_B, y_B) > B$. Kad bi metrike p i q bile uniformno ekvivalentne, postojao bi pozitivan realan broj h takav da bi vrijedilo $q(x, y) < h\, p(x, y)$ za sve $x, y \in M$. Neka je $B = h\, G$. Onda bi istovremeno moralo biti $q(x_B, y_B) > B$ i $q(x_B, y_B) < h\, p(x_B, y_B) < h\, G = B$, jer je $p(x_B, y_B) < G$. Ali, to je očigledno nemoguće.

Primjetimo da se može pokazati malo više. Naime, za uniformno ekvivalentne metrike p i q vrijedi da ako je metrika p (ne)omeđena onda metrika q mora također biti (ne)omeđena. $\square$

Sada je jasno zašto obrat tvrdnje iz Propozicije 5.2 ne vrijedi: Neka nam d označava standardnu metriku na pravcu $\mathbb{R}$. Prema Propoziciji 5.1, metrika d je topološki ekvivalentna metrici $d_\clubsuit$. Ali, prema Propoziciji 5.3, metrike d i $d_\clubsuit$ ne mogu biti uniformno ekvivalentne jer je metrika d neomeđena dok je metrika $d_\clubsuit$ omeđena. Zato su d i $d_\clubsuit$ primjer topološki ekvivalentnih metrika koje nisu uniformno ekvivalentne.

6. Direktni produkt metričkih prostora

Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Na Kartezijevom produktu $Z = X \times Y$ želimo definirati metriku za koju ćemo moći kazati da je inducirana metrikama p i q, tj., koja podjednako ovisi o obje metrike. To se može načiniti na bezbroj načina. Najjednostavnije su slijedeće tri metrike:

$$f_{p,q}(z, w) = p(x,u) + q(y,v),$$

$$g_{p,q}(z, w) = \sqrt{p(x,u)^2 + q(y,v)^2},$$

$$h_{p,q}(z, w) = \max\{\, p(x,u),\, q(y,v)\,\},$$

za sve točke $z = (x, y)$ i $w = (u, v)$ Kartezijevog produkta $Z = X \times Y$.

Propozicija 6.1. *Naprijed definirane funkcije $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, i $h_{p,q}$ su doista metrike na produktu Z.*

Dokaz. Te funkcije očigledno sve zadovoljavaju svojstva (MET 1) - (MET 3). Da bi smo provjerili svojstvo (MET 4), promatrajmo tri točke $z = (x,\, y)$, $w = (u,\, v)$, i $t = (r,\, s)$ iz produkta Z. Svojstvo (MET 4) vrijedi za metrike p i q pa imamo

$$p(x,\, r) \leq p(x,\, u) + p(u,\, r), \qquad q(y,\, s) \leq q(y,\, v) + q(v,\, s).$$

Zato je

$$f_{p,\,q}(z,\, t) = p(x,\, r) + q(y,\, s) \leq p(x,\, u) + p(u,\, r) + \\ q(y,\, v) + q(v,\, s) = f_{p,\,q}(z,\, w) + f_{p,\,q}(w,\, t),$$

što dokazuje svojstvo (MET 4) za $f_{p,\,q}$.

Provjera svojstva (MET 4) za funkciju $g_{p,\,q}$ je nešto složenija a svodi se na očiglednu nejednakost

$$(p(x,\, u)\, q(v,\, s) - p(u,\, r)\, q(y,\, v))^2 \geq 0,$$

dok je to svojstvo za funkciju $h_{p,\,q}$ vrlo lagano provjeriti. □

Propozicija 6.2. *Za metrike* $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, *i* $h_{p,q}$ *za sve* $z = (x,\, y)$ *i* $w = (u,\, v)$ *iz* Z *vrijede slijedeće nejednakosti:*

$$(a) \qquad h_{p,\,q}(z,\, w) \leq g_{p,\,q}(z,\, w) \leq \sqrt{2}\, h_{p,\,q}(z,\, w),$$

$$(b) \qquad h_{p,\,q}(z,\, w) \leq f_{p,\,q}(z,\, w) \leq 2\, h_{p,\,q}(z,\, w),$$

$$(c) \qquad g_{p,\,q}(z,\, w) \leq f_{p,\,q}(z,\, w) \leq \sqrt{2}\, g_{p,\,q}(z,\, w).$$

Dokaz. (a). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p(x,\, u) \geq q(y,\, v)$. Onda je

$$h_{p,\,q}(z,\, w) = p(x,\, u) \leq \sqrt{p(x,\, u)^2 + q(y,\, v)^2} = g_{p,\,q}(z,\, w),$$

što je prva nejednakost u dijelu (a). Da bi smo dokazali drugu nejednakost, primjetimo da je

$$2\, h_{p,\,q}(z,\, w)^2 = 2\, p(x,\, u)^2 \geq p(x,\, u)^2 + q(y,\, v)^2 = g_{p,\,q}(z,\, w)^2.$$

Izvadimo li kvadratni korijen iz lijevog i desnog kraja gornje nejednakosti dobiti ćemo drugu nejednakost iz (a).

(b). Opet možemo pretpostaviti da je $p(x,\, u) \geq q(y,\, v)$. Onda je

$$h_{p,\,q}(z,\, w) = p(x,\, u) \leq p(x,\, u) + q(y,\, v) = f_{p,\,q}(z,\, w),$$

što je prva nejednakost u (b). Za drugu nejednakost, imamo odmah da je

$$2\, h_{p,\,q}(z,\, w) = 2\, p(x,\, u) \geq p(x,\, u) + q(y,\, v) = f_{p,\,q}(z,\, w).$$

(c). Kako je

$$f_{p,\,q}(z,\, w)^2 - g_{p,\,q}(z,\, w)^2 = (p(x,\, u) + q(y,\, v))^2 - \\ p(x,\, u)^2 - q(y,\, v)^2 = 2\, p(x,\, u)\, q(y,\, v) \geq 0,$$

slijedi da je $f_{p,q}(z, w) \geq g_{p,q}(z, w)$. S druge strane, iz

$$2\, g_{p,q}(z, w)^2 - f_{p,q}(z, w)^2 = 2\,(p(x, u)^2 + q(y, v)^2) - \\ (p(x, u) + q(y, v))^2 = (p(x, u) - q(y, v))^2,$$

očigledno slijedi druga nejednakost u (c). □

Korolar 6.1. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Onda su metrike $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, i $h_{p,q}$ na Kartezijevom produktu $Z = X \times Y$ uniformno ekvivalentne.*

Dokaz. Nejednakosti (a), (b), i (c) nam omogućuju da odmah nađemo konstante h i k u definiciji uniformne ekvivalentnosti za svaki par među metrikama $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, i $h_{p,q}$. □

Kako uniformna ekvivalentnost povlači topološku ekvivalentnost metrika, odaberemo li bilo koju od metrika $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, ili $h_{p,q}$ na Kartezijevom produktu $Z = X \times Y$ će biti inducirana ista topološka struktura koju zovemo *topologija direktnog produkta* topologija $\mathcal{U}_p$ i $\mathcal{U}_q$. Produkt $Z = X \times Y$ zajedno s bilo kojom od metrika $f_{p,q}$, $g_{p,q}$, ili $h_{p,q}$ je metrički prostor koji zovemo *direktni produkt* metričkih prostora (X, p) i (Y, q).

Gornje razmatranje sada možemo lagano sa slučaja produkta dvaju metričkih prostora proširiti na slučaj produkta bilo kojeg konačnog broja metričkih prostora.

Neka je k bilo koji prirodan broj. Neka su (X_j, q_j) metrički prostori za $j = 1, \ldots, k$. Neka je $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$. Na Kartezijevom produktu $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ možemo na tri različita načina definirati metrike f_Q, g_Q, i h_Q tako da stavimo

$$f_Q(x, y) = q_1(x_1, y_1) + \cdots + q_k(x_k, y_k),$$

$$g_Q(x, y) = \sqrt{q_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + q_k(x_k, y_k)^2},$$

$$h_Q(x, y) = \max\{q_1(x_1, y_1), \cdots, q_k(x_k, y_k)\},$$

za sve $x = (x_1, \ldots, x_k)$ i $y = (y_1, \ldots, y_k)$ iz X.

Za tako definirane metrike vrijede nejednakosti

$$h_Q(x, y) \leq g_Q(x, y) \leq \sqrt{k}\, h_Q(x, y),$$

$$h_Q(x, y) \leq f_Q(x, y) \leq k\, h_Q(x, y),$$

$$g_Q(x, y) \leq f_Q(x, y) \leq \sqrt{k}\, g_Q(x, y),$$

za sve točke $x = (x_1, \ldots, x_k)$ i $y = (y_1, \ldots, y_k)$ iz produkta X.

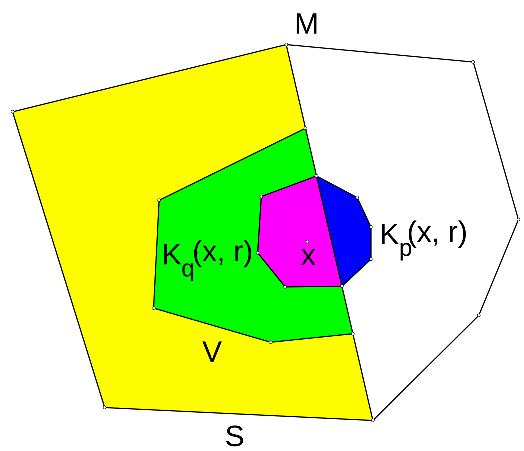
Odatle slijedi da su metrike f_Q, g_Q, i h_Q uniformno ekvivalentne. Zato su one također i topološki ekvivalentne pa induciraju istu topologiju na produktu X. Kažemo da je X *direktni produkt* metričkih prostora X_1,..., X_k a topologija na X je *topologija direktnog produkta*.

7. Potprostor metričkog prostora

Neka je (M, p) metrički prostor. Neka je S podskup od M. Onda je produkt $S \times S$ podskup produkta $M \times M$. Zato možemo promatrati restrikciju $q : S \times S \to \mathbb{R}$ funkcije udaljenosti $p : M \times M \to \mathbb{R}$. Dakle, $q(x, y) = p(x, y)$ za sve $x, y \in S$. Lagano se provjeri da funkcija q ima svojstva (MET 1) — (MET 4), pa je par (S, q) metrički prostor koji zovemo *potprostor* metričkog prostora (M, p).

Ako je (S, q) sada potprostor metričkog prostora (M, p), onda imamo inducirane dvije topologije: $\mathcal{U}_p$ na M i $\mathcal{U}_q$ na S. Slijedeći teorem opisuje kako se $\mathcal{U}_q$ može jednostavno dobiti iz $\mathcal{U}_p$. Točnije, on tvrdi da je $V \in \mathcal{U}_q$ onda i samo onda ako postoji $U \in \mathcal{U}_p$ takav da je $V = U \cap S$.

Teorem 7.1. *Neka je S potprostor metričkog prostora M. Podskup V od S je otvoren u S ako i samo ako postoji otvoreni podskup U od M takav da je $V = U \cap S$.*



Slika 25. Dokaz implikacije ($\Longrightarrow$) u Teoremu 7.1.

Dokaz. ($\Longrightarrow$). Neka je V otvoren skup u potprostoru S. Onda za svaku točku x iz V možemo naći pozitivan realan broj r_x takav da je $K_q(x, r_x) \subset V$, gdje je q oznaka za metriku na podskupu S što je inducira metrika p na čitavom prostoru M. Primjetimo sada da je očigledno $K_q(x, r_x) = K_p(x, r_x) \cap S$ i da je skup $U = \cup_{x \in V} K_p(x, r_x)$ otvoren u M budući da je unija otvorenih kugala. Nadalje, imamo

$$U \cap S = [\cup_{x \in V} K_p(x, r_x)] \cap S = \cup_{x \in V} \, [K_p(x, r_x) \cap S] = \cup_{x \in V} K_q(x, r_x) = V.$$

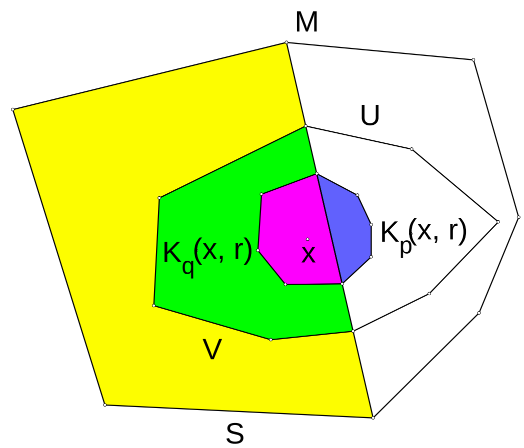
($\Longleftarrow$). Neka je sada V podskup potprostora S za koji postoji otvoreni podskup U prostora M takav da je $V = U \cap S$. Da bi smo pokazali da je skup V otvoren u S, dovoljno je pokazati da za svaku točku x iz V postoji pozitivan realan broj r takav da je $K_q(x, r) \subset V$, gdje q

ponovo označava metriku na podskupu S što je inducira metrika p na prostoru M.

Jer je $V \subset U$ i U je otvoren u M, za svaku točku x iz V možemo naći pozitivan realan broj r takav da je $K_p(x, r) \subset U$. Ali, onda vrijedi

$$K_q(x, r) = K_p(x, r) \cap S \subset U \cap S = V.$$

$\square$



Slika 26. Dokaz implikacije ($\Longleftarrow$) u Teoremu 7.1.

8. Definicija topološkog prostora

DEFINICIJA 8.1. Familija $\mathcal{T}$ podskupova skupa X je *topologija* (na skupu X) ako ona zadovoljava slijedeća tri uvjeta:

(TOP 1) Unija $\bigcup\{\, B \,|\, B \in \mathcal{S}\,\}$ članova svake podfamiliju $\mathcal{S}$ od $\mathcal{T}$ je iz $\mathcal{T}$.

(TOP 2) Presjek $\bigcap\{\, B \,|\, B \in \mathcal{S}\,\}$ članova svake **konačne** podfamiliju $\mathcal{S}$ od $\mathcal{T}$ je iz $\mathcal{T}$.

(TOP 3) Prazan podskup $\emptyset$ i cijeli skup X su članovi familije $\mathcal{T}$.

Par $(X, \mathcal{T})$ od nekog skupa X i topologije $\mathcal{T}$ na njemu nazivamo *topološki prostor*. Elemente skupa X zovemo *točkama* a članove topologije $\mathcal{T}$ zovemo *otvoremin skupovima* topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Dakle, topološki prostor je skup točaka zajedno s familijom otvorenih skupova takvom da je unija otvorenih skupova otvoreni skup, da je presjek konačno mnogo otvorenih skupova otvoreni skup, i da su prazan skup i skup svih točaka otvoreni skupovi.

Zahtijevi (TOP 1) - (TOP 3) iz gornje definicije nazivaju se aksiomi topologije. Primjetimo da ovdje nismo definirali pojam otvorenog skupa već se on smatra osnovnim pojmom čija svojstva su opisana implicitno aksiomima topologije. Kasnije ćemo vidjeti da se topologija može opisati i na druge načine polazaći od drugih osnovnih pojmova i drugačijim aksiomima naprimjer od pojma zatvorenog skupa ili od pojma zatvarača skupa i aksioma Kuratowskog.

Prisjetimo se da smo u svakom metričkom prostoru (X, d) definirali familiju $\mathcal{T}_d$ njegovih otvorenih podskupova koja zadovoljava aksiome topologije (TOP 1) - (TOP 3). Zato je par $(X, \mathcal{T}_d)$ primjer topološkog prostora. Dakle, svaki metrički prostor na prirodan način može se snabdjeti topologijom koja ovisi od (klase topološke ekvivalencije) metrike tog metričkog prostora.

Sada se možemo zapitati da li vrijedi obrat gornje tvrdnje, tj., nije li možda svaka topologija $\mathcal{T}$ na skupu X oblika $\mathcal{T}_d$ za neku metriku d na X. Kasnije ćemo vidjeti da postoje mnogi primjeri topologija koje se nemogu dobiti na taj način, tj., inducirati bilo kakvom metrikom. One topologije koje se mogu dobiti iz metrika zaslužuju posebnu pažnju.

DEFINICIJA 8.2. Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je *metrizabilan* ako na skupu X postoji metrika d takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$, tj., otvoreni i d-otvoreni skupovi se podudaraju.

Na istom skupu može se istovremeno definirati više topologija. Kako su sve one familije podskupova istog skupa možemo ih uspoređivati koristeći inkluziju kao uređaj.

DEFINICIJA 8.3. Neka su $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ topologije na skupu X. Kažemo da je $\mathcal{U}$ *slabija* od $\mathcal{V}$ ili da je $\mathcal{V}$ *jača* od $\mathcal{U}$ i pišemo $\mathcal{U} \le \mathcal{V}$ odnosno $\mathcal{V} \ge \mathcal{U}$ ako je $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Dakle, ako je topologija $\mathcal{U}$ slabija od topologije $\mathcal{V}$ onda je svaki skup koji je otvoren u topologiji $\mathcal{U}$ otvoren u topologiji $\mathcal{V}$.

Za riječi slabija i jača kao sinonimi koriste se manja, grublja odnosno veća, finija.

Skup svih topologija na skupu X je parcijalno uređeni skup u odnosu na uređaj $\leq$. On općenito nije linearno uređen jer mogu postojati neuporedive topologije, tj., takve topologije $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ za koje ne vrijedi niti $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ niti $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$. S druge strane, svaki skup ima indiskretnu topologiju koja je najslabija od svih njegovih topologija i diskretnu topologiju koja je najjača od svih njegovih topologija.

DEFINICIJA 8.4. Za bilo koji skup X, neka nam $\mathcal{R}(X)$ bude oznaka za *indiskretnu topologiju* $\{\emptyset, X\}$ čiji elementi su samo prazan podskup $\emptyset$ od X i sam skup X. Slično je $\mathcal{P}(X)$ oznaka za *diskretnu topologiju* čiji elementi su svi podskupovi od X (tj., partitivni skup od X – skup svih njegovih dijelova).

Sada ćemo opisati nekoliko primjera topoloških prostora koji ilustriraju gornje definicije.

PRIMJER 8.1. Na praznom skupu i na jednočlanim skupovima možemo definirati samo jednu topologiju. Na tim skupovima (i samo na njima) se diskretna i indiskretna topologija podudaraju. Dosta je jasno da su topološki prostori bez točaka ili samo s jednom točkom jednostavni i da su sve tvrdnje o tim prostorima obično trivijalne.

PRIMJER 8.2. Neka je X dvočlani skup s elementima a i b. Onda je $a \neq b$, pa na X možemo definirati ove četiri topologije (i samo njih): indiskretnu topologiju $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$, drugu topologiju $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, treću topologiju $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, i diskretnu topologiju

$$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

Topološki prostor $(X, \mathcal{T}_4)$ nazivamo *dijada* (ili *dvotočje*). Očigledno su $\mathcal{T}_2$ i $\mathcal{T}_3$ neuporedive topologije ali kao što ćemo vidjeti kasnije, topološki prostori $(X, \mathcal{T}_2)$ i $(X, \mathcal{T}_3)$ su u biti identični jer su homeomorfni, tj., oni su izomorfni u kategoriji topoloških prostora.

PRIMJER 8.3. Na skupu $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva možemo definirati bezbroj topologija. Slijedeće tri imaju relativno jednostavne opise.

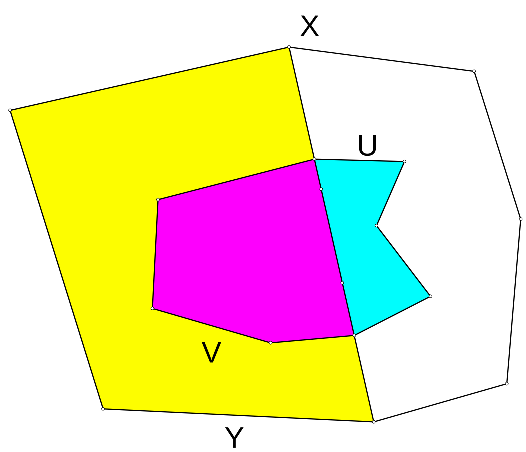
U prvoj $\mathcal{T}_1$ podskup U od $\mathbb{R}$ je otvoren ako i samo ako je on unija otvorenih intervala, tj., ako i samo ako za svaki x iz U postoje realni brojevi a i b takvi da je $a < b$ i da vrijedi $x \in (a, b) \subset U$. Topologija $\mathcal{T}_1$ se podudara s topologijom induciranom metrikom funkcije apsolutne vrijednosti i naziva se *prirodna topologija* na $\mathbb{R}$. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ zovemo često *pravac*, nešto određenije *realni pravac* (jer ima i drugih vrsta pravaca, npr. dugi pravac), ili *jednodimenzionalni Euklidski prostor* (jer ima Euklidskih prostora svih dimenzija).

U drugoj $\mathcal{T}_2$ podskup U od $\mathbb{R}$ je otvoren ako i samo ako je on ili prazan podskup $\emptyset$ ili čitav skup $\mathbb{R}$ ili je otvorena zraka $(-\infty, r)$ za neki realni broj r. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ nije metrizabilan budući da ne postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $0 \in U$ i $1 \in U$.

U trećoj $\mathcal{T}_3$ podskup U od $\mathbb{R}$ je otvoren ako i samo ako je on prazan podskup $\emptyset$ ili je $\mathbb{R} \setminus U$ konačan skup. Dakle, otvoreni su jedino prazan podskup i komplementi konačnih podskupova od $\mathbb{R}$. Topološki prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ također nije metrizabilan i to iz istog razloga kao i $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$.

Primjer 8.4. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je Y podskup od X. Dakako da općenito na skupu Y možemo definirati na bezbroj načina topologije. Od svih tih mogućnosti jedino se slijedeća definicija nameće jednostavnošću i mnogim pogodnostima u koje ćemo se uvjeriti kasnije.

Sa $\mathcal{T}|_Y$ označimo familiju svih presjeka $U \cap Y$ gdje je U bilo koji član topologije $\mathcal{T}$.



Slika 27. Definicija relativne topologije $\mathcal{T}|_Y$ na podskupu Y topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 8.1. *Familija $\mathcal{T}|_Y$ je topologija na skupu Y.*

Dokaz. Moramo provjeriti da familija $\mathcal{T}|_Y$ zadovoljava svojstva (TOP 1) - (TOP 3).

Neka je $\mathcal{S}$ familija članova od $\mathcal{T}|_Y$. Onda postoji familija $\mathcal{Z}$ članova od $\mathcal{T}$ takva da je $B \in \mathcal{S}$ ako i samo ako postoji $C \in \mathcal{Z}$ za koji vrijedi $B = C \cap Y$.

Iz svojstva (TOP 1) za topologiju $\mathcal{T}$ slijedi da je unija

$$U = \bigcup \{ C \mid C \in \mathcal{Z} \}$$

članova familije $\mathcal{Z}$ član topologije $\mathcal{T}$. Neka je $V = \bigcup \{ B \mid B \in \mathcal{S} \}$. Jer je $V = U \cap Y$, vidimo da je unija članova od $\mathcal{S}$ član od $\mathcal{T}|_Y$ što dokazuje da $\mathcal{T}|_Y$ zadovoljava aksiom (TOP 1).

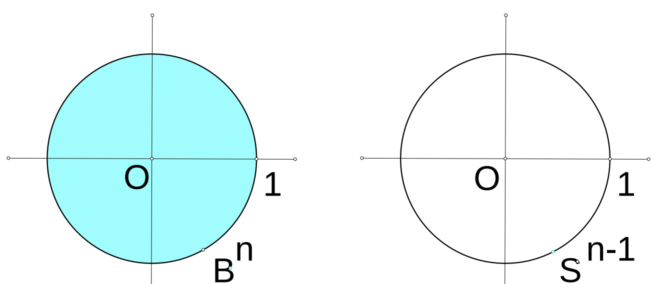
S druge strane, ako je polazna familija $\mathcal{S}$ bila konačna, jasno je da će njoj pridružena familija $\mathcal{Z}$ također biti konačna. Zato se gornje zaključivanje može u cijelosti ponoviti i na presjeke konačnih familija članova of $\mathcal{T}|_Y$.

Na kraju, jer je $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $Y = X \cap Y$, jasno je da (TOP 3) za $\mathcal{T}$ povlači (TOP 3) za $\mathcal{T}|_Y$. $\square$

Topologiju $\mathcal{T}|_Y$ nazivamo *relativna topologija* na podskupu Y inducirana danom topologijom $\mathcal{T}$ na X. Par $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se zove *potprostor* (topološkog) prostora $(X, \mathcal{T})$.

Primjetimo da ako je Y potprostor metričkog prostora (X, d), onda restrikcija $d|_{Y\times Y}$ metrike d na Y inducira relativnu topologiju, tj., $(Y, \mathcal{T}_{d|_{Y\times Y}})$ postaje potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$. Drugim riječima, vrijedi jednakost $\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d|_{Y\times Y}}$.

Primjer 8.5. Neka je n prirodan broj. Prisjetimo se da je d_n oznaka za Euklidsku metriku na skupu $\mathbb{R}^n$ svih n-torki realnih brojeva. Par $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{d_n})$ nazivamo *n-dimenzionalni Euklidski prostor*. Kako je metrika d_n topološki ekvivalentna svakoj od metrika $d_{\| \|_\infty}$ i $d_{\| \|_k}$ za bilo koji prirodan broj k, jasno je da smo u definiciji mogli umjesto metrike d_n uzeti bilo koju od tih metrika.



Slika 28. Prikazi standardne n-ćelije i standardne $(n-1)$-sfere za $n = 2$ (u ravnini).

Primjer 8.6. Mnogo novih primjera topoloških prostora dobivamo ako spojimo posljedna dva primjera. Naime, dovoljno je odabrati neki podskup n-dimenzionalnog Euklidskog prostora i promatrati ga sa relativnom topologijom. Dva važna prostora koji se dobivaju na taj način su *standardna n-ćelija*

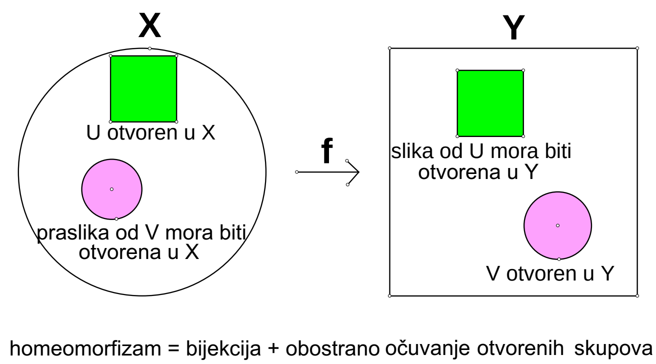
$$\mathbb{B}^n = \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}$$

i *standardna n-sfera*

$$\mathbb{S}^n = \{\, (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \,\}.$$

Za topološke prostore važne su funkcije koje čuvaju njihove topologije. Te funkcije zovemo homeomorfizmi i definiramo ih ovako.

Definicija 8.5. Neka su $(X, \mathcal{S})$ i $(Y, \mathcal{T})$ topološki prostori. Za bijekciju $f : X \to Y$ kažemo da je *homeomorfizam* (prostora X na prostor Y) ako je podskup U od X iz $\mathcal{S}$ onda i samo onda ako je njegova slika $f(U)$ iz $\mathcal{T}$.



Slika 29. Shematski prikaz homeomorfizma.

Dakle, homeomorfizam preslikava otvorene skupove iz prostora X na otvorene skupove iz prostora Y, i obratno. Zato f nije samo obostrano jednoznačna korespondencija (bijekcija) na nivou točaka prostora, nego i na nivou topoloških struktura, tj., otvorenih skupova na tim prostorima.

Propozicija 8.2. *Identična funkcija na topološkom prostoru je homeomorfizam tog prostora na samog sebe. Inverz homeomorfizma je homeomorfizam. Kompozicija homeomorfizama je homeomorfizam.*

Dokaz. Jednostavne dokaze gornjih tvrdnji prepuštamo čitatelju za vježbu. $\square$

Definicija 8.6. Za topološke prostore $(X, \mathcal{S})$ i $(Y, \mathcal{T})$ kažemo da su *homeomorfni* i pišemo $X \cong Y$ ako postoji bar jedan homeomorfizam prostora X na prostor Y.

Teorem 8.1. *Binarna relacija $\cong$ homeomorfnosti topoloških prostora je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Slijedi neposredno iz Propozicije 8.2. $\square$

Relacijom $\cong$ klasificiramo topološke prostore u klase međusobno homeomorfnih prostora. Prostori iz iste klase imaju dakako isti broj elemenata (jer je homeomorfizam po definiciji bijekcija) i iste topološke strukture, pa se mogu razlikovati jedino u naravi svojih točaka. Dakle, homeomorfni prostori se s apstraktnog stanovišta smatraju jednakima.

Definicija 8.7. Svojstvo $\mathcal{P}$ topoloških prostora takvo da prostor ima svojstvo $\mathcal{P}$ onda i samo onda ako svojstvo $\mathcal{P}$ ima svaki njemu homeomorfan prostor naziva se *topološko svojstvo* ili *topološka invarijanta*.

Topološke invarijante su predmet proučavanja topologije a često se koriste da bi se pokazalo da dva promatrana prostora X i Y nisu homeomorfna. To se radi tako da se izmisli neko topološko svojstvo kojeg jedan od tih prostora ima a drugi ga nema. Tada ti prostori sigurno nisu homeomorfni.

Primjer 8.7. Kardinalni broj topologije (broj otvorenih skupova topološkog prostora) je očigledno topološko svojstvo. Za prostor $(X, \mathcal{T}_3)$ iz Primjera 8.2 ta topološka invarijanta je 3 dok je za prostor $(X, \mathcal{T}_4)$ iz istog primjera ona 4, pa ti prostori nisu homeomorfni.

Topološke invarijante su naprimjer dimenzija prostora, broj komponenata povezanosti, kompaktnost, i razni algebarski objekti (fundamentalni grupoid, grupe homotopije, grupe homologije, grupe kohomologije,...) pridruženi prostoru.

Primjer 8.8. Ako prostor ima točku čiji komplement je disjunktna unija tri otvorena skupa, jasno je da će i svaki prostor koji je njemu homeomorfan također imati bar jednu takvu točku. Sada možemo zaključiti da slova I i Y nisu homeomorfna (tj. da jedinični segment I i prostor Y koji je unija dvije kopije I_1 i I_2 od I tako da je presjek $I_1 \bigcap I_2$ unutrašnja točka od I_1 i rubna točka od I_2). Doista, komplement točke $I_1 \bigcap I_2$ (točka susreta triju krakova slova Y) u prostoru Y je disjunktna unija tri otvorena skupa dok niti jedna točka intervala I nema to svojstvo.

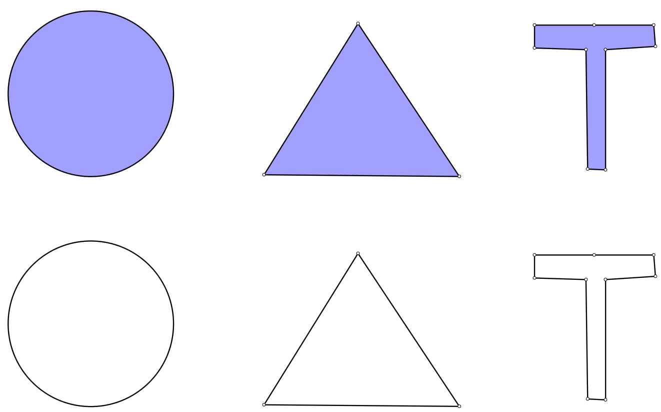
Interesantan (i lagani) problem je da se odredi koja su slova abecede međusobno homeomorfna. Naprimjer, E i F su oba homeomorfna sa Y dok su O i D isto homeomorfni ali su bitno različiti od prostora Y (zašto?).

Definicija 8.8. Topološki prostor koji je homeomorfan sa standardnom ćelijom $\mathbb{B}^n$ dimenzije n naziva se *topološka n-ćelija*, a topološki prostor koji je homeomorfan sa standardnom sferom $\mathbb{S}^n$ dimenzije n naziva se *topološka n-sfera*.

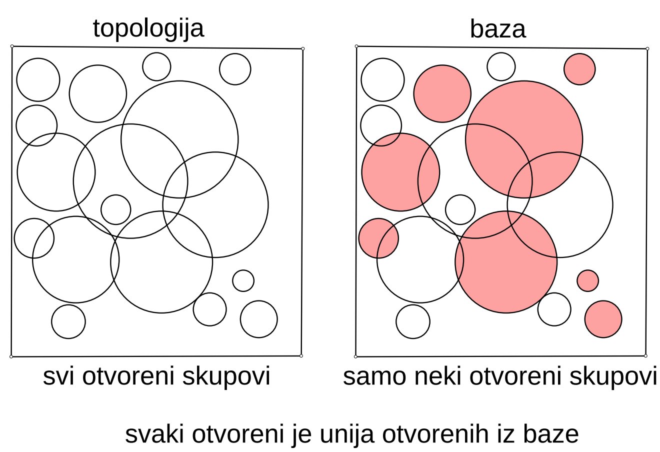
9. Baza topologije

Pojmom baze topologije koji ćemo sada definirati želimo postići da zadamo topologiju opisivanjem samo nekih otvorenih skupova dok se bilo koji otvoreni skup mora moći prikazati kao unija članova baze.

Definicija 9.1. Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X. Za podfamiliju $\mathcal{B}$ od $\mathcal{T}$ kažemo da je *baza* topologije $\mathcal{T}$ ako je svaki član od $\mathcal{T}$ unija članova od $\mathcal{B}$.



SLIKA 30. Primjeri topoloških n-ćelija i topoloških $(n-1)$-sfera za $n = 2$ (u ravnini).



SLIKA 31. Definicija baze topologije.

Naprimjer, u metričkom prostoru (X, d) familija

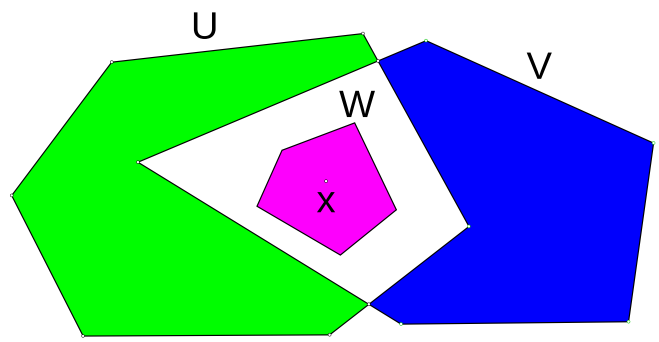
$$\{ K(x, \varepsilon) \,:\, x \in X, \varepsilon > 0 \}$$

otvorenih kugala je baza topologije $\mathcal{T}_d$.

TEOREM 9.1. *Svaka baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{T}$ na skupu X ima svojstva*

(1) *Familija $\mathcal{B}$ je pokrivač za X, tj., svaka točka od X leži u bar jednom članu od $\mathcal{B}$.*
(2) *Za svaka dva člana U i V od $\mathcal{B}$ i za svaku točku x iz presjeka $U \bigcap V$ postoji treći član W od $\mathcal{B}$ takav da je $x \in W \subset U \bigcap V$.*

DOKAZ SVOJSTVA 1. Prema aksiomu (TOP 3), skup X je otvoren pa se može prikazati kao unija članova od $\mathcal{B}$ što povlači da je $\mathcal{B}$ pokrivač od X. $\square$



SLIKA 32. Drugo svojstvo baze topologije.

DOKAZ SVOJSTVA 2. Jer su članovi baze otvoreni skupovi, prema aksiomu (TOP 2), presjek $U \bigcap V$ je otvoren i zato je unija članova od $\mathcal{B}$. Za otvoreni skup W možemo uzeti bilo koji član spomenute unije koji sadrži točku x. $\square$

Primjetimo da se drugo svojstvo može iskazati ekvivalentno i ovako: Presjek bilo koja dva člana od $\mathcal{B}$ je unija članova od $\mathcal{B}$.

Zanimljivo je da su spomenuta dva svojstva baze topologije dovoljna za karakterizaciju te topologije jer vrijedi slijedeći obrat gornjeg teorema.

TEOREM 9.2. *Neka familija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X zadovoljava svojstva iz prethodnog teorema. Onda postoji jedna i samo jedna topologija $\mathcal{T}$ na skupu X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Članovi topologije $\mathcal{T}$ su oni podskupovi od X koji se mogu dobiti kao unije članova od $\mathcal{B}$.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{T}$ kolekcija onih podskupova od X koji se mogu prikazati kao unije elemenata od $\mathcal{B}$. Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X.

I doista, aksiom (TOP 1) je zadovoljen jer je unija skupova koji su unije članova od $\mathcal{B}$ i sama (jedna velika) unija članova od $\mathcal{B}$.

Za provjeru aksioma (TOP 2), dovoljno je pokazati da je presjek $P = U \bigcap V$ bilo koja dva člana U i V od $\mathcal{B}$ također član od $\mathcal{B}$.

Prema drugom svojstvu, za svaku točku p iz presjeka P postoji član W_p od $\mathcal{B}$ koji sadrži točku p i podskup je od P. To vrijedi zato jer su U i V unije članova od $\mathcal{B}$, pa točka p leži u presjeku $F \bigcap G$ skupova F i G iz $\mathcal{B}$ takvih da je $p \in F \subset U$ i $p \in G \subset V$. Kako je $P = \bigcup_{p \in P} W_p$, vidimo da je P unija elemenata of $\mathcal{B}$ i stoga pripada familiji $\mathcal{T}$.

Aksiom (TOP 3) isto vrijedi jer je prazan skup unija prazne familije članova od $\mathcal{B}$. S druge strane, čitav skup X je unija (svih) članova od $\mathcal{B}$ jer mu je $\mathcal{B}$ pokrivač.

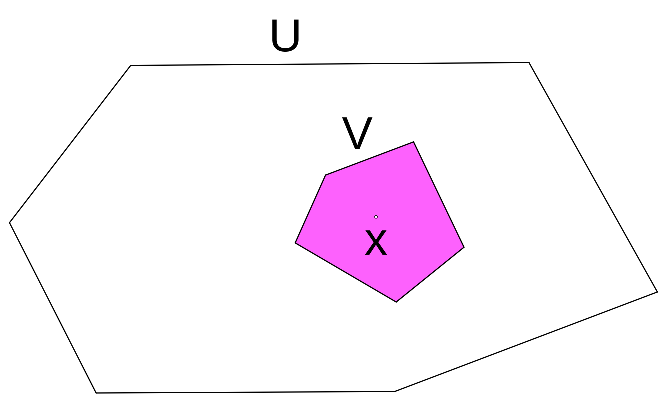
Iz definicije baze topologije je jasno da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{T}$ i da je $\mathcal{T}$ jedina topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. □

Nešto jednostavniju karakterizaciju baze topologije daje slijedeći teorem.

TEOREM 9.3. *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X. Podskup $\mathcal{B}$ od $\mathcal{T}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaku točku x od X i za svaki otvoreni skup U koji sadrži tu točku postoji član V od $\mathcal{B}$ takav da je $x \in V \subset U$.*

DOKAZ. Ako je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ i ako su točka x i otvoreni skup U dani, onda zbog toga što je U unija članova od $\mathcal{B}$, sigurno postoji skup V s gore opisanim svojstvom.

Obrnuto, ako familija $\mathcal{B}$ ima to svojstvo, onda za svaki otvoreni U i svaku njegovu točku x možemo naći član V_x od $\mathcal{B}$ takav da je $x \in V_x \subset U$. Jer je očigledno $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, vidimo da je U unija članova od $\mathcal{B}$ pa je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □



SLIKA 33. Svojstvo baze topologije iz Teorema 9.3.

Često se topologija na nekom skupu zadaje svojom bazom, tj., opisom familije njegovih podskupova koja ima dva gore navedena svojstva. Tako smo postupili i prilikom definicije topologije $\mathcal{T}_d$ na metričkom prostoru (X, d).

Primjetimo da je topologija $\mathcal{T}$ sama sebi baza i da je u nekim prostorima (kao recimo na dvočlanom skupu $X = \{a, b\}$ s topologijom $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$) to jedina baza.

Općenito, topologija ima mnoge i raznobrojne baze. Naprimjer, na metričkom prostoru (X, d), za svaki realni broj $r > 0$, familija

$$\mathcal{B}_r = \{ K(x, \varepsilon) \,:\, x \in X,\, 0 < \varepsilon < r \}$$

svih otvorenih kugala radijusa manjeg od r je baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Posebno je zanimljivo pitanje koliko najmanje članova može imati baza zadane topologije. Taj kardinalni broj je važna topološka invarijanta prostora X koju nazivamo težina prostora i označavamo oznakom $w(X)$ (prema engleskoj riječi "weight" za težinu).

DEFINICIJA 9.2. *Težina* topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ je najmanji kardinalni broj w takav da postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{T}$ sa svojstvom da je $card(\mathcal{B}) = w$. Ako je $w(X)$ konačan broj ili $\aleph_0$ (kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva), onda kažemo da prostor x *ima prebrojivu bazu* ili da *zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.*

PRIMJER 9.1. Neka je prostor X skup $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva sa standardnom topologijom induciranom funkcijom apsolutne vrijednosti. Familija $\mathcal{B}_1 = \{\, (a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{R},\ a < b \,\}$ je baza od X koja ima kontinuum mnogo članova (tj., isto onoliko koliko ima realnih brojeva ili $card(\mathcal{B}_1) = \mathbf{c} = card(\mathbb{R})$). Drugu, bitno manju, bazu tvori familija

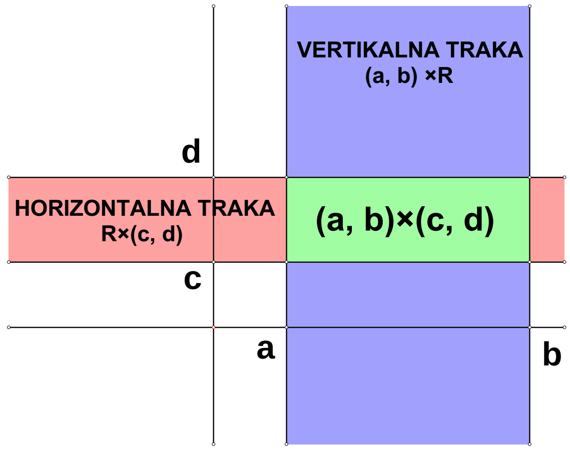
$$\mathcal{B}_2 = \{\, (a, b) \,:\, a, b \in \mathbb{Q},\ a < b \,\}$$

koja je prebrojiva jer je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv. Da je $\mathcal{B}_2$ doista baza slijedi iz činjenice da se svaki realan broj može po volji dobro aproksimirati racionalnim brojevima, tj., da za svaki realan broj r i svaki pozitivan realan broj ε postoji racionalan broj q takav da je $|\, r - q \,| < \varepsilon$. Tako je interval $(0, \sqrt{2})$ iz $\mathcal{B}_1$ koji nije u $\mathcal{B}_2$ moguće prikazati kao unija $(0, \sqrt{2}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (0, q_i)$ segmenata iz $\mathcal{B}_2$, gdje je $\{\, q_i \,\}_{i=1}^{\infty}$ bilo koji uzlazni niz koji konvergira prema (iracionalnom) broju $\sqrt{2}$ (recimo $1, 1.4, 1.41, 1.412, \ldots$). Kako se čitav pravac ne može prekriti s konačno mnogo intervala, vidimo da je težina prostora X jednaka $w(X) = \aleph_0$ pa Euklidski jednodimenzionalni prostor zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Gornje zaključivanje uz neznatne izmjene možemo ponoviti i za konačne produkte pravaca pa dobivamo da Euklidski prostori svih dimenzija zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti.

PRIMJER 9.2. Ako je $(X, \mathcal{P}(X))$ diskretan prostor, onda je familija $\{\, \{\, x \,\} \,:\, x \in X \,\}$ njegovih jednočlanih podskupova apsolutno najmanja baza pa je $w(X) = card(X)$. Uzmemo li da je X neprebrojiv, dobiti ćemo primjer prostora koji ne zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. To je ujedno primjer metričkog prostora s istim svojstvom jer znamo da je svaki diskretan prostor metrički.

Još manje skupova treba opisati ako zadajemo topologiju njenom predbazom koju sada definiramo.

DEFINICIJA 9.3. Ako je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X, onda njenom *predbazom* nazivamo bilo koju familiju $\mathcal{S}$ otvorenih skupova takvu da familija svih presjeka konačno mnogo članova iz $\mathcal{S}$ tvori bazu topologije $\mathcal{T}$. Dakle, svaki otvoreni skup je unija konačnih presjeka elemenata iz predbaze.



Slika 34. Horizontalne i vertikalne trake zajedno tvore predbazu standardne topologije na ravnini.

Primjer 9.3. Vertikalne trake i horizontalne trake $(a, b) \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times (c, d)$ za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ uz $a < b$ i $c < d$ tvore predbazu standardne topologije na ravnini $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Propozicija 9.1. *Svaki pokrivač $\mathcal{S}$ skupa X je predbaza neke topologije na X.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ familija svih konačnih presjeka skupova iz $\mathcal{S}$. Tvrdimo da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na X. Prema Teoremu 9.1, dovoljno je provjeriti da je $\mathcal{B}$ pokrivač od X (što sigurno vrijedi jer $\mathcal{B}$ sadrži $\mathcal{S}$ koji je pokrivač od X po pretpostavci) i da je presjek $U \bigcap V$ bilo koja dva člana U i V iz $\mathcal{B}$ unija članova iz $\mathcal{B}$. Ali, ovdje vrijedi čak i više, jer je taj presjek i sam konačan presjek članova od $\mathcal{S}$, on pripada familiji $\mathcal{B}$. $\square$

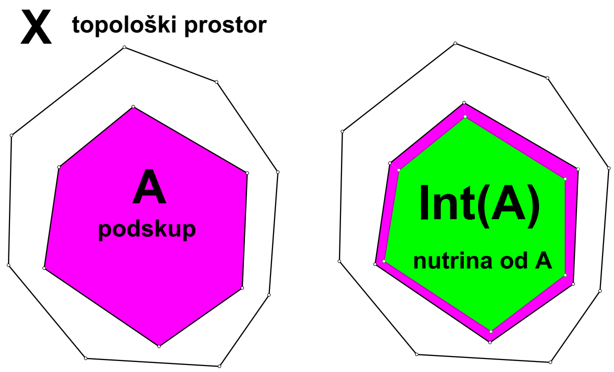
10. Unutrašnjost skupa

Postojanje otvorenih skupova omogučava definiciju najvećeg otvorenog podskupa zadanog skupa. To je njegova unutrašnjost ili nutrina čija svojstva obrađuje ovaj paragraf.

Definicija 10.1. Ako je A podskup topološkog prostora X, onda njegovom *unutrašnjošću* ili *nutrinom* $Int(A)$ ili $\overset{\circ}{A}$ nazivamo uniju svih otvorenih podskupova od A.

Kako je unija otvorenih skupova opet otvoreni skup, unutrašnjost $Int(A)$ je otvoren skup u X i to najveći otvoreni podskup od A.

Primjer 10.1. Zatvoreni segment $[a, b]$ realnih brojeva ima otvoreni segment (a, b) za nutrinu ako na $\mathbb{R}$ promatramo standardnu topologiju. U diskretnoj topologiji na $\mathbb{R}$ unutrašnjost segmenta $[a, b]$ se podudara s njim samim dok je u odnosu na indiskretnu topologiju nutrina prazan skup.



SLIKA 35. Definicija unutrašnjosti ili nutrine podskupa topološkog prostora.

Standardna 2-ćelija $\mathbb{B}^2$ ima otvoreni krug $\{\, x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 < 1 \,\}$ za unutrašnjost.

Kako je otvorene skupove pravilno zamišljati kao "debele" skupove, svi "mršavi" skupovi u ravnini imaju praznu unutrašnjost. To vrijedi za sve prebrojive podskupove (konačne i beskonačne), i za sve nuldimenzionalne i jednodimenzionalne objekte (kao Kantorov kompakt dobiven izbacivanjem srednjih trećina u jediničnom segmentu i sve krivulje). Može se pokazati da je podskup ravnine dvodimenzionalan ako i samo ako sadrži neprazan otvoren skup (tj., ako i samo ako ima nepraznu unutrašnjost).

TEOREM 10.1. *Podskup S topološkog prostora X je otvoren ako i samo ako se podudara sa svojom nutrinom.*

DOKAZ. Ako je S otvoren, on je jednak uniji svih otvorenih skupova sadržanih u S jer je S sigurno jedan od članova te unije pa je $S = Int(S)$.

Obrnuto, ako je $S = Int(S)$, onda je S otvoren jer je $Int(S)$ otvoren. $\square$

TEOREM 10.2. *Operator $Int : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ koji svakom podskupu topološkog prostora pridružuje njegovu nutrinu ima slijedeća svojstva za sve podskupove A i B prostora X.*

(1) $Int(A) \subset A$.
(2) $Int(Int(A)) = A$.
(3) $Int(A \bigcap B) = Int(A) \bigcap Int(B)$.
(4) $A \subset B$ *povlači* $Int(A) \subset Int(B)$.
(5) $Int(X) = X$ *i* $Int(\emptyset) = \emptyset$.

DOKAZ. Jedino treće svojstvo zahtjeva malo rada jer se ostala svojstva dokazuju s lakoćom.

Neka je $C = Int(A \bigcap B)$, $D = Int(A) \bigcap Int(B)$, i $E = A \bigcap B$. Iz relacija $E \subset A$ i $E \subset B$ dobivamo $Int(E) \subset Int(A)$ i $Int(E) \subset Int(B)$ pa je $C \subset D$.

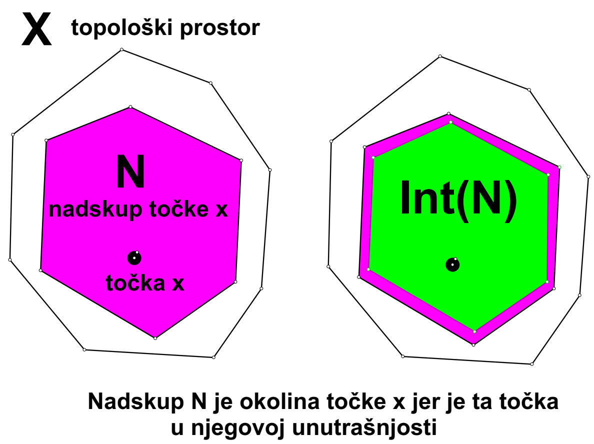
S druge strane, iz relacija $Int(A) \subset A$ i $Int(B) \subset B$ slijedi $D \subset E$. Ali, D je otvoreni skup sadržan u E pa mora biti podskup od $Int(E)$. Dakle, $D \subset C$. Zato je doista $D = C$. □

11. Okoline točaka

Definicija 11.1. *Okolinom* točke x prostora X nazivamo svaki podskup N od X koji sadrži točku x u svojoj nutrini.

Dakle, ako je N okolina točke x, onda postoji otvoreni skup U sa svojstvom da je $x \in U \subset N$.

Čitavi prostor X je okolina svake svoje točke. U indiskretnom prostoru X je jedina okolina bilo koje svoje točke a u diskretnom prostoru svi podskupovi koji sadrže točku su njene okoline. Općenito točka ima mnogo okolina i nije točno da je svaki nadskup točke njena okolina.



Slika 36. Definicija okoline točke u topološkom prostoru.

Propozicija 11.1. *Podskup U topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ je otvoren ako i samo ako je on okolina svake svoje točke.*

Dokaz. Ako je U otvoren i ako je x točka iz U onda vrijedi relacija $x \in Int(U) = U$, pa je U okolina točke x.

Obrnuto, pretpostavimo da je U takav podskup od X da je on okolina svake svoje točke. Onda je $x \in Int(U)$ za svaki $x \in U$ pa je $U \subset Int(U)$. Kako je uvijek $Int(U) \subset U$, slijedi da je $U = Int(U)$ što upravo znaći da je U otvoren skup. □

Neka nam $n(x)$ ili preciznije $n(x, \mathcal{T})$ bude oznaka za familiju svih okoline točke x u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

TEOREM 11.1. *Familija* $\mathcal{N} = \{\, n(x) \,:\, x \in X \,\}$ *okolina svih točaka prostora* X *ima slijedeća svojstva.*

(1) $n(x) \neq \emptyset$.
(2) *Ako je* $U \in n(x)$, *onda je* $x \in U$.
(3) *Ako su* $U \in n(x)$ *i* $V \in n(x)$, *onda je* $U \bigcap V \in n(x)$.
(4) *Ako je* $U \in n(x)$ *i* V *je nadskup od* U, *onda je* $V \in n(x)$.
(5) *Ako je* $U \in n(x)$, *onda postoji* V *takav da je* $x \in V \subset U$ *i da je* $V \in n(y)$ *za svaki* $y \in V$.

DOKAZ. Već smo primjetili da svaka točka ima najmanje cijeli X za okolinu pa je $n(x)$ neprazan za svaki $x \in X$. Drugo svojstvo slijedi zato jer je nutrina skupa njegov podskup a treće je posljedica jednakosti $Int(A) \bigcap Int(B) = Int(A \bigcap B)$. Četvrto svojstvo slijedi iz definicije okoline. Na kraju, za peto svojstvo, dovoljno je za skup V uzeti $Int(U)$ jer je $Int(U) \in n(y)$ za svaki $y \in Int(U)$ zbog jednakosti $Int(Int(U)) = Int(U)$. □

Primjetimo da se treće svojstvo indukcijom lagano proširuje do tvrdnje da je presjek konačno mnogo okolina točke opet okolina te točke. No, to nije nužno točno za presjeke beskonačno mnogo okolina jer su, naprimjer, otvoreni segmenti $S_n = (-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n})$ za svaki prirodan broj okoline broja 0 a njihov presjek $\{\, 0 \,\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ to nije.

DEFINICIJA 11.2. *Bazom* okolina točke x prostora X nazivamo svaku familiju $b(x)$ njezinih okolina koja ima svojstvo da za svaku okolinu $U \in n(x)$ postoji okolina $V \in b(x)$ za koju vrijedi $V \subset U$.

Primjer baze okolina točaka daje familija $o(x)$ svih otvorenih nadskupova točke x. U metričkom prostoru $(X,\, d)$, familija

$$ok(x) = \{\, K(x,\, \varepsilon) \,:\, \varepsilon > 0 \,\}$$

svih otvorenih kugala sa središtem u točki x i pozitivnim radijusom je baza okolina od x. Mnogo manje članova ima baza okolina koju tvore otvorene kugle $K(x,\, q_i)$, gdje su $\{\, q_i \,\}_{i=0}^{\infty}$ članovi niza pozitivnih realnih brojeva koji konvergira k nuli.

DEFINICIJA 11.3. Najmanji kardinalni broj κ takav da postoji baza okolina $b(x)$ točke x u prostoru X kojoj je broj elemenata κ naziva se *težina prostora* X *u točki* x i označava sa $w(X,\, x)$. Broj $w(X,\, x)$ naziva se katkada i *lokalna težina prostora* X *u točki* x ili *karakter prostora* X *u točki* x.

PRIMJER 11.1. Lokalna težina pravca $\mathbb{R}$ u svakoj točki je $\aleph_0$ jer svaka točka x ima prebrojivu bazu okolina $\{\, (x - \frac{1}{n},\, x + \frac{1}{n}) \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$ a baza okolina s manje (tj. s konačno mnogo) okolina očigledno nema.

PRIMJER 11.2. Općenitije, svaki metrički prostor $(X,\, d)$ u svakoj svojoj točki ima karakter $\aleph_0$ jer svaka njegova točka x ima prebrojivu bazu okolina $\{\, K(x, \frac{1}{n}) \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$ a baza okolina s manje članova nema. Doista, ako je $k \in \mathbb{N}$ prirodan broj i ako su $U_1,\ldots,\, U_k$ okoline točke x onda postoji dovoljno mali pozitivan realan broj η takav da je $K(x, \eta) \subset U_i$ za svaki $i = 1, \ldots, k$. Svaka kugla s centrom u točki x i radijusom manjim od η je okolina koja sigurno ne sadrži niti jednu od okolina $U_1, \ldots, U_k$ što povlači da skup tih okolina ne može biti baza okolina točke x.

Definicija 11.4. Ako je lokalna težina prostora u svakoj njegovoj točki najviše $\aleph_0$, kažemo da je taj prostor *prebrojivog karaktera* ili da *zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti*

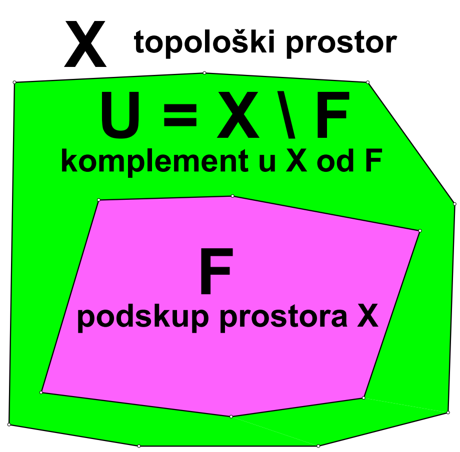
Primjetimo da ako prostor zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti onda će on zadovoljavati i prvi aksiom prebrojivosti (članovi prebrojive baze topologije koji sadrže neku fiksiranu točku tvore prebrojivu bazu njenih okolina) i da obrat općenito ne vrijedi što jasno pokazuje diskretan metrički prostor sa neprebrojivo mnogo točaka.

12. Zatvoreni skupovi

Definicija 12.1. Za podskup F prostora X kažemo da je *zatvoren* ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Teorem 12.1. *Familija $\mathcal{F}(X)$ svih zatvorenih podskupova prostora X ima slijedeća svojstva.*

(1) *Presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.*
(2) *Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.*
(3) *Prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X su zatvoreni skupovi.*



Slika 37. Definicija zatvorenih podskupova u topološkom prostoru. Podskup F je zatvoren ako mu je komplement U otvoren (tj. pripada topologiji).

Dokaz. Slijedi neposredno iz definicije upotrebom DeMorganovih formula. Naprimjer, da dokažemo (2), pretpostavimo da je k prirodan broj i da su $F_1, \ldots, F_k$ zatvoreni skupovi u prostoru X. Po definiciji postoje otvoreni skupovi $U_1, \ldots, U_k$ takvi da je $F_i = X \setminus U_i$ za svaki

$i = 1, \ldots, k$. Neka je $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ i $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Cilj nam je pokazati da je unija F zatvoreni skup.

Prema DeMorganovoj formuli imamo

$$F = (X \setminus U_1) \cup \cdots \cup (X \setminus U_k) = X \setminus U.$$

Kako je U otvoren prema svojstvu (TOP 2) (jer je presjek konačno mnogo otvorenih skupova) vidimo da je F oblika $X \setminus U$ i dakle zatvoren kao komplement otvorenog skupa U. $\square$

Sada vidimo da se topologija na skupu X može aksiomatski definirati tako da se prvo zada familija $\mathcal{F}$ podskupova od X koja zadovoljava tri uvjeta iz prethodnog teorema. Prirodno je nazvati članove od $\mathcal{F}$ zatvorenim skupovima. Ako njihove komplemente proglasimo otvorenim skupovima dobiti ćemo na X topologiju u odnosu na koju će zatvoreni skupovi biti upravo članovi od $\mathcal{F}$.

Primjer takve familije $\mathcal{F}$ na pravcu $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$ i svi njegovi konačni podskupovi. Još jedan primjer također na pravcu su $\mathbb{R}$ i svi njegovi omeđeni podskupovi.

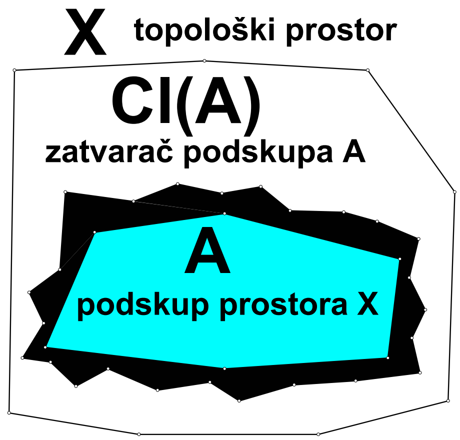
Primjetimo da su u svakom prostoru X prazan podskup $\emptyset$ i cijeli skup X uvijek podskupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni. Ali mogu postojati u X i drugi podskupovi koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni što se najlakše vidi za diskretne topološke prostore gdje svi podskupovi imaju to svojstvo da su istovremeno i otvoreni i zatvoreni. S druge strane na pravcu $\mathbb{R}$ osim $\emptyset$ i $\mathbb{R}$ nema drugih podskupova koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni. Kasnije ćemo vidjeti da postojanje takvih podskupova ovisi o tome da li je promatrani prostor povezan ili nepovezan, tj. sastoji li se od jednog ili od više komada.

Na prirodno pitanje o postojanju podskupova koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni možemo kazati da su u ne odveć posebnom prostoru velika većina podskupova upravo takvi. Izuzetak čine diskretni prostori dok se naša tvrdnja najbolje potvrđuje na indiskretnim prostorima.

Primjetimo da presjek beskonačno mnogo otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup. Naprimjer, na pravcu beskonačni niz otvorenih intervala $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ ima kao presjek jednočlan skup $\{0\}$ koji očito nije otvoren jer ne sadrži u sebi niti jedan otvoreni interval. Podskupovi koji su presjeci prebrojivo mnogo otvorenih skupova nazivaju se *G_δ-skupovi.*

Dualno, unija od beskonačno mnogo zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup. Naprimjer, na pravcu beskonačni niz zatvorenih intervala $[-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$ ima kao uniju otvoreni interval $I = (-1, 1)$ koji očito nije zatvoren jer njegov komplement nije otvoren budući da sadrži točku 1 oko koje bilo koji otvoreni interval ne leži u cjelosti u tom komplementu. Podskupovi koji su unije prebrojivo mnogo zatvorenih skupova nazivaju se *F_σ-skupovi.*

Koristeći zatvorene skupove sada možemo definirati pojam zatvarača podskupa topološkog prostora koji je dualan ranije opisanom pojmu nutrine podskupa.



Slika 38. Definicija zatvarača podskupa u topološkom prostoru. Zatvarač podskupa A je najmanji zatvoreni skup koji ga sadrži (tj. presjek svih njegovih zatvorenih nadskupova).

Ako je A podskup topološkog prostora X onda presjek svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže A nazivamo *zatvaračem* (eng. closure) od A i označavamo $Cl(A)$ ili jednostavnije $\overline{A}$.

Kako je presjek bilo koje familije zatvorenih skupova opet zatvoren skup slijedi da je zatvarač $Cl(A)$ podskupa A zatvoren podskup od X. To je dakle najmanji zatvoren podskup od X koji sadrži A pa je $Cl(A)$ sadržan u svakom zatvorenom skupu koji sadrži skup A.

Teorem 12.2. *Podskup A topološkog prostora X je zatvoren ako i samo ako se on podudara sa svojim zatvaračem, tj. ako i samo ako je $A = Cl(A)$.*

Dokaz. Ako je A zatvoren onda on sudjeluje u presjeku svih zatvorenih podskupova od X koji sadrže A u definiciji zatvarača $Cl(A)$. Zato je očigledno $A = Cl(A)$.

Obrnuto, ako je $A = Cl(A)$ onda jer je zatvarač $Cl(A)$ uvijek zatvoren skup slijedi da je njemu jednak skup A također zatvoren. $\square$

Primjetimo da zatvarač možemo zamišljati kao preslikavanje (funkciju ili operator) Cl partitivnog skupa $\mathcal{P}(X)$ prostora X u sebe koje svaki podskup A od X (tj. svaki element A od $\mathcal{P}(X)$) preslikava u njegov nadskup $Cl(A)$ (tj. u element $Cl(A)$ od $\mathcal{P}(X)$). Naš slijedeći teorem opisuje osnovna svojstva zatvarača.

Teorem 12.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Operator zatvarača $Cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ ima ova svojstva:*

(K1) $Cl(\emptyset) = \emptyset$
(tj. zatvarač praznog podskupa je prazan podskup).
(K2) $A \subset Cl(A)$
(tj. zatvarač podskupa je uvijek nadskup tog podskupa).
(K3) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$
(tj. zatvarač zatvarača podskupa je uvijek zatvarač tog podskupa).
(K4) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$
(tj. zatvarač unije dvaju podskupova jednak je uniji njihovih zatvarača).
(K5) $A \subset B \Rightarrow Cl(A) \subset Cl(B)$
(tj. ako je prvi podskup sadržan u drugom podskupu onda je zatvarač prvog podskupa sadržan u zatvaraču drugog podskupa).

Dokaz. Svojstvo (K2) slijedi neposredno iz definicije a jer su prazan podskup $\emptyset$ i zatvarač $Cl(A)$ zatvoreni iz prethodnog teorema vidimo da vrijede (K1) i (K3).

Za dokaz svojstva (K5), dovoljno je primjetiti da je $Cl(B)$ zatvoreni skup koji sadrži B pa zato i A jer je po pretpostavci $A \subset B$. Zato je $Cl(A) \subset Cl(B)$ jer je $Cl(A)$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži A.

Da bi smo pokazali svojstvo (K4), neka su A i B podskupovi prostora X. Jer je $A \subset Cl(A)$ i $B \subset Cl(B)$ vidimo da je $Cl(A) \cup Cl(B)$ zatvoreni skup koji sadrži $A \cup B$ pa je sigurno

$$Cl(A \cup B) \subset Cl(A) \cup Cl(B).$$

Obrnuto, jer je $A \subset A \cup B$ iz svojstva (K5) slijedi

$$Cl(A) \subset Cl(A \cup B).$$

Slično je $Cl(B) \subset Cl(A \cup B)$. Zato je $Cl(A) \cup Cl(B) \subset Cl(A \cup B)$. □

$\boxed{5}$

Iz slijedećeg teorema poljskog matematičara K. Kuratowskog vidi se da vrijedi obrat prethodnog teorema. Tako dobivamo mogućnost da uvedemo topologiju opisivanjem zatvarača svakog podskupa.

Teorem 12.4. *Ako operator $z : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ na nekom skupu X ima svojstva:*

(K1z) $z(\emptyset) = \emptyset$,
(K2z) $A \subset z(A)$,
(K3z) $z(z(A)) = z(A)$, *i*
(K4z) $z(A \cup B) = z(A) \cup z(B)$

za sve podskupove A i B od X, onda postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X takva da je $z(A) = Cl_{\mathcal{T}}(A)$ za svaki podskup A od X.

Dokaz. Pokažimo najprije da svojstvo (K4z) povlači svojstvo

(K5z) $A \subset B \Rightarrow z(A) \subset z(B)$.

I doista, ako je $A \subset B$ onda je $A \cup B = B$ pa iz (K4z) slijedi

$$z(A \cup B) = z(A) \cup z(B) = z(B)$$

što povlači traženi zaključak da je $z(A) \subset z(B)$.

Tražena topologija $\mathcal{T}$ sastoji se od otvorenih podskupova pri čemu definiramo otvorenima one podskupove U od X za koje vrijedi

$$z(X \setminus U) = X \setminus U.$$

Sada moramo provjeriti da je to doista topologija tj. da su $\emptyset$ i X iz $\mathcal{T}$ i da je $\mathcal{T}$ zatvorena na unije i konačne presjeke.

Prvo pokazujemo da je $\emptyset$ otvoren skup. Kako je prema (K2z) skup $z(X)$ nadskup od X i jer je $z(X)$ podskup od X (budući da je element skupa $\mathcal{P}(X)$ svih podskupova od X), zaključujemo da je $z(X) = X$. No, tu jednakost možemo napisati i u obliku $z(X \setminus \emptyset) = X \setminus \emptyset$ što prema gornjoj definiciji povlači da je prazan podskup od X otvoren.

Na sličan način se vidi da je X također otvoren. Svojstvo (K1z) se može pisati i ovako $z(\emptyset) = z(X \setminus X) = X \setminus X = \emptyset$ pa je X doista u familiji $\mathcal{T}$.

Neka je sada S bilo kakav skup i neka je $f : S \to \mathcal{T}$ funkcija. Želimo pokazati da je unija $U = \bigcup\{\, f(s) \mid s \in S\,\}$ iz familije $\mathcal{T}$, tj. da vrijedi $z(X \setminus U) = X \setminus U$.

Upotrijebimo li De Morganova pravila komplementiranja vidimo da moramo pokazati da je $z(P) = P$, gdje nam P označava presjek

$$\bigcap\{\, X \setminus f(s) \mid s \in S\,\}.$$

Za svaki s iz S vrijedi $P \subset X \setminus f(s)$ pa je prema svojstvu (K5z) skup $z(P)$ sadržan u skupu $X \setminus f(s)$. Zato je $z(P) \subset P$. Kako je prema svojstvu (K2z) sigurno $P \subset z(P)$ slijedi tražena jednakost $z(P) = P$.

Sada provjeravamo da je familija $\mathcal{T}$ zatvorena na konačne presjeke. Provjera se lagano provodi matematičkom indukcijom ako se dokaže da je presjek dva otvorena skupa otvoreni skup.

Neka su U i V otvoreni skupovi. Dakle, skupovi $z(X \setminus U)$ odnosno $z(X \setminus V)$ jednaki su skupovima $X \setminus U$ odnosno $X \setminus V$. Označimo presjek $U \cap V$ sa W. Primjenom De Morganovog pravila komplementiranja imamo $z(X \setminus W) = z((X \setminus U) \cup (X \setminus V))$ pa ako iskoristimo svojstvo (K4z) i pretpostavke o U i V slijedi

$$z(X \setminus W) = z(X \setminus U) \cup z(X \setminus V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus W.$$

Prema definiciji slijedi da je presjek W doista otvoren.

Sada dokazujemo da za svaki podskup A od X vrijedi jednakost $z(A) = Cl_{\mathcal{T}}(A)$.

Iz svojstava (K3z) i (K2z) vidimo da je $z(A)$ zatvoreni nadskup od A i jer je $Cl_{\mathcal{T}}(A)$ najmanji zatvoreni nadskup od A vidimo da vrijedi inkluzija $z(A) \supset Cl_{\mathcal{T}}(A)$.

S druge strane, kako je $Cl_{\mathcal{T}}(A)$ zatvoreni nadskup od A i zatvoreni skupovi su fiksne točke za operator z primjenom svojstva (K5z) imamo

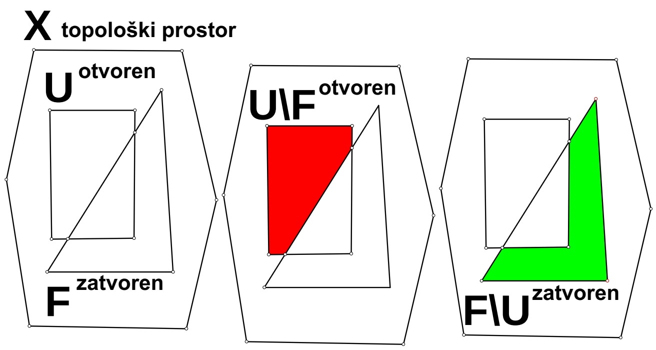
$$z(A) \subset z(Cl_{\mathcal{T}}(A)) = Cl_{\mathcal{T}}(A).$$

Zato se skupovi $z(A)$ i $Cl_{\mathcal{T}}(A)$ podudaraju.

Jedinstvenost topologije $\mathcal{T}$ slijedi iz činjenice da su njeni zatvoreni skupovi jednoznačno određeni (kao fiksne točke operatora z). $\square$

.... $\boxed{5}$ ....

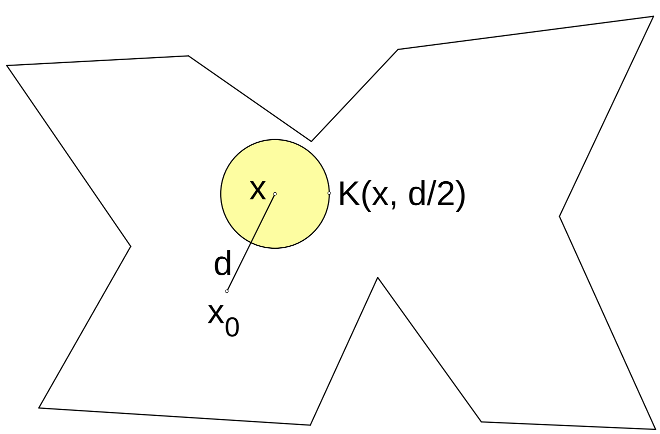
Propozicija 12.1. *Ako je U otvoreni a F je zatvoreni podskup topološkog prostora X onda je $U \setminus F$ otvoreni a $F \setminus U$ je zatvoreni podskup od X.*



Slika 39. Komplement zatvorenog podskupa u otvorenom je otvoren podskup a komplement otvorenog podskupa u zatvorenom je zatvoreni podskup.

Dokaz. Tvrdnje ove propozicije slijede iz činjenica da su komplementi $X \setminus U$ i $X \setminus F$ od U i F redom zatvoreni i otvoreni skupovi, da je presjek dva otvorena skupa otvoreni skup, da je presjek dva zatvorena skupa zatvoreni skup, i da vrijede jednakosti $U \setminus F = U \cap (X \setminus F)$ i $F \setminus U = F \cap (X \setminus U)$. □

Propozicija 12.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za bilo koju točku $x_0 \in X$, jednočlani skup $\{ x_0 \}$ je zatvoreni podskup od X.*



Slika 40. Dokaz Propozicije 12.2.

DOKAZ. Neka U bude oznaka za komplement $X \setminus \{x_0\}$ od x_0 u X. Dovoljno je pokazati da je skup U otvoren.

Da bi smo to pokazali, neka je X bilo koja točka od U. Sigurno je $x \neq x_0$ pa je $\delta = d(x, x_0) > 0$. To ima za posljedicu da je otvorena kugla $K(x, \frac{\delta}{2})$ sa središtem u točki x radijusa polovica udaljenosti δ u cijelosti sadržana u skupu U. Stoga je U moguće prikazati kao uniju otvorenih kugala $K(x, \frac{\delta}{2})$ gdje se unija uzima preko svih točaka skupa U. Slijedi da je skup U otvoren jer je unija otvorenih skupova. □

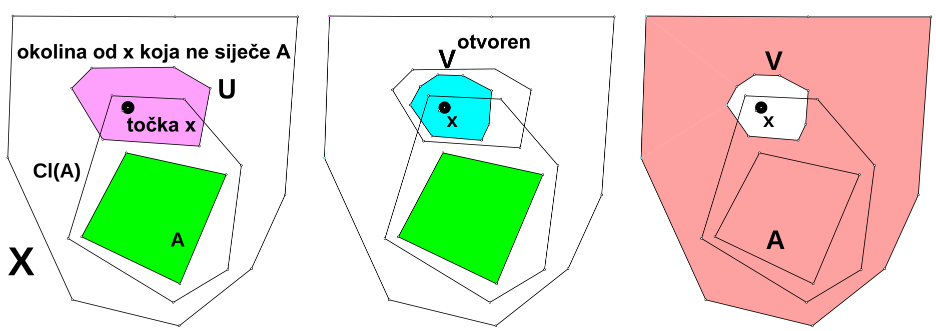
Prostori u kojima su svi jednočlani podskupovi zatvoreni nazivaju se T_1-*prostori*. Gornju propoziciju možemo iskazati sada na slijedeći način.

KOROLAR 12.1. *Svaki metrički prostor je T_1-prostor.*

Obrat ovog korolara nažalost ne vrijedi jer u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ gdje je X skup sa samo dvije različite točke a i b i topologijom $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ jednočlani podskup $\{a\}$ nije zatvoren (budući da mu komplement $\{b\}$ nije otvoren).

Naš idući teorem opisuje jednostavni kriterij koji daje nužne i dovoljne uvjete da bi točka bila u zatvaraču podskupa topološkog prostora.

TEOREM 12.5. *Točka x_0 je u zatvaraču podskupa A prostora X ako i samo ako svaka okolina od x_0 u X siječe skup A.*



SLIKA 41. Koraci u dokazu prve implikacije u Teoremu 12.5. Komplement $X \setminus V$ otvorene okoline V je zatvoren, sadrži skup A, i ne sadrži točku x.

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da je x_0 točka iz zatvarača $Cl(A)$ od A i da je U okolina od x_0 u prostoru X.

Kad okolina U ne bi presjecala skup A onda bi postojala otvorena okolina V od x_0 u X koja ne siječe A. Za V možemo uzeti unutrašnjost okoline U. Njezin komplement $X \setminus V$ bio bi tada zatvoren skup koji sadrži A pa je $Cl(A) \subset X \setminus V$ (jer je $Cl(A)$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži A). To je očigledno nemoguće budući da bi onda točka x_0 morala istovremeno biti u skupu V (jer je V okolina od x_0) i u njegovom komplementu $X \setminus V$ (jer je x_0 u $Cl(A)$ koji je sadržan u tom komplementu).

Obrnuto, pretpostavimo da je x_0 takva točka da svaka njena okolina siječe skup A. Kada točka x_0 ne bi bila u zatvaraču $Cl(A)$ od A onda bi skup $X \setminus Cl(A)$ bio (otvorena) okolina od x_0 u X koja očigledno ne bi sjekla skup A. Dakle, točka x_0 mora biti iz zatvarača $Cl(A)$ od A. □

Definicija 12.2. Neka je A podskup topološkog prostora X. Za točku x_0 iz X kažemo da je *gomilište* ili *točka gomilanja* skupa A ako svaka okolina od x_0 siječe skup $A \setminus \{ x_0 \}$.

Skup svih gomilišta skupa A označujemo sa A' i zovemo *derivat* skupa A.

S druge strane, ako je $x_0 \in A$ onda ćemo reći da je x_0 *izolirana točka* od A ako x_0 nije gomilište od A, tj., ako postoji bar jedna okolina od x_0 koja siječe A jedino u točki x_0.

Naprimjer, ako je

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1 \}$$

jedinični otvoreni disk u ravnini onda je jedinični zatvoreni disk

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$$

njegov derivat a u skupu $C = A \bigcup \{(2,\, 0)\}$ točka $(2,\, 0)$ je njegova izolirana točka.

Istinitost slijedećeg korolara je očigledna.

Korolar 12.2. *Za svaki podskup A topološkog prostora X vrijedi*

$$Cl(A) = A \cup A'.$$

Teorem 12.6. *Neka je x_0 gomilište podskupa A u T_1-prostoru X. Onda svaka okolina U točke x_0 siječe skup A u beskonačno mnogo točaka.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj., da postoje okolina U od x_0 u X, prirodan broj n, i točke $x_1, \ldots, x_n$ iz X takvi da je presjek skupova U i $A \setminus \{x_0\}$ skup B, gdje je $B = \{ x_1, \ldots, x_n \}$. Jer je X po pretpostavci T_1-prostor, skup B je zatvoren pa će prema Propoziciji 12.1 razlika $U \setminus B$ biti okolina od x_0 koja može sijeći skup A jedino u točki x_0 što se protivi pretpostavci da je x_0 gomilište skupa A. □

Za podskup A topološkog prostora X definiramo njegovu *granicu* (u oznaci $Fr(A)$ ili $Bd(A)$ ili $\partial(A)$) kao presjek zatvarača od A i zatvarača od njegovog komplementa $X \setminus A$. Dakle,

$$Fr(A) = Cl(A) \cap Cl(X \setminus A).$$

TEOREM 12.7. *Neka je A podskup, U otvoreni podskup, i F zatvoreni podskup topološkog prostora X. Onda je*

$$Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A),$$
$$Cl(A) = A \cup Fr(A),$$
$$Fr(U) = Cl(U) \setminus U,$$

i

$$Fr(F) = F \setminus Int(F).$$

DOKAZ. Neka je x bilo koja točka iz skupa $Cl(A) \setminus Int(A)$ i neka je V okolina od x. Okolina V siječe skup F (jer je x iz $Cl(A)$) ali i skup $X \setminus A$ (jer bi u protivnom V bila okolina od x u cijelosti sadržana u skupu A pa bi $x \in Int(A)$ što smo isključili kao mogućnost pretpostavkom $x \in Cl(A) \setminus Int(A)$). Dakle, svaka okolina od x siječe oba skupa A i $X \setminus A$ pa je $x \in Cl(A) \cap Cl(X \setminus A) = Fr(A)$. Zato je $Cl(A) \setminus Int(A) \subset Fr(F)$.

Obrnuto, ako je x točka iz $Fr(A)$, onda svaka okolina od x mora presjecati skup $X \setminus A$ (jer je $x \in Cl(X \setminus A)$). Slijedi da točka x nije iz $Int(A)$ (jer bi u protivnom $Int(A)$ bila okolina od x koja ne bi sjekla skup $X \setminus A$). Budući da je $x \in Cl(A)$ (jer je $Fr(A) \subset Cl(A)$), zaključujemo da vrijedi i obrnuta inkluzija $Fr(A) \subset Cl(A) \setminus Int(A)$. Zato je istinita formula $Fr(A) \subset Cl(A) \setminus Int(A)$.

Jer je $Fr(A) \subset Cl(A)$ očito je $A \cup Fr(A) \subset Cl(A)$. S druge strane, ako je x neka točka iz $Cl(A)$ onda je ili $x \in A$ ili $x \in X \setminus A$. U drugom slučaju slijedi da je $x \in Cl(A)$ i $x \in Cl(X \setminus A)$. Dakle, tada je $x \in Fr(A)$ pa vrijedi i druga inkluzija $Cl(A) \subset A \cup Fr(A)$. Zato je doista $Cl(A) = A \cup Fr(A)$.

Kako je U otvoreni skup njegov komplement $X \setminus U$ je zatvoren skup pa je $Cl(X \setminus U) = X \setminus U$. Zato vrijedi

$$Fr(U) = Cl(U) \cap Cl(X \setminus U) = Cl(U) \cap (X \setminus U) = Cl(U) \setminus U.$$

Na kraju, jer je $Cl(F) = F$, iz jednakosti $Fr(A) = Cl(A) \setminus Int(A)$ slijedi $Fr(F) = F \setminus Int(F)$. □

ZADATAK 12.1. Za zatvorene skupove vrijedi ova dualna tvrdnja onoj za otvorene: Ako je Y potprostor prostora X onda je podskup A od Y zatvoren u prostoru Y ako i samo ako možemo naći zatvoreni podskup F u X takav da je $A = F \cap Y$.

RJEŠENJE. Dovoljno je primjetiti da vrijedi

$$Y \setminus A = Y \setminus (F \cap Y) = (X \setminus F) \cap Y$$

i iskoristiti analognu tvrdnju za otvorene skupove. □

ZADATAK 12.2. Neka je x bilo koja točka metričkog prostora (X, d) i neka je A podskup od X. Dokaži ove tvrdnje:

(1) Točka x je u unutrašnjosti $Int(A)$ skupa A ako i samo ako je $d(x, X \setminus A) > 0$.

(2) $d(x, A) = 0$ onda i samo onda ako je točka x u zatvaraču $Cl(A)$ skupa A.

Rješenje. (1)($\Longrightarrow$). Ako je $x \in Int(A)$, onda jer je $Int(A)$ otvoren skup, postoji realan broj $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subset Int(A) \subset A$. Iz toga očigledno slijedi $d(x, X \backslash A) \geq r > 0$.

(1)($\Longleftarrow$). Ako je $d(x, X \backslash A) = r > 0$ onda moraju skupovi $X \backslash A$ i $K(x, \frac{r}{2})$ biti disjunktni pa je $K(x, \frac{r}{2}) \subset A$. Zato je $x \in Int(A)$.

(2)($\Longrightarrow$). Ako je $d(x, A) = 0$, onda za svaki realan broj $r > 0$ postoji točka a_t iz skupa A takva da je $d(x, a_r) < r$. Zato je za svaki realan broj $r > 0$ presjek $K(x, r) \cap A$ neprazan. Ali onda i svaka okolina od x ima neprazni presjek sa skupom A pa je točka x iz zatvarača od A.

(2)($\Longleftarrow$). Ako je $x \in Cl(A)$ onda za svaki realan broj $r > 0$ okolina $K(x, r)$ od x siječe skup A. Zato je $d(x, A) < r$ pa slijedi da je nužno $d(x, A) = 0$. □

13. Separabilnost

Za podskup D topološkog prostora X kažemo da je *gust* u prostoru X ako je njegov zatvarač $Cl(D)$ jednak čitavom prostoru X. Dakle, D je gusti podskup od X ako i samo ako je $X = Cl(D)$.

Iz Teorema 12.5 slijedi ova jednostavna karakterizacija gustih podskupova.

Propozicija 13.1. *Podskup D je gust u prostoru X ako i samo ako ga siječe svaki neprazni otvoreni skup U u X.*

Sada zaključujemo da je skup $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva gust u prostoru $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva (sa standardnom topologijom) jer svaki otvoreni interval u $\mathbb{R}$ sadrži racionalne brojeve.

Kažemo da je prostor X *separabilan* ako sadrži prebrojiv gust podskup, tj. ako postoji podskup D od X takav da je

- $card(D) \leq \aleph_0$, i
- $Cl(D) = X$.

Naprimjer, pravac $\mathbb{R}$ je separabilan jer je $\mathbb{Q}$ njegov i prebrojiv i gust podskup. Na sličan način se vidi da je za svaki prirodan broj n euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ separabilan. S druge strane, svaki neprebrojivi skup s diskretnom topologijom nije separabilan.

Teorem 13.1. *Metrički prostor X je separabilan onda i samo onda ako ima prebrojivu bazu topologije.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je X separabilan i da je D neki njegov prebrojivi gusti podskup. Promatrajmo familiju otvorenih kugala

$$\mathcal{B} = \{\, K(x, \frac{1}{n}) \mid x \in D \text{ i } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Kako je skup D prebrojiv očito je takva i familija $\mathcal{B}$. Tvrdimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije prostora X.

Da bi smo to dokazali, prema jednom od Zadataka iz 2.2., dovoljno je pokazati da za svaki neprazni otvoreni skup U i svaku njegovu točku $x \in U$ postoji član V familije $\mathcal{B}$ takav da je $x \in V \subset U$.

Neka je x točka nepraznog otvorenog skupa U u metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki otvoreni podskup metričkog prostora unija otvorenih kugala, sigurno postoji pozitivan realan broj δ takav da je $K(x, \delta) \subset U$. Odaberimo prirodan broj n takav da je $\frac{2}{n} < \delta$. Zatim iskoristimo pretpostavku da je d gusti podskup od X da bi smo odabrali točku y iz (nepraznog) presjeka $D \cap K(x, \frac{1}{n})$. Traženi član familije $\mathcal{B}$ je $V = K(y, \frac{1}{n})$.

I doista, jer je $d(x, y) < \frac{1}{n}$ slijedi da je $x \in V$. Nadalje, ako je z bilo koja točka kugle V onda iz nejednakosti trokuta slijedi

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \delta$$

pa je z iz kugle $K(x, \delta)$. Zato je $x \in V \subset U$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\mathcal{B} = \{ U_i \,|\, i \in \mathbb{N} \}$ prebrojiva baza topologije na prostoru X. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ odaberimo točku x_i iz nepraznog skupa U_i. Onda je skup $D = \{ x_1, x_2, \ldots \}$ očigledno prebrojiv. Sada ćemo pokazati da je D gusti podskup prostora X, tj. da je X separabilan.

Dovoljno je pokazati da svaki neprazni otvoreni podskup U od X sadrži bar jedan element skupa D. To je sigurno točno jer je U unija članova baze od kojih svaki sadrži po jednu točku iz skupa D. $\square$

Zadatak 13.1. Dokaži da je svaki potpuno omeđen metrički prostor X separabilan.

Rješenje. Jer je X potpuno omeđen, za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj k_n i neprazni podskupovi $U(n, 1), \ldots, U(n, k_n)$ od X dijametra manjeg od $\frac{1}{m}$ koji prekrivaju X. Iz svakog od skupova $U(n, k)$ odaberimo točku $x(n, k)$ i neka je

$$D = \{ x(n, k) \,|\, n \in \mathbb{N},\, k = 1, \ldots, k_n \}.$$

Skup D je prebrojivi podskup od X za koji ćemo sada pokazati da je gust u X.

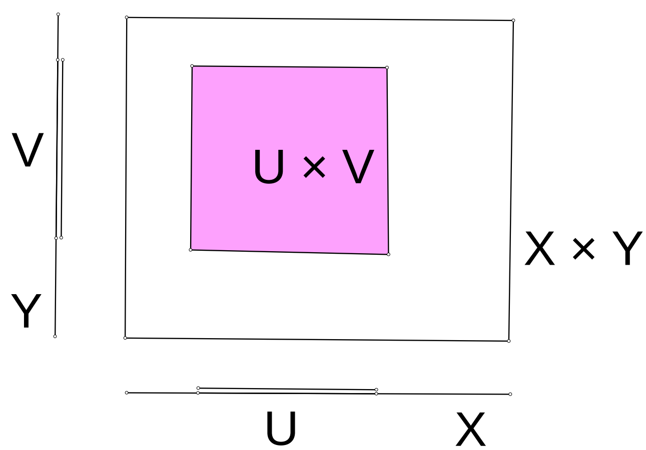
Neka je U bilo koji neprazni otvoreni podskup prostora X i neka je $x \in U$. Odaberimo prirodan broj n tako da otvorena kugla $K(x, \frac{1}{n})$ leži u skupu U. Sada možemo naći prirodan broj k takav da član $U(n, k)$ pokrivača $\{ U(n, 1), \ldots, U(n, k_n) \}$ sadrži točku x. Kako je dijametar od $U(n, k)$ manji od $\frac{1}{n}$ slijedi da je $d(x, x(n, k)) < \frac{1}{n}$. Zato je $x(n, k)$ točka skupa D koja leži u skupu U. $\square$

14. Produkt i kvocijent prostora

Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori. Promatrajmo Kartezijev produkt $X \times Y = \{ (x, y) \,|\, x \in X, y \in Y \}$ skupova X i Y. Taj skup želimo snabdjeti topologijom koja je određena topologijama $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. U tu svrhu definirajmo skup

$$\mathcal{B} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{\, U \times V \,|\, U \in \mathcal{U},\, V \in \mathcal{V} \,\}.$$

Tvrdimo da je to baza topologije na $X \times Y$.



Slika 42. Tipični element $U \times V$ baze topologije na produktu $X \times Y$.

Zaista, $\mathcal{B}$ je očigledno pokrivač produkta $X \times Y$. S druge strane, ako su $A \times B$ i $C \times D$ dva člana skupa $\mathcal{B}$ onda je njihov presjek

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

također član skupa $\mathcal{B}$.

Zaključujemo da baza $\mathcal{B}$ određuje jedinstvenu topologiju $\mathcal{T}$ na produktu $X \times Y$. Ta se topologija zove topologija (direktnog) produkta, a skup snadbjeven tom topologijom zove se (direktni) produkt prostora X Y. Ovu definiciju lagano možemo poopćiti na više, tj. na bilo koji konačan broj, faktora, a postoji i slijedeća generalizacija na beskonačno mnogo faktora.

Neka je S bilo koji skup i neka je $\mathcal{X} = \{\, (X_i, \mathcal{U}_i) \,|\, i \in S \,\}$ familija nepraznih topoloških prostora indeksirana elementima skupa S. Neka je

$$P = \prod \mathcal{X} = \{\, f : S \to \bigcup_{i \in S} X_i \,|\, f(i) \in X_i \text{ za svaki } i \in S \,\}$$

Kartezijev produkt skupova $\{\, X_i \,\}_{i \in S}$ (tj. skup svih funkcija izbora zadane familije skupova). Neka je $\mathcal{B}$ oznaka za familiju svih produkata $\prod_{i \in S} U_i$ gdje je U_i element topologije $\mathcal{U}_i$ za svaki i iz S i postoji konačan podskup F od S takav da je $U_i = X_i$ za sve $i \in S \setminus F$. Dakle, familija $\mathcal{B}$ se sastoji od svih kutija kojima je samo konačno mnogo bridova (iz zadanih topologija) prikračeno. Sada se lagano provjerava da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ na P koju zovemo topologijom (direktnog) produkta topologija $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in S}$. Par $(P, \mathcal{T})$ nazivamo (direktni) produkt familije prostora $\{X_i\}_{i\in S}$.

Primjer 14.1. Ako su (X, P) i (Y, q) metrički prostori, vidjeli smo da je produkt $X\times Y$ metrički prostor u svakoj od induciranih metrika r_1, r_2, i r_3, gdje je

$$r_1(x, y) = p(x, y) + q(x, y),$$

$$r_2(x, y) = \sqrt{p(x, y)^2 + q(x, y)^2},$$

$$r_3(x, y) = \max(p(x, y), q(x, y)).$$

Njima inducirane topologije podudaraju se s topologijom produkta na $X\times Y$ (kad na X i Y promatramo topologije inducirane metrikama p i q redom).

Primjer 14.2. Torus $S^1\times S^1$ je produkt dviju kopija kružnice. Primjer torusa daje nam zračnica automobilske gume.

Primjer 14.3. Mnogo općenitije, za bilo koji prirodan broj n, produkt $S^{n-1}\times S^1$ $(n-1)$-dimenzionalne sfere S^{n-1} i kružnice S^1 naziva se n-dimenzionalni torus.

Primjer 14.4. Produkt $B^2\times S^1$ diska B^2 i kružnice S^1 je puni (3-dimenzionalni) torus. Isto tako će, za svaki prirodan broj n, produkt $B^{n-1}\times S^1$ $(n-1)$-dimenzionalnog diska B^{n-1} i kružnice S^1 biti puni n-dimenzionalni torus.

Primjer 14.5. Beskonačan cilindar je produkt $\mathbb{R}\times S^1$ realnog pravca $\mathbb{R}$ i kružnice S^1. Produkt $\mathbb{R}\times I$ realnog pravca $\mathbb{R}$ i jediničnog segmenta I je beskonačna traka.

Neka je R relacija ekvivalencije na topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Dakle, R je podskup produkta $X\times X$ koji ima svojstva:

- (refleksivnosti) $(x, x) \in R$ za svaki $x \in X$,
- (simetričnosti) za sve $x, y \in X$ iz $(x, y) \in R$ slijedi $(y, x) \in R$,
- (tranzitivnosti) za svaka tri elementa $x, y, z \in X$ iz $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$ slijedi $(x, z) \in R$.

Neka je X/R kvocijentni skup skupa X po relaciji ekvivalencije R, tj. skup $\{R[x] \mid x \in X\}$ svih (disjunktnih) klasa ekvivalencije $R[x]$ obzirom na relaciju R, gdje je $R[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$. Taj skup prirodno snabdjevamo topologijom na ovaj način.

Neka je $q : X \to X/R$ kvocijentno preslikavanje tj. preslikavanje koje svakom elementu pridružuje njegovu klasu ekvivalencije. Dakle, za svaki $x \in X$, slika $q(x)$ od x je $R[x]$.

Sada ćemo podskup V od X/R proglasiti otvorenim ako i samo ako je njegova praslika $q^{-1}(V)$ otvoreni podskup prostora X, tj. član topologije $\mathcal{T}$.

Lako se provjeri da smo tako na X/R definirali topologiju. Pokažimo npr. da je unija otvorenih skupova u X/R opet otvoren skup.

Neka je $\{\, V_i \,|\, i \in S \,\}$ familija otvorenih skupova u X/R indeksiranih članovima skupa S. Jer je

$$q^{-1}(\bigcup_{i\in S} V_i) = \bigcup_{i\in S} q^{-1}(V_i)$$

otvoren u X (kao unija familije $\{q^{-1}(V_i) \,|\, i \in S\}$ otvorenih u X skupova), vidimo da je unija $\bigcup_{i\in S} V_i$ otvorena u X/R.

Kvocijentni skup X/R snabdjeven upravo definiranom topologijom (tzv. kvocijentnom topologijom) naziva se kvocijentni prostor (prostora X po relaciji R).

Primjer 14.6. Na jediničnom zatvorenom segmentu I sa standardnom topologijom promatrajmo relaciju ekvivalencije R danu sa

$$R = \{\, (x,\, x) \,|\, x \in I \,\} \cup \{\, (0,\, 1),\, (1,\, 0) \,\}.$$

Kvocijentni prostor I/R homeomorfan je kružnici S^1. Dakle, identifikacijom rubnih točaka zatvorenog segmenta dobivamo kružnicu.

Primjer 14.7. Na jediničnom zatvorenom disku D^2 u ravnini sa standardnom topologijom promatrajmo relaciju ekvivalencije R danu sa

$$R = \{\, (x,\, x) \,|\, x \in Int(D^2) \,\} \cup \{\, (x,\, -x),\, (-x,\, x) \,|\, x \in Bd(D^2) \,\}.$$

Kvocijentni prostor D^2/R je projektivna ravnina P^2. Dakle, identifikacijom dijametralno suprotnih rubnih točaka zatvorenog diska dobije se projektivnu ravninu.

Primjer 14.8. Na jediničnom zatvorenom kvadratu $I{\times}I$ u ravnini sa standardnom topologijom promatrajmo relaciju ekvivalencije R danu sa

$$R = \{\, (x,\, x) \,|\, x \in (0,\, 1){\times}I \,\} \cup \\ \{\, ((0,\, y),\, (1,\, y)),\, ((1,\, y),\, (0,\, y)) \,|\, y \in I \,\}.$$

Kvocijentni prostor $(I{\times}I)/R$ je cilindar (bez dna i bez poklopca). Dakle, identifikacijom odgovarajučih točaka na dvije suprotne stranice kvadrate dobije se šuplji cilindar.

S druge strane, ako na tom istom kvadratu definiramo relaciju ekvivalencije

$$Q = \{\, (x,\, x) \,|\, x \in (0,\, 1){\times}I \,\} \cup \\ \{\, ((0,\, y),\, (1,\, 1-y)),\, ((1,\, 1-y),\, (0,\, y)) \,|\, y \in I \,\}$$

onda je kvocijentni prostor $(I{\times}I)/Q$ tzv. Möbiusova traka. Znači, ako dvije jednako orijentirane nasuprotne stranice kvadrata slijepim dobivam šuplji cilindar a ako različito orijentirane nasuprotne stranice kvadrata slijepim dobivam Möbiusovu traku.

Primjer 14.9. Ako u kvadratu $I{\times}I$ horizontalne stranice orijentiramo od lijeva prema desno a vertikalne od dolje prema gore onda njihovim lijepljenjem uz poštivanje tih orijentacija dobivamo torus $S^1{\times}S^1$.

PRIMJER 14.10. Ako u kvadratu $I\times I$ horizontalne stranice orijentiramo od lijeva prema desno, lijevu vertikalnu od dolje prema gore, i desnu vertikalnu od gore prema dolje onda njihovim lijepljenjem uz poštivanje tih orijentacija dobivamo tzv. Kleinovu bocu. To je neorjentabilna ploha (2-mnogostrukost) koja se bez samopresjeka nemože realizirati u 3-dimenzionalnom prostoru.

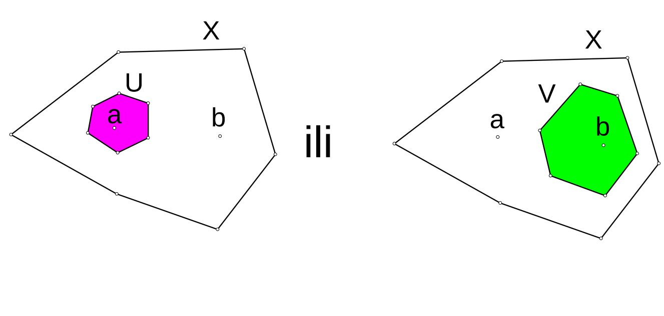
PRIMJER 14.11. Ako u trokutu u ravnini s vrhovima u točkama $(0, 0)$, $(2, 0)$, i $(1, \sqrt{3})$, horizontalnu stranicu orijentiramo od lijeva prema desno a kose stranice od dolje prema gore, onda njihovim lijepljenjem uz poštivanje tih orijentacija dobivamo tzv. lakrdijaševu kapu (Borsukovu šubaru - (eng. dunce hat)). To je također neorjentabilna ploha (2-mnogostrukost) koja se bez samopresjeka nemože realizirati u 3-dimenzionalnom prostoru.

15. Aksiomi separacije

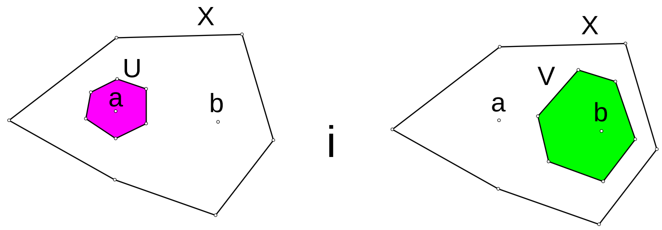
Iako osnovni aksiomi topologije (TOP 1) – (TOP 3) imaju mnoge posljedice bez nekih dodatnih pretpostavki o svojstvima zadane topologije nemožemo baš mnogo toga dokazati niti postići. Dakle, sam pojam topološkog prostora je odveć općenit. Sada ćemo opisati seriju takvih pretpostavki o tome kako se u prostoru mogu otvorenim skupovima odvojiti ili separirati dva različita objekta (npr. točke i zatvoreni podskupovi).

DEFINICIJA 15.1. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom T_0 ili da je T_0-*prostor* ako u njemu za svaki par različitih točaka a i b bar jedna od njih ima okolinu koja ne sadrži drugu točku.

DEFINICIJA 15.2. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom T_1 ili da je T_1-*prostor* ako u njemu za svaki par različitih točaka a i b svaka od tih točaka ima okolinu koja ne sadrži drugu točku.

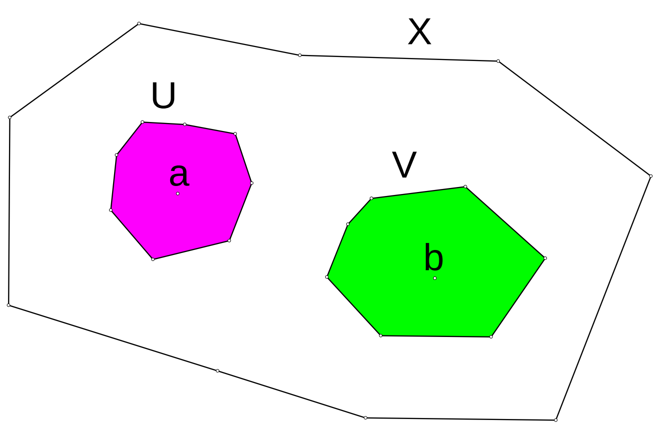


SLIKA 43. U T_0-prostoru bar jedna od bilo koje dvije različite točke ima okolinu koja ne sadrži drugu.



Slika 44. U T_1-prostoru uvijek svaka od bilo koje dvije različite točke ima okolinu koja ne sadrži drugu.

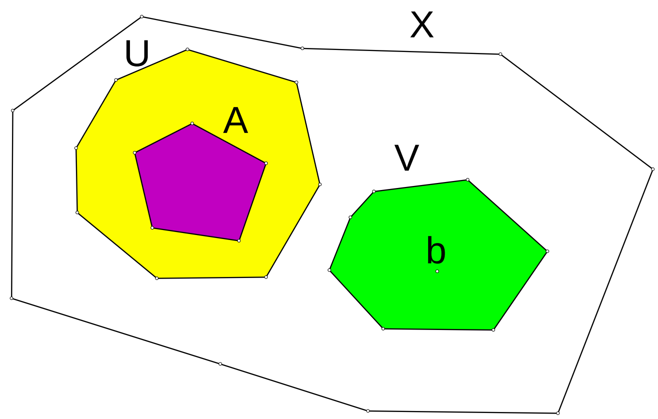
Definicija 15.3. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom T_2 ili da je T_2-*prostor* ili da je *Hausdorffov prostor* ako u njemu za svaki par različitih točaka a i b postoji okolina U od a u X i okolina V od b u X takve da je $U \cap V = \emptyset$.



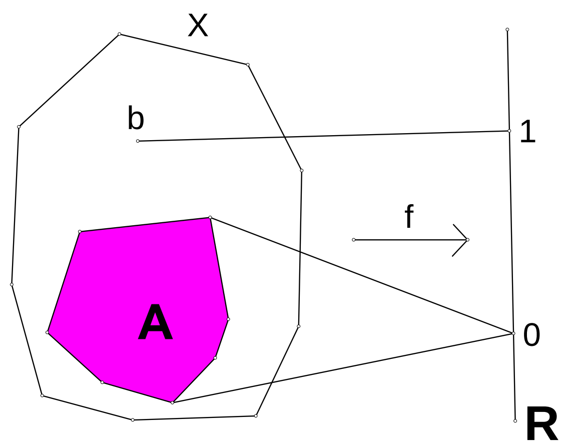
Slika 45. U T_2-prostoru bilo koje dvije različite točke imaju okoline koje se ne sijeku.

Definicija 15.4. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom T_3 ili da je T_3-*prostor* ako u njemu za svaki zatvoreni podskup A i svaku točku b izvan A (tj. iz skupa $X \setminus A$) postoji okolina U od A u X i okolina V od b u X takve da je $U \cap V = \emptyset$.

Definicija 15.5. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom $T_{3\frac{1}{2}}$ ili da je $T_{3\frac{1}{2}}$-*prostor* ako u njemu za svaki zatvoreni podskup A i svaku točku b izvan A (tj. iz skupa $X \setminus A$) postoji neprekidna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ takva da je $f(A) = 0$ i $f(b) = 1$.



SLIKA 46. U T_3-prostoru zatvoren skup možemo odvojiti disjunktnim okolinama od svake točke izvan njega.

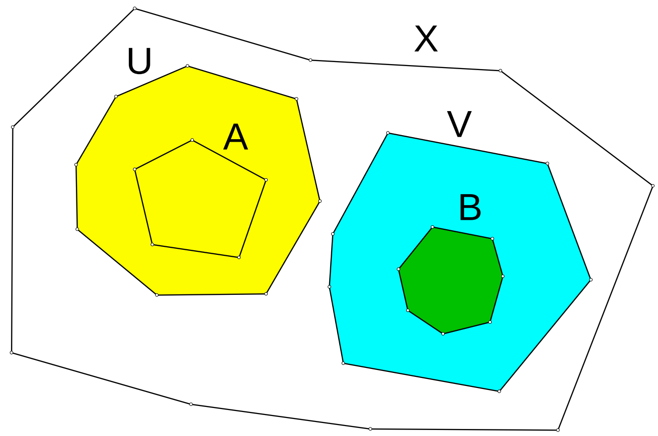


SLIKA 47. U $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru zatvoren skup možemo odvojiti funkcijski od svake točke izvan njega.

DEFINICIJA 15.6. Za topološki prostor X kažemo da zadovoljava aksiom T_4 ili da je T_4-*prostor* ako u njemu za svaki par disjunknih zatvorenih podskupova A i B postoji okolina U od A u X i okolina V od B u X takve da je $U \cap V = \emptyset$.

DEFINICIJA 15.7. Prostor koji zadovoljava istodobno aksiome T_1 i T_3 zove se *regularni prostor*, prostor koji zadovoljava istodobno aksiome T_1 i $T_{3\frac{1}{2}}$ zove se *potpuno regularni prostor*, a onaj prostor koji zadovoljava istodobno aksiome T_1 i T_4 naziva se *normalni prostor*.

Ako je sa $\mathcal{T}$ označena klasa svih topoloških prostora, sa $\mathcal{T}_0$ klasa svih T_0-prostora, sa $\mathcal{T}_1$ klasa svih T_1-prostora, sa $\mathcal{H}$ klasa svih Hausdorffovih prostora, sa $\mathcal{R}$ klasa svih regularnih prostora, sa $\mathcal{P}$ klasa svih potpuno



SLIKA 48. U T_4-prostoru disjunktne zatvorene skupove možemo odvojiti disjunktnim otvorenim skupovima.

regularnih prostora, sa $\mathcal{N}$ klasa svih normalnih prostora, i sa $\mathcal{M}$ klasa svih metričkih prostora, onda vrijedi:

TEOREM 15.1. *Za gore definirane klase prostora vrijede inkluzije*

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}.$$

Pri tome je svaka od navedenih inkluzija prava.

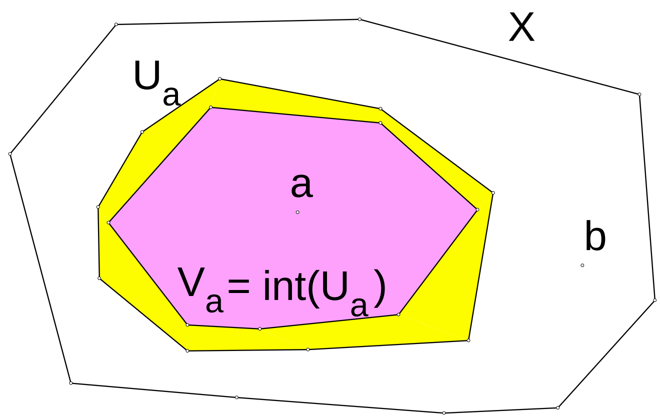
DOKAZ. Osim prve inkluzije koju ćemo dokazati, sve druge osim druge su vrlo jednostavne pa njihove dokaze prepuštamo čitateljima za vježbu. Druga inkluzija je posljedica Tietzeovog teorema proširenja koji kaže da je prostor X normalan ako i samo ako za svaki zatvoreni podskup A od X i svaku neprekidnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ postoji neprekidna funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ takva da je $g(a) = f(a)$ za svaki $a \in A$.

Da su sve inkluzije prave pokazano je na vježbama protuprimjerima. □

Ranije smo (u paragrafu 2.3.) definirali T_1-prostore kao one u kojima je svaki jednočlan podskup zatvoren skup. Pokažimo da je ta definicija ekvivalentna sa našom sadašnjom definicijom T_1-prostora.

TEOREM 15.2. *U topološkom prostoru X svaki jednočlan podskup je zatvoren skup onda i samo onda ako u njemu za svake dvije različite točke a i b postoji okolina od a u X koja ne sadrži točku b.*

DOKAZ. Neka u prostoru X za svake dvije različite točke a i b postoji okolina od a u X koja ne sadrži točku b i neka je $B = \{ b \}$ jednočlan podskup od X. Za svaku točku a iz komplementa $X \setminus B$ sigurno je $a \neq b$ pa postoji okolina U_a od a u X koja ne sadrži točku b. Neka je $V_a = Int(U_a)$ za svaki $a \in X \setminus B$. Onda vrijedi $X \setminus B = \bigcup_{a \in X \setminus B} V_a$ što povlači da je $X \setminus B$ otvoren skup (budući da je unija otvorenih skupova).



SLIKA 49. Ilustracija prve implikacije u Teoremu 15.2.

Obrnuto, pretpostavimo da je u prostoru X svaki jednočlan podskup zatvoren skup i da su a i b dvije njegove različite točke. Onda je $B = \{ b \}$ zatvoren skup pa je njegov komplement $U = X \backslash B$ okolina točke a koja ne sadrži točku b. $\square$

TEOREM 15.3. *Svaki metrički prostor je normalan prostor, tj. vrijedi inkluzija* $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

DOKAZ. Neka je (X, d) metrički prostor. Kako smo vidjeli ranije, u metričkom prostoru je svaki jednočlan podskup uvijek zatvoren skup, tj. X je T_1-prostor, pa prema definiciji normalnog prostora treba još dokazati da je svaki metrički prostor T_4-prostor, tj. da se u X svaka dva disjunktna zatvorena podskupa mogu separirati (razdvojiti) disjunktnim otvorenim skupovima.

Neka su F i G disjunktni zatvoreni podskupovi prostora X. Za svaki element x skupa F definirajmo da je d_x jednak udaljenosti $d(x, G)$ točke x od podskupa G.

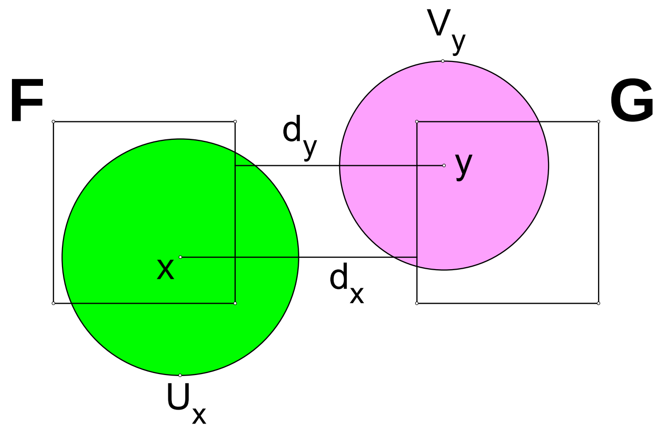
Prvo ćemo provjeriti da je $d_x > 0$. I doista, kad bi bilo

$$d_x = d(x, G) = 0,$$

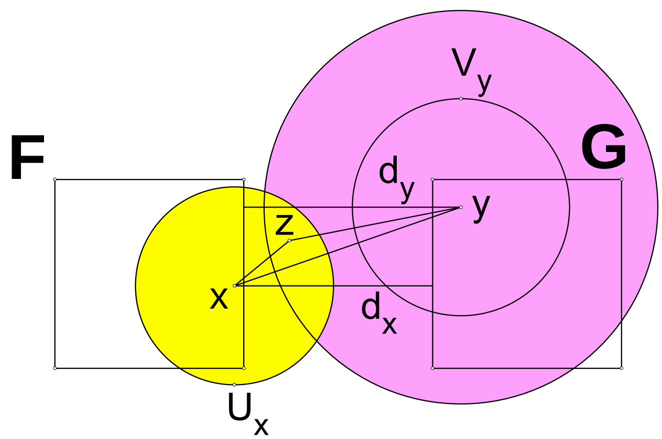
onda bi prema Zadatku 12.2 slijedilo da je $x \in Cl(G) = G$ i zato da je $F \cap G \neq \emptyset$ što je protivno pretpostavci. Dakle, za svaki $x \in F$ vrijedi $d_x > 0$.

Analogno je za svaki $y \in G$ broj $d_y = d(y, F)$ pozitivan.

Za svaki $x \in F$ neka nam U_x bude kratka oznaka za otvorenu kuglu $K(x, \frac{d_x}{2})$ i slično za svaki $y \in G$ neka nam U_y bude otvorena kugla $K(y, \frac{d_y}{2})$. Neka je $U = \bigcup_{x \in F} U_x$ i $V = \bigcup_{y \in G} U_y$. Primjetimo da su U i V otvoreni skupovi koji sadrže F i G redom. Tvrdimo da su oni i disjunktni pa su upravo to traženi disjunktni otvoreni skupovi koji separiraju (razdvajaju) skupove F i G.



Slika 50. Ilustracija odabira okolina U i V u dokazu Teorema 15.3.



Slika 51. Ilustracija pretpostavke da se okoline U i V u dokazu Teorema 15.3 sijeku.

Pretpostavimo, suprotno, tj. da je presjek $U \cap V$ skupova U i V neprazan i da je $z \in U \cap V$. Kako su U i V unije kugala, postoje točke $x \in F$ i $y \in G$ takve da je $z \in U_x$ i $z \in U_y$. Drugim riječima, vrijede nejednakosti $d(x, z) < \frac{d_x}{2}$ i $d(y, z) < \frac{d_y}{2}$. Bez umanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $d_x \geq d_y$. Onda iz nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{d_x}{2} + \frac{d_y}{2} \leq$$
$$d_x = d(x, G) = \inf\{\, d(x, w) \mid w \in G \,\}$$

što je u kontradikciji s načinom definicije broja d_x. □

Zadatak 15.1. Kažemo da je neko svojstvo topološkog prostora X nasljedno (ili hereditarno) ako svaki njegov potprostor Y ima to isto svojstvo. Na primjer, svojstvo "biti metrizabilan prostor" je nasljedno svojstvo. Koja od svojstava "biti T_i-prostor" za $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$ su nasljedna? Da li su regularnost, potpuna regularnost, i normalnost prostora nasljedna svojstva?

RJEŠENJE. Za svaku gore navedenu vrijednost indeksa i osim za $i = 4$ svojstvo "biti T_i-prostor" je nasljedno. Zato normalnost nije nasljedna dok su regularnost i potpuna regularnost nasljedne. □

16. Konvergencija

16.1. Nizovi i mreže. Prisjetimo se da nizom u topološkom prostoru X nazivamo bilo koju funkciju $\sigma : \mathbb{N} \to X$ skupa svih prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u prostor X. Obično vrijednost $\sigma(i)$ za $i \in \mathbb{N}$ kratko pišemo σ_i i zovemo i-tim članom niza σ. Kadkad se niz σ opisuje riječima "niz $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$" ili nešto kraće "niz $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$" ili još kraće "niz σ_i". Svi ti načini opisivanja nizova nisu tako kratki i precizni kao ona gdje se na niz gleda kao na funkciju definiranu na skupu $\mathbb{N}$.

Za proučavanje metričkih prostora nizovi bi bili dostatni ali za općenitije topološke prostore umjesto nizova bolje je koristiti poopćene nizove (ili mreže) kod kojih domena nije nužno skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva već bilo kakav usmjeren skup.

Usmjeren skup je par $(D, \leq)$ koji se sastoji od skupa D i binarne relacije $\leq \subset D \times D$ na njemu koja ima slijedeća svojstva:

- (refleksivnosti) Za sve $x \in D$ vrijedi $x \leq x$.
- (tranzitivnosti) Za sve $x, y, z \in D$ iz $x \leq y$ i $y \leq z$ slijedi $x \leq z$.
- (usmjerenosti) Za svaka dva elementa x i y iz D postoji treći element z takav da je istovremeno $x \leq z$ i $y \leq z$.

Kad govorimo o usmjerenim skupovima obično ispuštamo spomenuti binarnu relaciju $\leq$ pa kažemo npr. "Neka je D usmjeren skup." pri čemu se dogovaramo da je ta relacija gotovo uvijek označena standardnom oznakom $\leq$.

Najjednostavniji primjer usmjerenog skupa je skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva (sa standardnom relacijom uređaja manje ili jednako).

Drugi primjer je skup $n(x_0, X)$ svih okolina neke točke x_0 u topološkom prostoru X. Pri tome se usmjerenje $\leq$ definira ovako: Za okoline U i V točke x_0 u prostoru X je $U \leq V$ ako i samo ako je $V \subset U$. Relacija $\leq$ ima svojstvo usmjerenosti jer je za $U, V \in n(x_0, X)$ njihov presjek $W = U \cap V$ okolina od x_0 za koju vrijedi $U \leq W$ i $V \leq W$.

Treći primjer je skup $Pok(X)$ svih pokrivača topološkog prostora X. Pri tome se usmjerenje $\leq$ definira ovako: Za pokrivače $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ je $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ ako i samo ako $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$. Relacija $\leq$ ima svojstvo usmjerenosti jer za $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in Pok(X)$ je $\mathcal{W} = \{\, U \cap V \mid U \in \mathcal{U},\, V \in \mathcal{V} \,\}$ pokrivač od X za koji vrijedi $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$ i $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$.

Četvrti primjer je skup $Top(X)$ svih topologija na skupu X. Pri tome se usmjerenje $\leq$ definira ovako: Za topologije $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ na X je

$\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ ako i samo ako je topologija $\mathcal{V}$ finija od topologije $\mathcal{U}$. Relacija $\leq$ ima svojstvo usmjerenosti jer za $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in Top(X)$ je

$$\mathcal{W} = \{ U \cap V \,|\, U \in \mathcal{U},\, V \in \mathcal{V} \}$$

topologija na X za koju vrijedi $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$ i $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$.

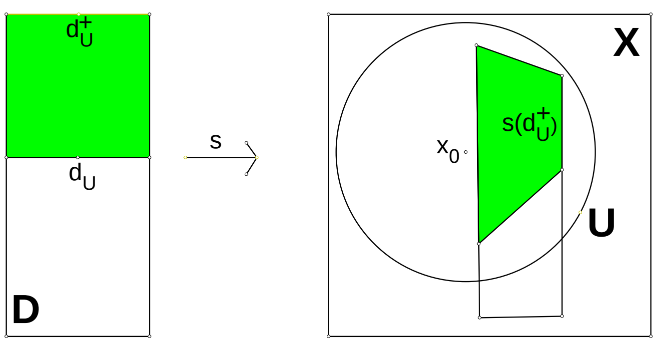
Posljednji peti primjer je skup $Fin(X)$ svih konačnih podskupova skupa X. Pri tome se usmjerenje $\leq$ definira ovako: Za konačne podskupove U i V od X je $U \leq V$ ako i samo ako je V nadskup od U. Relacija $\leq$ ima svojstvo usmjerenosti jer za $U, V \in Fin(X)$ je $W = U \cup V$ konačan podskup od X za koji vrijedi $U \leq W$ i $V \leq W$.

Definicija 16.1. Preslikavanje $\sigma : D \to X$ usmjerenog skupa D u skup X nazivamo *mreža* u skupu X. Za bilo koji $d \in D$ vrijednost $\sigma(d)$ kraće pišemo σ_d i zovemo d-ti *član* mreže σ.

Iz činjenice da je skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih brojeva sa standardnim usmjerenjem $\leq$ usmjeren skup slijedi da je svaki niz mreža. Pri tome obrat očito ne vrijedi.

16.2. Konvergencija mreža i nizova. Topološki prostori su upravo objekti u kojima možemo osmisliti ideju približavanja ili konvergencije članova mreže nekoj točki prostora.

Definicija 16.2. Za mrežu $\sigma : D \to X$ u topološkom prostoru X kažemo da *konvergira* ako postoji točka x_0 iz X takva da za svaku okolinu U od x_0 u X postoji $d_U \in D$ takav da je $\sigma_d \in U$ za svaki $d \geq d_U$. Točku x_0 nazivamo *graničnom točkom* ili *limesom* mreže σ i pišemo $\sigma \to x_0$ ili $\lim \sigma = x_0$.



Slika 52. Ilustracija Definicije 16.2. Na slici je sa d_U^+ označen skup $\{ d \in D : \, d \geq \, d_U \}$.

U slučaju nizova gornja definicija se reducira na slijedeću nešto jednostavniju definiciju.

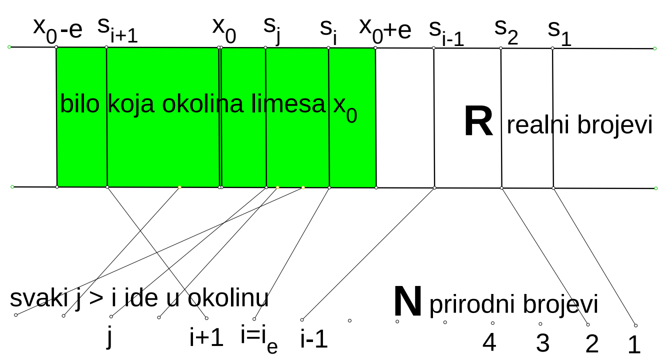
Definicija 16.3. Neka je $(X, \mathcal{T})$ bilo koji topološki prostor. Za niz $\sigma : \mathbb{N} \to X$ u prostoru X kažemo da *konvergira* ako postoji točka x_0 iz X takva da za svaku okolinu U od x_0 u X postoji $i_U \in D$ takav da je $\sigma_i \in U$ za svaki $i \geq i_U$.

Kako svaka okolina U točke x_0 sadrži neku okolinu iz baze okolina $b(x_0)$ točke x_0, dovoljno je gornji uvjet provjeriti za sve okoline iz neke baze okolina limesa. Jer u metričkom prostoru otvorene kugle pozitivnog radijusa tvore bazu okolina, za slučaj niza u metričkim prostorima imamo ovakvu još jednostavniju definiciju.

Definicija 16.4. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $\sigma : \mathbb{N} \to X$ u prostoru X kažemo da *konvergira prema točki* x_0 iz X ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $d(\sigma_i, x_0) < \varepsilon$ za svaki $i \geq i_\varepsilon$.

I na kraju, za nizove realnih brojeva iz gornjih definicija specijalizacijom dobivamo još jednostavniju slijedeću definiciju.

Definicija 16.5. Niz $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ realnih brojeva *konvergira* prema broju $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $|\sigma_i - x_0| < \varepsilon$ za svaki $i \geq i_\varepsilon$.



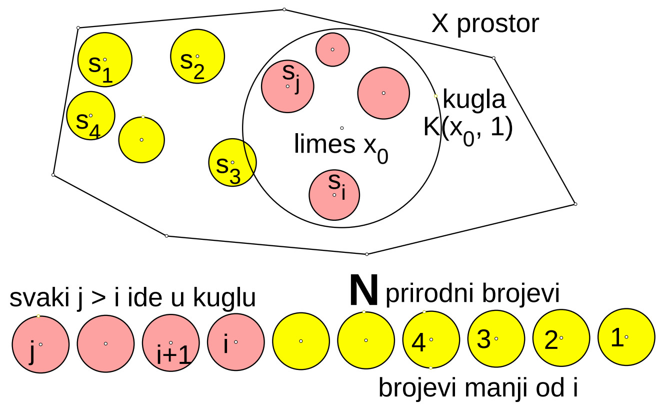
Slika 53. Ilustracija Definicije 16.5.

Teorem 16.1. *U metričkom prostoru (X, d) svaki je konvergentan niz σ omeđen.*

Dokaz. Neka je x_0 limes niza σ. Onda postoji prirodan broj i takav da je $d(\sigma_j, x_0) < 1$ za svaki $j > i$. Dakle, skup $S = \{\, \sigma_j \mid j > i \,\}$ je omeđen (jer ima dijametar najviše 2). Tada je skup

$$\sigma(\mathbb{N}) = \{\, \sigma_1, \, \dots \, , \sigma_i \,\} \cup S$$

također omeđen kao unija dva omeđena skupa. $\square$

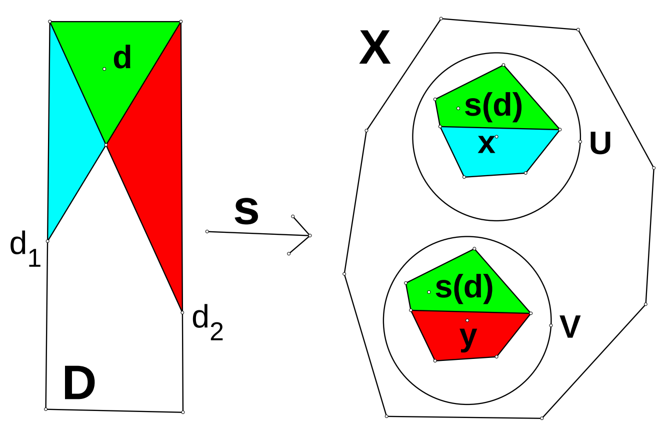


Slika 54. Ilustracija dokaza Teorema 16.1.

Prisjetimo se da je $\lim \frac{1}{n} = 0$ i $\lim \frac{n}{n+1} = 1$. Također, za svaki realan broj a vrijedi

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |a| < 1, \\ \text{ne postoji}, & \text{ako je } |a| > 1, \\ 1, & \text{ako je } a = 1, \\ \text{ne postoji}, & \text{ako je } a = -1. \end{cases}$$

Teorem 16.2. *Topološki prostor X je Hausdorffov onda i samo onda ako u njemu svaka mreža ima najviše jednu točku tog prostora kao graničnu točku.*



Slika 55. Ilustracija prve implikacije u dokazu Teorema 16.2.

Dokaz. Neka je $\sigma : D \to X$ mreža u Hausdorffovom prostoru X i pretpostavimo da ona ima dvije različite točke x i y iz X kao granične točke. Dakle, $\sigma \to x$ i $\sigma \to y$. Jer je prostor X Hausdorffov, postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$. Zbog $\sigma \to x$ možemo naći d_x iz D takav da je $\sigma_d \in U$ za svaki $d \geq d_x$. Slično, zbog $\sigma \to y$ možemo naći d_y iz D takav da je $\sigma_d \in V$ za svaki $d \geq d_y$. Sada iskoristimo svojstvo usmjerenosti skupa D da odaberemo element d takav da je istovremeno $d \geq d_x$ i $d \geq d_y$. Točka σ_d ležala bi tada u presjeku skupova U i V što je nemoguće jer su oni disjunktni. Zato mreža σ može imati najviše jedan limes.

Obrnuto, pretpostavimo da je X prostor u kojem svaka mreža ima najviše jednu graničnu točku i da X nije Hausdorffov prostor. Ova druga pretpostavka povlači postojanje u X dviju različitih točaka x i y takvih da za svaku okolinu U od x u X i svaku okolinu V od y u X u presjeku $U \cap V$ postoji (bar jedna) točka $z_{(U,V)}$. Skup $D = n(x) \times n(y)$ (Kartezijev produkt skupa svih okolina točke x u X sa skupom svih okolina točke y u X) postaje usmjeren skup ako na njemu definiramo usmjerenje $\geq$ na slijedeći način: Za (U, V) i (P, Q) iz D je $(U, V) \geq (P, Q)$ ako i samo ako je $U \subset P$ i $V \subset Q$. Sada možemo definirati mrežu $\sigma : D \to X$ pravilom $\sigma((U, V)) = z_{(U,V)}$ za svaki element (U, V) skupa D. Lagano se može provjeriti da $\sigma \to x$ i $\sigma \to y$ (tj. da su x i y granične točke mreže σ) što se protivi našoj pretpostavci o prostoru X (da u njemu svaka mreža ima najviše jednu graničnu točku). □

Korolar 16.1. *U metričkom prostoru svaki niz ima najviše jedan limes.*

Dokaz. Ranije smo pokazali da su metrički prostori Hausdorffovi pa možemo primjeniti prethodni teorem. □

Zadatak 16.1. Neka su α i β nizovi realnih brojeva takvih da $\alpha \to \alpha_0$ i $\beta \to \beta_0$ za neke α_0 i β_0 iz $\mathbb{R}$. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Onda je

- $\lim(\alpha + \beta) = \alpha_0 + \beta_0$,
- $\lim(\lambda\,\alpha) = \lambda\,\alpha_0$,
- $\lim(\alpha\,\beta) = \alpha_0\,\beta_0$,

gdje su nizovi $\alpha + \beta$, $\lambda\,\alpha$, i $\alpha\,\beta$ definirani ovako:

$$(\alpha + \beta)(n) = \alpha(n) + \beta(n),$$

$$(\lambda\,\alpha)(n) = \lambda \cdot \alpha(n),$$

$$(\alpha\,\beta)(n) = \alpha(n) \cdot \beta(n),$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Jer $\alpha \to \alpha_0$ i $\beta \to \beta_0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $|\alpha_i - \alpha_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|\beta_i - \beta_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $i \geq i_\varepsilon$. Za sve takve indekse i onda po nejednakosti trokuta vrijedi

$$|(\alpha + \beta)_i - \alpha_0 - \beta_0| < |\alpha_i - \alpha_0| + |\beta_i - \beta_0| < \varepsilon.$$

Zato $\alpha + \beta \to \alpha_0 + \beta_0$. Preostale dvije tvrdnje se dokazuju analogno. $\square$

Zadatak 16.2. Pretpostavimo da je $\sigma : D \to X$ mreža u prostoru X koji je direktni produkt $Y \times Z$ prostora Y i Z. Neka su $p : X \to Y$ i $q : X \to Z$ projekcije. Neka je $x \in X$. Onda $\sigma \to x$ ako i samo ako $p \circ \sigma \to p(x)$ i $q \circ \sigma \to q(x)$.

Rješenje. Pretpostavimo prvo da $\sigma \to x$ i da je U okolina točke $p(x)$ u prostoru Y. Jer $\sigma \to x$ i produkt $U \times Z$ je okolina točke x u prostoru X postoji $d_U \in D$ takav da je $\sigma_d \in U \times Z$ za svaki $d \geq d_U$. Očigledno je onda $(p \circ \sigma)_d \in U$ za svaki $d \geq d_U$. Zato $p \circ \sigma \to p(x)$. Slično se dokazuje da $q \circ \sigma \to q(x)$.

Obrnuto, pretpostavimo da $p \circ \sigma \to p(x)$ i $q \circ \sigma \to q(x)$ i da je U okolina točke x u prostoru X. Jer je X direktni produkt prostora Y i Z postoje okolina V točke $p(x)$ u Y i okolina W točke $q(x)$ u Z takve da je $V \times W \subset U$. Sada iskoristimo $p \circ \sigma \to p(x)$ i $q \circ \sigma \to q(x)$ da nađemo $d_U \in D$ takav da je $(p \circ \sigma)_d \in V$ i $(q \circ \sigma)_d \in W$ za svaki $d \geq d_U$. Za sve takve indekse očigledno vrijedi $\sigma_d = ((p \circ \sigma)_d, (q \circ \sigma)_d) \in V \times W \subset U$. Iz toga slijedi da $\sigma \to x$. $\square$

16.3. Zatvorenje i konvergencija.

Teorem 16.3. *Točka x_0 topološkog prostora X pripada zatvaraču $Cl(A)$ njegovog nepraznog podskupa A onda i samo onda ako postoji mreža $\sigma : D \to A$ u A koja u X konvergira prema točki x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da točka x_0 pripada zatvaraču $Cl(A)$ od A. Onda svaka okolina U od x_0 u X siječe skup A. Neka je $x_U \in U \cap A$. Neka je $D = n(x_0, X)$. Znamo da je D usmjeren skup ako za okoline $U, V \in D$ stavimo $U \geq V$ ako i samo ako je $U \subset V$. Definirajmo mrežu $\sigma : D \to X$ pravilom $\sigma(U) = x_U$ za svaki $U \in D$. Onda je σ mreža u skupu A koja konvergira u X prema x_0 jer za bilo koju okolinu $U \in D$ za sve $V \geq U$ vrijedi $\sigma_V = x_V \in V \cap A \subset U \cap A \subset U$.

Obrnuto, neka je $\sigma : D \to A$ mreža u skupu koja u X konvergira prema točki $x_0 \in X$. Kad x_0 ne bi pripadala zatvaraču $Cl(A)$ od A onda bi skup $U = X \backslash Cl(A)$ bio okolina od x_0 u X (budući da je otvoren skup koji sadrži točku x_0). Zbog $\sigma \to x_0$ tada bi postojao element $d \in D$ takav da je $\sigma_d \in U \cap A$ što je nemoguće jer su skupovi A i U disjunktni. $\square$

Za metričke prostore implikaciju $\Longrightarrow$ prethodnog teorema možemo dokazati u snažnijem obliku da umjesto mreža stavimo nizove.

Teorem 16.4. *Ako je x_0 neka točka koja leži u zatvaraču $Cl(A)$ podskupa A metričkog prostora X, onda postoji niz $\sigma : \mathbb{N} \to A$ takav da $\sigma \to x_0$.*

DOKAZ. Za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, u presjeku kugle $K(x_0, \frac{1}{n})$ i skupa A možemo naći neku točku a_n. Traženi niz je definiran pravilom $\sigma(n) = a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Da bi smo provjerili da $\sigma \to x_0$ u X, neka je U okolina od x_0 u X. Odaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subset U$. Zatim odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Za svaki $n \geq m$ sigurno vrijedi

$$\sigma_n = a_n \in K(x_0, \frac{1}{n}) \subset K(x_0, \frac{1}{m}) \subset K(x_0, \varepsilon) \subset U.$$

□

KOROLAR 16.2. *Podskup A metričkog prostora X je zatvoren ako i samo ako je granična točka svakog konvergentnog u X niza u A sadržana u podskupu A.*

DOKAZ. Sjetimo se da je podskup zatvoren ako i samo ako se podudara sa svojim zatvaračem i primjenimo prethodni teorem. □

16.4. Podnizovi i konvergencija. Za funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kažemo da je strogo uzlazna ako za sve prirodne brojeve m i n iz $m < n$ uvijek slijedi $\varphi(m) < \varphi(n)$.

Ako je $\sigma : \mathbb{N} \to X$ niz u skupu X onda svaku kompoziciju $\sigma \circ \varphi$ strogo uzlazne funkcije $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i niza σ zovemo podniz od σ i označavamo σ_φ. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je n-ti član podniza σ_φ je φ_n-ti član niza σ.

PROPOZICIJA 16.1. *Ako niz $\sigma : \mathbb{N} \to X$ u topološkom prostoru X konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i svaki njegov podniz σ_φ konvergira prema x_0.*

DOKAZ. Neka je U bilo koja okolina točke x_0 u X. Kako po pretpostavci $\sigma \to x_0$, postoji $i_U \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma_i \in U$ za svaki $i \geq i_U$. Jer je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo uzlazna funkcija, postoji $j_U \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi(j_U) > i_U$. Zato za svaki $j \geq j_u$ vrijedi $\varphi(j) \geq \varphi(j_U) \geq i_U$ pa je

$$\sigma_\varphi(j) = \sigma(\varphi(j)) \in U.$$

□

Za točku x_0 topološkog prostora X kažemo da je točka gomilanja za mrežu $\sigma : D \to X$ ako za svaku okolinu U od x_0 u X i svaki element d iz skupa D postoji $e = e(U, d) \in D$ takav da je $e \geq d$ i $\sigma_e \in U$.

Dakle, x_0 je točka gomilanja mreže ako svaka okolina od x_0 sadrži članove mreže s po volji velikim indeksima. Naprimjer, brojevi -1 i 1 su točke gomilanja niza σ realnih brojeva definiranog jednakošću $\sigma_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

PROPOZICIJA 16.2. *Ako je x_0 granična točka mreže $\sigma : D \to X$ u Hausdorffovom topološkom prostoru X onda je x_0 jedina točka gomilanja mreže σ.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da pored točke x_0 mreža σ ima još jednu točku gomilanja y_0. Odaberimo disjunktne otvorene skupove U i V takve da je $x_0 \in U$ i $y_0 \in V$. Iz naših pretpostavki slijedi postojanje elementa $d_U \in D$ takvog da je $\sigma_d \in U$ za svaki $d \geq d_U$ i elementa $e \geq d_U$ za koji je $\sigma_e \in V$. Točka σ_e morala bi onda biti iz presjeka skupova U i V što je nemoguće. □

Propozicija 16.3. *Svaka točka gomilanja x_0 podniza σ_φ niza σ u topološkom prostoru X je također i točka gomilanja niza σ.*

Dokaz. Neka su dani okolina U od x_0 u X i bilo koji element d od $\mathbb{N}$. Jer je x_0 točka gomilanja podniza σ_φ postoji $e_0 = e_0(U, d, \sigma_\varphi) \in \mathbb{N}$ takav da je $e_0 > d$ i $\sigma_\varphi(e_0) \in U$. Preostaje još samo primjetiti da je $e = \varphi(e_0) > d$ jer je funkcija φ strogo uzlazna i da je $\sigma(e) = \sigma_\varphi(e_0) \in U$. □

U metričkim prostorima imamo ovakvu karakterizaciju točaka gomilanja nizova.

Teorem 16.5. *Točka x_0 metričkog prostora X je točka gomilanja niza $\sigma : \mathbb{N} \to X$ u X onda i samo onda ako postoji podniz σ_φ toga niza koji konvergira prema x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x_0 točka gomilanja niza σ. Mi ćemo definirati matematičkom indukcijom strogo uzlaznu funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da će podniz σ_φ od σ konvergirati prema točki x_0.

Jer je x_0 točka gomilanja niza σ i kugla $K(x_0, 1)$ je okolina točke x_0, postoji prirodan broj φ_1 takav da je $\sigma(\varphi_1) \in K(x_0, 1)$.

Pretpostavimo da smo našli prirodne brojeve $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n$ takve da je $\sigma(\varphi_i) \in K(x_0, \frac{1}{i})$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Kako je x_0 točka gomilanja niza σ za okolinu $K(x_0, \frac{1}{n+1})$ od x_0 u X i prirodan broj φ_n postoji prirodan broj $\varphi_{n+1} > \varphi_n$ takav da je $\sigma(\varphi_{n+1}) \in K(x_0, \frac{1}{n+1})$.

Dakle, tako smo matematičkom indukcijom definirali strogo uzlaznu funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $\sigma(\varphi_n) \in K(x_0, \frac{1}{n})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je očigledno da podniz σ_φ od σ konvergira prema točki x_0.

Obrnuto, pretpostavimo da podniz σ_φ od σ konvergira prema točki x_0 iz X. Da bi smo provjerili da je x_0 točka gomilanja niza σ promatrajmo bilo koju okolinu U od x_0 u X i bilo koji prirodan broj n.

Jer $\sigma_\varphi \to x_0$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\sigma(\varphi_i) \in U$ za svaki $i \geq k$. Kako je funkcija φ strogo uzlazna, sigurno postoji $i \geq k$ takav da je $\varphi_i > n$. Kako je $\sigma(\varphi_i) \in U$ i $\varphi_i > n$ naša tvrdnja je dokazana. □

Teorem 16.6. *Skup $TG(\sigma)$ svih točaka gomilanja mreže $\sigma : D \to X$ u topološkom prostoru X je zatvoren podskup od X.*

Dokaz. Neka je y_0 točka iz zatvarača $Cl(TG(\sigma))$ skupa $TG(\sigma)$. Ako uspijemo pokazati da je $y_0 \in TG(\sigma)$ onda će slijediti da je skup $TG(\sigma)$ zatvoren budući da se podudara sa svojim zatvaračem.

Promatrajmo bilo koju okolinu U od y_0 u X i bilo koji element d iz usmjerenog skupa D. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je skup U otvoren. Jer je y_0 iz $Cl(TG(\sigma))$, okolina U od y_0 siječe skup $TG(\sigma)$. Neka je $x_0 \in TG(\sigma) \cap U$. Jer je U okolina točke x_0 i jer je x_0 točka gomilanja mreže σ, postoji $e > d$ takav da je $\sigma_e \in U$. Zato je y_0 točka gomilanja mreže σ. $\square$

Slijedeći teorem je poznat pod imenom Bolzano-Weierstrassov teorem.

Teorem 16.7. *Neka je n bilo koji prirodan broj. Svaki omeđeni niz $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ ima bar jednu točku gomilanja.*

Dokaz. Mi ćemo dokazati gornji teorem samo za slučaj $n = 2$. Za ostale vrijednosti broja n dokaz je sličan.

Jer je niz $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ omeđen, postoji pozitivan realan broj a takav da je $\sigma(\mathbb{N}) \subset K$, gdje je K oznaka za kvadrat $[-a, a] \times [-a, a]$. Neka su $p : K \to [-a, a]$ i $q : K \to [-a, a]$ projekcije kvadrata K na segmente čiji je on produkt. Koordinatne osi su horizontalna i vertikalna os simetrije kvadrata K i dijele ga na četiri kvadrata K_1, K_2, K_3, i K_4. Za bar jedan od ta četiri podkvadrata (nazovimo ga K_5) postoji beskonačan podskup B_1 od $\mathbb{N}$ za koji su ispunjena slijedeća dva uvjeta: $\sigma(B_1) \subset K_5$ i $\min(B_1) > \min(\mathbb{N}) = 1$. Horizontalna i vertikalna os simetrije kvadrata K_5 dijele ga u četiri kvadrata K_6, K_7, K_8, i K_9. Za bar jedan od ta četiri podkvadrata (nazovimo ga K_{10}) postoji beskonačan podskup B_2 od B_1 za koji su ispunjena slijedeća dva uvjeta: $\sigma(B_2) \subset K_{10}$ i $\min(B_2) > \min(B_1)$. Primjetimo da je $K_5 \subset K_{10}$ i dok kvadrat K_5 ima bridove duljine a kvadrat K_{10} ima bridove duljine $\frac{a}{2}$. Ponovimo li taj postupak beskonačno mnogo puta dobiti ćemo silazni niz kvadrata

$$K \supset K_5 \supset K_{10} \supset \cdots \supset K_{5i} \supset \cdots ,$$

silazni niz njihovih projekcija na horizontalni smjer

$$[-a, a] \supset p(K_5) \supset p(K_{10}) \supset \cdots \supset p(K_{5i}) \supset \cdots ,$$

silazni niz njihovih projekcija na vertikalni smjer

$$[-a, a] \supset q(K_5) \supset q(K_{10}) \supset \cdots \supset q(K_{5i}) \supset \cdots ,$$

i silazni niz beskonačnih skupova

$$\mathbb{N} \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_i \supset \cdots ,$$

takvih da je $\sigma(B_i) \subset K_{5i}$ i $\min(B_{i+1}) > \min(B_i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Pri tome segmenti $p(K_{5i})$ i $q(K_{5i})$ imaju duljine $a/2^{i-1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Prema Cantorovom svojstvu realnih brojeva dva gornja silazna niza segmenata čiji dijametri teže prema nuli određuju jednoznačno realne brojeve x_0, $y_0 \in [-a, a]$ (koji su presjeci svih segmenata u nizu).

Tvrdimo da je $z_0 = (x_0, y_0)$ točka gomilanja niza σ. Prema Teoremu 16.5 dovoljno je naći strogo uzlaznu funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da podniz σ_φ od σ konvergira prema točki z_0.

Tražena funkcija je definirana pravilom $\varphi(i) = \min(B_i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Neka je W bilo koja okolina točke z_0 u $\mathbb{R}^2$. Presjek $K \cap W$ je okolina od z_0 u K. Zato postoji prirodan broj i takav da je $A \times B \subset W$, gdje je

$$A = (x_0 - \frac{a}{2^i}, x_0 + \frac{a}{2^i}) \cap [-a, a],$$

$$B = (y_0 - \frac{a}{2^i}, y_0 + \frac{a}{2^i}) \cap [-a, a].$$

Za bilo koji prirodan broj $j \geq i$ je $K_{5j} \subset A \times B \subset W$ i $\varphi(j) \in B_j$ pa je $\sigma(\varphi_j) \in K_{5j} \subset W$. Dakle, doista $\sigma_\varphi \to z_0$. $\square$

16.5. Nizovi funkcija. Neka je S bilo kakav skup i neka je (M, d) metrički prostor. Neka $\mathcal{F} = \mathcal{F}(S, M)$ bude oznaka za skup svih funkcija $f : S \to M$. Za niz funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ kažemo da u točki $x_0 \in S$ konvergira prema funkciji $\sigma_0 : S \to M$ ako niz $\sigma_i(x_0)$ u M konvergira prema točki $\sigma_0(x_0)$.

Kažemo da niz funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ konvergira po točkama (ili da konvergira obično) prema funkciji $\sigma_0 : S \to M$ i pišemo $\lim \sigma = \sigma_0$ ako niz σ konvergira prema funkciji σ_0 u svakoj točki $x \in S$. Dakle, mora vrijediti da za svaki element $x \in S$ i svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $i = i(x, \varepsilon)$ takav da je $d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) < \varepsilon$ za svaki $j \geq i$.

Prethodnu definiciju možemo sada lagano proširiti na slučaj konvergencije mreže funkcija iz skupa S u topološki prostor X. Dakle, mreža funkcija $\sigma : D \to \mathcal{F}(S, X)$ konvergira po točkama prema funkciji $\sigma_0 : S \to X$ ako vrijedi da za svaki element $x \in S$ i svaku okolinu U od $\sigma_0(x)$ u X postoji element $d = d(x, U)$ iz usmjerenog skupa D takav da je $\sigma_e(x) \in U$ za svaki $e \geq d$.

Slijedeću snažniju vrstu konvergencije dobivamo za slučaj metričkih prostora ako zahtijevamo da indeks i u gornjoj definiciji ne ovisi od elementa $x \in S$ već samo od odabranog broja $\varepsilon > 0$. Pri tome posljedna nejednakost mora vrijediti za sve elemente skupa S.

Kažemo da niz funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ konvergira uniformno (ili da konvergira jednoliko) prema funkciji $\sigma_0 : S \to M$ i pišemo $\lim \sigma \overset{u}{=} \sigma_0$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je $d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) < \varepsilon$ za svaki $j \geq i$ i za svaki element $x \in S$.

Očigledno je da uniformna konvergencija povlači običnu konvergenciju. Slijedeći klasični primjer pokazuje da obrat općenito nije istinit.

Primjer 16.1. Za svaki prirodan broj i promatrajmo funkciju

$$f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

definiranu pravilom $f(t) = t^i$ za svaki $t \in [0, 1]$. Neka je funkcija

$$f_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

dana sa

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } t \neq 1, \\ 1, & \text{ako je } t = 1. \end{cases}$$

Jer za svaki $t \in [0,\, 1)$ geometrijski niz potencija $\{\, t^i \,\}$ konvergira prema 0 i jer je niz $\{\, 1^i \,\}$ konstantan i konvergira prema 1, vidimo da niz funkcija $\{\, f_i \,\}$ konvergira po točkama prema funkciji f_0. Ali taj niz funkcija ne konvergira uniformno prema f_0 jer za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ne postoji prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je

$$|f_j(t) - f_0(t)| = |t^j - 0| = t^j < \frac{1}{2}$$

za svaki $j \geq i$ i za svaki $t \in [0,\, 1]$. I doista, za $t = 1 - \frac{1}{2j}$ imamo

$$t^j = (1 - \frac{1}{2j})^j$$

što je $> \frac{1}{2}$ za dovoljno velike prirodne brojeve j jer je

$$\lim_{j \to \infty} [(1 - \frac{1}{2j})^j - \frac{1}{2}] = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} > 0.$$

Za skup S i metrički prostor $(M,\, d)$ označimo sa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(S,\, M)$ skup svih omeđenih funkcija $f : S \to M$. Na skupu $\mathcal{B}$ definiramo metriku d_∞ pravilom

$$d_\infty(f,\, g) = \sup\{\, d(f(x),\, g(x)) \mid x \in S \,\},$$

za $f,\, g \in \mathcal{B}$. Dakle, par $(\mathcal{B},\, d_\infty)$ je metrički prostor. Slijedeći teorem pokazuje da je za nizove omeđenih funkcija uniformna konvergencija ekvivalentna konvergenciji u odnosu na metriku d_∞. Zato se katkada ta metrika naziva metrikom uniformne konvergencije.

TEOREM 16.8. *Niz omeđenih funkcija $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{B}(S,\, M)$ konvergira uniformno prema funkciji $\sigma_0 \in \mathcal{B}(S,\, M)$ onda i samo onda ako je*

$$\lim_{i \to \infty} d_\infty(\sigma_i,\, \sigma_0) = 0,$$

(tj. onda i samo onda ako niz funkcija $\{\, \sigma_i \,\}$ konvergira u metričkom prostoru $(\mathcal{B}(S,\, M),\, d_\infty)$ prema funkciji σ_0).

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da niz σ uniformno konvergira prema funkciji σ_0. Onda po definiciji za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ možemo naći prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je $d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $j \geq i$ i svaki $x \in S$. No, tada je

$$d_\infty(\sigma_j,\, \sigma_0) = \sup\{\, d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) \mid x \in S \,\} < \varepsilon$$

za svaki $j \geq i$. Zato niz σ konvergira prema funkciji σ_0 u metrici d_∞.

Obrnuto, pretpostavimo da niz σ konvergira prema funkciji σ_0 u metrici d_∞. Onda za bilo koji realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj

$i = i(\varepsilon)$ takav da je $d_\infty(\sigma_j, \sigma_0) = \sup\{ d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) \mid x \in S \} < \varepsilon$ za svaki $j \geq i$. Ali, tada za svaki $j \geq i$ i svaki $x \in S$ vrijedi

$$d(\sigma_j(x), \sigma_0(x)) < \varepsilon$$

pa niz σ uniformno konvergira prema funkciji σ_0. □

16.6. Cauchyjevi nizovi.

Definicija 16.6. Za niz σ u metričkom prostoru (M, d) kažemo da je Cauchyjev niz ili kraće da je C-niz ako za bilo koji realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je $d(\sigma_m, \sigma_n) < \varepsilon$ za sve prirodne brojeve $m, n \geq i$.

Teorem 16.9. *Neka je (M, d) metrički prostor. Svaki konvergentan niz σ u M je Cauchyjev niz.*

Dokaz. Ako niz σ konvergira, onda postoji točka $x_0 \in M$ takva da $\sigma \to x_0$. Za bilo koji realan broj $\varepsilon > 0$ možemo naći prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je $d(\sigma_j, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $j \geq$. Sada za sve prirodne brojeve $m, n \geq i$ uz pomoć nejednakosti trokuta imamo

$$d(\sigma_m, \sigma_n) \leq d(\sigma_m, x_0) + d(\sigma_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je niz σ doista Cauchyjev niz. □

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi općenito tj. Cauchyjev niz ne mora biti konvergentan.

Primjer 16.2. U metričkom prostoru $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ (potprostoru metričkog prostora svih realnih brojeva s metrikom induciranom funkcijom apsolutne vrijednosti) promatrajmo niz $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definiran pravilom $\sigma(i) = \frac{1}{i}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Niz σ je Cauchyjev jer ako je ε bilo koji pozitivan realan broj i ako je $i = i(\varepsilon)$ prirodan broj takav da je $\frac{1}{i} < \varepsilon$ onda za sve prirodne brojeve $m, n \geq i$ vrijedi

$$|\sigma_m - \sigma_n| = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| < \frac{1}{\min\{ m, n \}} \leq \frac{1}{i} < \varepsilon.$$

Ali niz σ nije konvergentan jer on može konvergirati jedino prema broju 0 koji nije element prostora $\mathbb{R}^+$.

Teorem 16.10. *Neka je (M, d) metrički prostor. Pretpostavimo da je σ Cauchyjev niz u M. Ako neki podniz σ_φ od σ konvergira prema točki $x_0 \in M$, onda $\sigma \to x_0$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ odabran po volji. Kako je po pretpostavci niz σ Cauchyjev niz, postoji prirodan broj $i = i(\varepsilon)$ takav da je udaljenost $d(\sigma_m, \sigma_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geq i$. Sada ćemo iskoristiti pretpostavku da podniz σ_φ konvergira prema točki x_0 da bi smo odabrali prirodan broj u takav da je $\varphi_u > i$ i $d(\sigma(\varphi_v), x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $v \geq u$. Dakle, ako je $j \geq i$ onda imamo

$$d(\sigma_j, x_0) \leq d(\sigma_j, \sigma(\varphi_u)) + d(\sigma(\varphi_u), x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zato je σ Cauchyjev niz u metričkom prostoru M. □

TEOREM 16.11. *Svaki Cauchyjev niz σ u metričkom prostoru (M, d) je omeđen.*

DOKAZ. Jer je σ Cauchyjev niz, postoji prirodan broj i sa svojstvom da za sve $m, n \geq i$ vrijedi $d(\sigma_m, \sigma_n) < 1$ (primjena definicije za slučaj $\varepsilon = 1$). Slijedi da je skup $\sigma(\mathbb{N})$ jednak uniji $A \cup B$, gdje je $A = \{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i \}$ i $B = K(\sigma_i, 1)$ (kugla sa središtem u točki σ_i i radijusa 1). Skupovi A i B su očito omeđeni pa je zato i skup $\sigma(\mathbb{N})$ također omeđen budući da je unija dva omeđena skupa. □

TEOREM 16.12. *Neka je n bilo koji prirodan broj. U Euklidskom n-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$ svaki Cauchyjev niz σ je konvergentan.*

DOKAZ. Prema Teoremu 16.11 niz σ je omeđen pa prema Bolzano-Weierstrassovom Teoremu 16.7 postoje točka $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i podniz σ_φ od σ takvi da $\sigma_\varphi \to x_0$. Ali onda prema Teoremu 16.10 slijedi da niz σ konvergira prema točki x_0. □

16.7. Potpun metrički prostor. Kažemo da je metrički prostor X potpun ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira, tj. ako za svaki Cauchyjev niz σ u prostoru X postoji točka $x_0 \in X$ takva da $\sigma \to x_0$.

Potpuni unitarni linearni prostor kraće zovemo Hilbertov prostor dok potpuni unitarni linearni prostor kraće zovemo Banachov prostor. Prema Teoremu 16.12 slijedi da je za svaki prirodan broj n Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ osnovni primjer kako Hilbertovog tako i Banachovog prostora. Beskonačno dimenzionalni analogon tog primjera je prostor ℓ_2 svih kvadratno sumabilnih nizova realnih brojeva s unutrašnjim (ili skalarnim) produktom $\langle \sigma, \tau \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \cdot \tau_i$ za sve

$$\sigma, \tau \in \ell_2 = \{ \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^2 < \infty \}.$$

TEOREM 16.13. *Svaki zatvoreni podskup Y potpunog metričkog prostora X je i sam potpuni metrički prostor.*

DOKAZ. Neka je σ Cauchyjev niz u potprostoru Y i neka je $j : Y \to X$ inkluzija. Niz $j \circ \sigma$ je Cauchyjev niz u prostoru X pa zbog toga što je X potpun postoji $x_0 \in X$ takav da $j \circ \sigma \to x_0$. Dakle, σ je niz u Y koji u X konvergira prema točki x_0 pa je $x_0 \in Cl(Y)$. Jer je Y zatvoren u X mora biti $x_0 \in Y$. Zato $\sigma \to x_0$ u prostoru Y pa je Y potpun. □

Iz Teorema 16.12 i iz prethodnog teorema slijedi da su svi zatvoreni potprostori bilo kojeg Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ i Hilbertovog prostora ℓ_2 potpuni metrički prostori.

Djelomični obrat Teorema 16.13 ostvaren je u slijedećem teoremu.

TEOREM 16.14. *Neka je Y potprostor metričkog prostora X. Ako je Y potpun metrički prostor onda je Y zatvoreni podskup X.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $Cl(Y) \subset Y$ jer će tada vrijediti $Cl(Y) = Y$ pa će Y biti zatvoren podskup od X.

Neka je $x_0 \in Cl(Y)$. Prema Teoremu 16.2 postoji niz $\sigma : \mathbb{N} \to Y$ takav da $\sigma \to x_0$ u prostoru X. Iz Teorema 16.9 slijedi da je niz σ Cauchyjev niz u prostoru Y. Pretpostavka da je Y potpun ima za posljedicu postojanje točke $y_0 \in Y$ takve da $\sigma \to y_0$ u Y. Prema tome σ je niz u metričkom prostoru X koji istovremeno konvergira prema točkama x_0 i y_0. Dakle, iz Teorema 16.2 sada dobivamo $x_0 = y_0$ pa slijedi da je $x_0 \in Y$. $\square$

Jedna ugodna posljedica prethodnog teorema je da skup $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva nije potpun metrički prostor jer očito nije zatvoren podskup skupa $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva. Naravno da to možemo dokazati i direktno tako da primjetimo da je niz $(1 + \frac{1}{n})^n$ Cauchyjev niz racionalnih brojeva koji ne konvergira prema niti jednom racionalnom broju već konvergira prema iracionalnom broju e – bazi prirodnih logaritama.

Zadatak 16.3. Neka je $\mathcal{B}(S)$ oznaka za normirani linearni prostor svih omeđenih realnih funkcija na skupu S gdje je tzv. norma supremuma $\| \;\|_\infty$ dana pravilom $\|f\|_\infty = \sup\{\, f(x) \mid x \in S\,\}$ za svaku omeđenu funkciju $f : S \to \mathbb{R}$. Pokaži da je svaki Cauchyjev niz σ u $\mathcal{B}(S)$ konvergentan tj. da je $\mathcal{B}(S)$ primjer Banachovog prostora (koji općenito nije Hilbertov prostor).

Rješenje. Za svaki element $x \in S$ niz $\sigma_n(x)$ je Cauchyjev niz realnih brojeva. Budući da je skup $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva potpun prema Teoremu 16.12, možemo naći $\sigma_0(x) \in \mathbb{R}$ takav da $\sigma_n(x) \to \sigma_0$. Na taj način definirali smo funkciju $\sigma_0 : S \to \mathbb{R}$. Sada se lagano pokaže da je funkcija σ_0 omeđena i da $\sigma \to \sigma_0$. $\square$

Definicija 16.7. Neka je $(X,\, d)$ metrički prostor. Za par $((Y,\, \varrho),\, h)$ koji se sastoji od potpunog metričkog $(Y,\, \varrho)$ i izometrije $h : X \to Y$ kažemo da je upotpunjenje prostora X ako je $h(X)$ gust u prostoru Y.

U gornjoj definiciji pretpostavka da je funkcija h izometrija znači da za svake dvije točke $x,\, y \in X$ vrijedi $d(x,\, y) = \varrho(h(x),\, h(y))$. Primjetimo da su izometrije nužno injektivna preslikavanja jer za $h(x) = h(y)$ odmah slijedi $d(x,\, y) = 0$ ili $x = y$.

Najjednostavniji primjer upotpunjenja je prostor $\mathbb{R}$ svih realnih brojeva koji upotpunjuje prostor $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva. U tom slučaju je izometrija h inkluzija od $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$.

Teorem 16.15. *Za svaki metrički prostor $(X,\, d)$ postoji njegovo upotpunjenje $((Y,\, \varrho),\, h)$. Svaka takva dva upotpunjenja $((Y,\, \varrho),\, h)$ i $((Z,\, \vartheta),\, k)$ od X su izomorfna u smislu da postoji izometrija f prostora Y na prostor Z takva da je $f \circ h = k$.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema je tehnički složen jer se moraju provjeravati mnoge tvrdnje. Kako je provjera svake od tih tvrdnji ipak dosta lagana njih ćemo prepustiti čitateljima.

Neka nam $CN(X)$ bude oznaka za skup svih Cauchyjevih nizova u prostoru X. Na skupu $CN(X)$ definiramo binarnu relaciju $\sim$ tako da za Cauchyjeve nizove σ, $\tau : \mathbb{N} \to X$ stavimo $\sigma \sim \tau$ ako i samo ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ možemo naći prirodan broj i takav da je $d(\sigma_j, \tau_j) < \varepsilon$ za sve $j \geq i$.

Tvrdnja 1. Binarna relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $CN(X)$ svih Cauchyjevih nizova u prostoru X, tj. za sve α, β, i γ iz $CN(X)$ vrijede svojstva refleksivnosti ($\alpha \sim \alpha$), simetričnosti ($\alpha \sim \beta$ povlači $\beta \sim \alpha$), i tranzitivnosti ($\alpha \sim \beta$ i $\beta \sim \gamma$ zajedno povlače $\alpha \sim \gamma$).

Neka nam Y bude kratka oznaka za kvocijentni skup $CN(X)/\sim$. Dakle, točke skupa Y su klase ekvivalencije $[\sigma]$ Cauchyjevih nizova u prostoru X gdje je $[\sigma] = \{\, \tau \in CN(X) \mid \tau \sim \sigma \,\}$.

Definirajmo sada funkciju $\varrho : Y \times Y \to \mathbb{R}$ na slijedeći način: Za klase ekvivalencije $[\sigma]$ i $[\tau]$ Cauchyjevih nizova σ i τ stavimo

$$\varrho([\sigma], [\tau]) = \sup\{\, d(\sigma_i, \tau_i) \mid i \in \mathbb{N} \,\}.$$

Tvrdnja 2. Definicija funkcije ϱ je korektna tj. ne ovisi od izbora reprezentanata σ i τ klasa ekvivalencije $[\sigma]$ i $[\tau]$.

Tvrdnja 3. Funkcija ϱ je metrika na skupu Y.

Tvrdnja 4. Metrički prostor (Y, ϱ) je potpun tj. svaki Cauchyjev niz $\Omega : \mathbb{N} \to Y$ konvergira.

U dokazu Tvrdnje 4 za svaki prirodan broj i neka je $\Omega_i = [\sigma\langle i\rangle]$ za neki $\sigma\langle i\rangle \in CN(X)$. Definirajmo niz $\delta : \mathbb{N} \to X$ pravilom $\delta(i) = \sigma\langle i\rangle(i)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Lagano se provjeri da je δ Cauchyjev niz u prostoru X i da $\Omega \to [\delta]$.

Da bi smo definirali funkciju $h : X \to Y$ uvedimo oznaku $\omega\langle x\rangle$ za konstantni niz kome je vrijednost neka točka $x \in X$. Za svaki element x od X, neka je $h(x) = [\omega\langle x\rangle]$.

Tvrdnja 5. Funkcija h je izometrija metričkog prostora (X, d) u metrički prostor (Y, ϱ).

Tvrdnja 6. Skup $h(X)$ je gust u prostoru Y.

I doista, ako su $[\sigma] \in Y$ i realan broj $\varepsilon > 0$ dani onda za dovoljno velike indekse i vrijedi $\varrho([\sigma], [\omega\langle \sigma_i\rangle]) < \varepsilon$.

Još preostaje pokazati da su svaka dva upotpunjenja $((Y, \varrho), h)$ i $((Z, \vartheta), k)$ od (X, d) izomorfni.

Neka je $[\sigma] \in Y$. Očigledno je da $[h(\sigma_i)] \to [\sigma]$.

Tvrdnja 7. Niz $[k(\sigma_i)]$ je Cauchyjev niz u prostoru (Z, ϑ).

Jer je Z potpun metrički prostor postoji $z_0 \in Z$ takav da $[k(\sigma_i)] \to z_0$. Neka je $f([\sigma]) = z_0$.

Tvrdnja 8. Gornja definicija funkcije $f : Y \to Z$ je korektna tj. ne ovisi od izbora reprezentanta σ klase ekvivalencije $[\sigma]$.

Tvrdnja 9. Funkcija $f : Y \to Z$ je izometrija metričkog prostora $(Y,\, \varrho)$ u metrički prostor $(Z,\, \vartheta)$.

Tvrdnja 10. Funkcija $f : Y \to Z$ je surjekcija. $\square$

.... $\boxed{5}$ ....

16.8. Banachov teorem o fiksnoj točki. Neka je X bilo koji skup i neka je $f : X \to X$ funkcija. Kažemo da je $x_0 \in X$ fiksna točka za funkciju f ako vrijedi $f(x_0) = x_0$.

Jedan od važnijih problema u matematici je saznati da li neka funkcija ima fiksnih točaka i kakva je njihova priroda. Mnogi rezultati o egzistenciji rješenja jednadžbi (kako algebarskih tako i diferencijalnih odnosno parcijalnih diferencijalnih) mogu se formulirati kao pitanja o postojanju fiksnih točaka za neke pridružene funkcije.

Primjer 16.3. Linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa $f(x) = a\,x + b$ za realne brojeve a i b ima točno jednu fiksnu točku $x_0 = \frac{b}{1-a}$ za $a \neq 1$ dok za $a = 1$ nema fiksnih točaka.

Kvadratna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ za realne brojeve a, b, i c uz $a \neq 0$ ima točno dvije, jednu, ili nema fiksnu točku već prema tome da li je izraz $(b-1)^2 - 4\,a\,c$ pozitivan, jednak nuli, ili negativan.

$\boxed{5}$

U topologiji su teoremi o postojanju fiksnih točaka neprekidnih funkcija mnogobrojni a jedan od najpoznatijih je slijedeći Brouwerov teorem o fiksnoj točki za kocke.

stranica sadrži $\boxed{5}$

Sjetimo se da za svaki prirodan broj n (direktni) produkt $I \times \cdots \times I$ od n kopija jediničnog zatvorenog segmenta $I = [0, 1]$ nazivamo n-dimenzionalna kocka i označavamo kao I^n. Direktni produkt prebrojivo beskonačno mnogo kopija od I naziva se Hilbertova kocka i označava sa I^∞ ili sa Q.

Teorem 16.16. *Neka je prostor X homeomorfan bilo Hilbertovoj kocki Q bilo n-dimenzionalnoj kocki I^n za neki prirodan broj n. Onda svaka neprekidna funkcija $f : X \to X$ ima (bar jednu) fiksnu točku.*

Skica dokaza. Pretpostavimo prvo da je X konačmo dimenzionalna kocka. Dokaz tvrdnje postižemo upotrebom slijedećeg teorema o nepostojanju retrakcije kocke X na njezinu granicu ∂X koja se sastoji od svih točaka od X koje nemaju otvorenu okolinu homeomorfnu prostoru $\mathbb{R}^n$.

Pri tome se retrakcije definiraju ovako: Neka je A podskup prostora X. Za neprekidnu funkciju $r : X \to A$ kažemo da je retrakcija (čitavog prostora X na njegov podskup A) ako su sve točke od A (i jedino one) fiksne točke funkcije r. Ako postoji retrakcija prostora na njegov podskup onda se za podskup kaže da je retrakt tog prostora.

Teorem 16.17. *Ne postoji retrakcija konačno dimenzionalne kocke na njezinu granicu.*

Premda je prethodni teorem intuitivno očigledan (zamislimo li gumenu opnu razapetu na kružnici od žice jasno je da bez rezanja ili bušenja nećemo moći gumu gurnuti na obruč) njegov strogi dokaz zahtjeva složeni aparat topologije.

U nekoliko riječi ideja dokaza je da se svakom prostoru X pridruži neki algebarski objekt $G(X)$ (najčešće grupa, npr. grupa homotopije $\pi_k(X)$ ili grupa homologije $H_k(X)$ za svaki cijeli broj k) tako da svaka neprekidna funkcija $f : X \to Y$ (čak i njezina klasa homotopije $[f]$) funktorijalno inducira homomorfizam $G(f) : G(X) \to G(Y)$ pridruženih grupa. Zatim se pokaže da je grupa $G(I^n)$ trivijalna i da je grupa $G(\partial I^n)$ netrivijalna. Ali, kad bi postojala retrakcija $r : I^n \to \partial I^n$ onda bi netrivijalna grupa $G(\partial I^n)$ morala biti podgrupa trivijalne grupe $G(I^n)$ što je nemoguće.

Dokažimo sada tvrdnju da svaka neprekidna funkcija $f : X \to X$ na n-dimenzionalnoj kocki X ima fiksnu točku. Neka je

$$B^n = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \,\}.$$

Očigledno je

$$\partial B^n = S^{n-1}\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \,\}.$$

stranica sadrži $\boxed{5}$

Neka je $h : X \to B^n$ homeomorfizam. Neka je $g : B^n \to B^n$ kompozicija $h \circ f \circ h^{-1}$. Ako pokažemo da neprekidna funkcija g ima fiksnu točku y_0 onda je $x_0 = h^{-1}(y_0)$ fiksna točka za funkciju f jer iz $g(y_0) = y_0$ slijedi $(h \circ f \circ h^{-1})(y_0) = y_0$ odnosno $f(h^{-1}(y_0)) = h^{-1}(y_0)$ ili $f(x_0) = x_0$.

Kad bi $g(x) \neq x$ za svaki $x \in B^n$ onda bi zraka s početkom u točki $f(x)$ kroz točku x sjekla S^{n-1} u nekoj točki $r(x)$. Na taj način bila bi definirana retrakcija $r : B^n \to S^{n-1}$ što znamo da je nemoguće (jer tvrdnja o nepostojanju retrakcije kocke na njezinu granicu jasno vrijedi i za punu kuglu B^n koja joj je homeomorfna).

Slučaj Hilbertove kocke dokazuje se ovako: Neka je $f : Q \to Q$ neprekidna funkcija. Za bilo koji prirodan broj n neka je $f_n : I^n \to I^n$ neprekidna funkcija definirana pravilom $f_n(x) = p_n \circ f \circ j_n(x)$ za svaki $x \in I^n$, gdje je $j_n : I^n \to Q$ ulaganje dano sa

$$j_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots),$$

a $p_n : Q \to I^n$ je projekcija dana sa $p_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Znamo da svaka od funkcija f_n ima fiksnu točku $x\langle n\rangle$. Sada se lagano može pokazati da točke $j_n(x\langle n\rangle)$ konvergiraju prema fiksnoj točki funkcije f. $\square$

Definicija 16.8. Kažemo da prostor X ima svojstvo fiksne točke ako svaka neprekidna funkcija $f : X \to X$ ima fiksnu točku.

U toj terminologiji možemo prethodni teorem izraziti kratko ovako: Sve kocke imaju svojstvo fiksne točke. Problem određivanja cjelovitog popisa svih prostora koji imaju svojstvo fiksne točke još uvijek nije u cjelosti riješen iako su poznati mnogobrojni djelomični rezultati.

.... $\boxed{5}$ ....

Ideja Banachovog teorema o fiksnoj točki je da se za posebne funkcije (tzv. kontrakcije) može na potpunim metričkim prostorima dokazati postojanje (jedinstvene) fiksne točke. Kontrakcije preslikavaju točke tako da je udaljenost slika bilo kojeg para točaka bitno manja od udaljenosti tih točaka. Formalna definicija je slijedeća:

Definicija 16.9. Neka je $(X,\, d)$ metrički prostor i neka je $f : X \to X$ funkcija. Kažemo da je f kontrakcija ili stezanje ako postoji realan broj $0 \leq \kappa < 1$ (koji nazivamo koeficijentom kontrakcije) takav da je

$$d(f(x),\, f(y)) \leq \kappa \cdot d(x,\, y)$$

za sve $x,\, y \in X$.

Primjer 16.4. Neka su a i b realni brojevi. Linearna funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ dana sa $f(x) = a\,x + b$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ je kontrakcija onda i samo onda ako je $|a| < 1$ (i tada je $|a|$ njen koeficijent kontrakcije).

Kontrakcije su specijalan slučaj tzv. Lipscitzovih funkcija koje se često susreću u matematici pa čemo ih zato sada definirati.

Definicija 16.10. Funkciju $F : X \to Y$ između metričkih prostora $(X,\, d)$ i $(Y,\, \varrho)$ nazivamo **Lipscitzovom funkcijom** ako vrijedi

$$\varrho(F(x),\, F(y)) \leq M\, d(X,\, y)$$

za neku stalnu konstantu M i za sve $x,\, y \in X$. Najmanja takva konstanta M zove se Lipshitzova konstanta $L(F)$ od F. Dakle, funkcija F je kontrakcija onda i samo onda ako je $L(F) < 1$ (tj. njezina Lipschitzova konstanta je strogo manja od 1). Funkcije F za koje je $L(F) = 1$ (tj. kojima je Lipschitzova konstanta jednaka 1) nazivaju se neekspanzivnim funkcijama.

U dokazu Banachovog teorema o fiksnoj točki trebati će nam slijedeća jednostavna lema koja ima kao posljedicu da su sve kontrakcije uniformno neprekidne funkcije.

Lema 16.1. *Svaka Lipschitzova funkcija $f : X \to Y$ među metričkim prostorima $(X,\, d)$ i $(Y,\, \varrho)$ je uniformno neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je κ Lipschitzova konstanta funkcije f. Ako je $\kappa = 0$, onda je f konstantna funkcija i zato trivijalno uniformno neprekidna. Prema tome, možemo pretpostaviti da je $\kappa > 0$. Neka je ε bilo kakav pozitivan realan broj. Neka je $\delta = \frac{\varepsilon}{\kappa}$. Za bilo koji par točaka $x,\, y \in X$ takav da je $d(x,\, y) < \delta$ vrijedi

$$d(f(x),\, f(y)) \leq \kappa \cdot d(x,\, y) < \kappa \cdot \frac{\varepsilon}{\kappa} = \varepsilon.$$

□

Za funkciju $f : X \to X$ na skupu X i bilo koji cijeli broj $n \geq 0$ definiramo indukcijom $f_0 = id_X$, $f_1 = f$ i $f_n = f \circ f_{n-1}$ za $n > 1$. Ako je x bilo koja točka skupa X onda niz $\{\, f_n(x)\,\}_{n \geq 0}$ nazivamo (pozitivnom) orbitom točke x za funkciju f i označavamo simbolom $O_f^+(x)$.

Slijedeći teorem je prvi dokazao poljski matematičar Stefan Banach a danas je poznat pod imenom Banachov teorem o fiksnoj točki.

TEOREM 16.18. *Ako je (X, d) potpuni metrički prostor onda svaka kontrakcija $f : X \to X$ ima jedinstvenu fiksnu točku u. Za bilo koju točku $x \in X$ njena pozitivna orbita $O_f^+(x)$ konvergira prema točki u. Pri tome vrijedi ocjena*

$$d(f^n(x), u) < \frac{\kappa^n}{1-\kappa} d(f(x), x),$$

gdje je κ koeficijent kontrakcije za kontrakciju f.

DOKAZ. Neka je x bilo koja točka prostora X i neka je κ koeficijent kontrakcije za kontrakciju f.

Za svaki cijeli broj $n \geq 0$ uvedimo oznaku $x_n = f_n(x)$. Dakle, pozitivna orbita $O_f^+(x)$ je niz $\{ x_n \}_{n \geq 0}$.

Tvrdnja 1. Za svaki cijeli broj $i \geq 0$ vrijedi

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq \kappa^i d(x_0, x_1).$$

Dokaz Tvrdnje 1 provodimo matematičkom indukcijom. Za $i = 0$ očito vrijedi

$$d(x_0, x_1) \leq \kappa^0 d(x_0, x_1).$$

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za $i = n$ tj. da je

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \kappa^n d(x_0, x_1)$$

i promatrajmo slučaj $i = n + 1$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \kappa \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leq \\ \leq \kappa \cdot \kappa^n \cdot d(x_0, x_1) = \kappa^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost vrijedi i za $i = n + 1$ pa matematičkom indukcijom slijedi da ona vrijedi za svaki cijeli broj $i \geq 0$.

Tvrdnja 2. Za svaki prirodan broj j vrijedi nejednakost

$$1 + \kappa + \kappa^2 + \cdots + \kappa^j < \frac{1}{1-\kappa}.$$

I doista, znamo da za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 - \kappa^{j+1} = (1-\kappa)(\kappa^j + \kappa^{j-1} + \cdots + \kappa + 1).$$

Zbog $0 \leq \kappa < 1$, slijedi $1 - \kappa^{j+1} < 1$ pa je

$$1 + \kappa + \cdots + \kappa^j < \frac{1}{1-\kappa}.$$

Jer to vrijedi za svaki prirodan broj j time je Tvrdnja 2 provjerena.

Tvrdnja 3. Niz $\{ x_n \}_{n \geq 0}$ iteracija pod f točke $x \in X$ je Cauchyjev niz.

Dovoljno je pokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj i takav da je $d(x_i, x_{i+j}) < \varepsilon$ za sve cijele brojeve $j \geq 0$.

Neka je zadan realan broj $\varepsilon > 0$. Odaberimo prirodan broj i tako da je $\frac{\kappa^i}{1-\kappa}\, d(x_0,\, x_1) < \varepsilon$ tj. da je

$$i > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon\,(1-\kappa)}{d(x_0,\, x_1)}\right)}{\ln \kappa}.$$

Prema nejednakosti mnogokuta i Tvrdnjama 1 i 2 za svaki prirodan broj j vrijedi

$$\begin{aligned} d(x_i,\, x_{i+j}) &\le d(x_i,\, x_{i+1}) + d(x_{i+1},\, x_{i+2}) + \cdots + d(x_{i+j-1},\, x_{i+j}) \le \\ &\le \kappa^i \cdot d(x_0,\, x_1) + \kappa^{i+1} \cdot d(x_0,\, x_1) + \cdots + \kappa^{i+j-1} \cdot d(x_0,\, x_1) \le \\ &\le \kappa^i \cdot d(x_0,\, x_1)\, [1 + \kappa + \cdots + \kappa^{j-1}] < \frac{\kappa^i}{1-\kappa}\, d(x_0,\, x_1) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sada kada znamo da je $\{\, x_n \,\}$ Cauchyjev niz možemo iskoristiti pretpostavku o potpunosti prostora X i zaključiti da postoji točka $u \in X$ kojoj taj niz konvergira.

Tvrdnja 4. Točka u je fiksna točka za funkciju f.

I doista, $f(u) = f(\lim\, x_n) = \lim\, f(x_n) = \lim\, x_{n+1} = u$. Ovdje smo za jednakost $f(\lim\, x_n) = \lim\, f(x_n)$ iskoristili Lemu 16.1 (da zaključimo da je f neprekidna) i Teorem 18.4 (o tome da lim i neprekidna funkcija mogu izmjeniti mjesta tj. da je slika limesa niza pri neprekidnoj funkciji jednaka limesu slika članova niza). Za jednakost $\lim\, x_{n+1} = u$ se koristimo činjenicom da je $\{\, x_{n+1} \,\}$ podniz od $\{\, x_n \,\}$ i da svaki podniz konvergentnog niza konvergira prema limesu niza.

Tvrdnja 5. Točka u je jedinstvena fiksna točka za funkciju f.

Dovoljno je pokazati da za svaku fiksnu točku v od f vrijedi $u = v$.

Imamo, $d(u,\, v) = d(f(u),\, f(v)) \le \kappa \cdot d(u,\, v)$. Zato je

$$(1-\kappa) \cdot d(u,\, v) \le 0.$$

Jer je $\kappa < 1$, vidimo da je $1 - \kappa > 0$ i jer je $d(u,\, v) \ge 0$ slijedi da mora biti $d(u,\, v) = 0$ odnosno $u = v$. □

5

17. Primjena Banachovog teorema na integralne i diferencijalne jednadžbe

stranica sadrži 5

Da bi smo mogli primjeniti Banachov teorem o fiksnoj točki na funkciju $F : X \to X$ potpunog metričkog prostora X u sebe moramo znati da je F kontrakcija u odnosu na neku potpunu metriku d na X. Ako zadana funkcija F nije kontrakcija u odnosu na metriku d katkada je ipak moguće naći neku drugu potpunu metriku ϱ u odnosu na koju F postaje kontrakcija.

Primjer 17.1. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearna funkcija ravnine definirana pravilom $F(x,\, y) = (\frac{8\,x}{10} + \frac{8\,y}{10},\, \frac{x}{10} + \frac{y}{10})$ za sve točke $(x,\, y)$ ravnine

$\mathbb{R}^2$. Neka su potpune metrike d i ϱ na $\mathbb{R}^2$ dane formulama

$$d((x,\, y),\, (u, v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

i

$$\varrho((x,\, y),\, (u, v)) = |x-u| + |y-v|,$$

za sve $(x,\, y),\, (u,\, v) \in \mathbb{R}^2$. Onda F nije kontrakcija u odnosu na metriku d jer je omjer udaljenosti

$$d(F((0,0)),\, F((-6,\, -2))) = \sqrt{\left(\frac{48}{10} + \frac{16}{10}\right)^2 + \left(\frac{6}{10} + \frac{2}{10}\right)^2} = \frac{4}{5}\sqrt{65}$$

slika točaka $(0,\, 0)$ i $(-6,\, -2)$ i udaljenosti tih točaka

$$d((0,0),\, (-6,\, -2)) = \sqrt{6^2 + 2^2} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{125}{2}}$$

veći od 1. S druge strane, u odnosu na metriku ϱ funkcija F je kontrakcija s koeficijentom kontrakcije $\frac{9}{10}$ jer je

$$\varrho(F((x,\, y)),\, F((u,\, v))) \leq \frac{9}{10}\varrho((x,\, y),\, (u,\, v))$$

za sve $(x,\, y),\, (u,\, v) \in \mathbb{R}^2$.

stranica sadrži samo $\boxed{5}$

Dakle, svaka potpuna metrika d na metričkom prostoru X određuje klasu $\mathcal{K}(d)$ funkcija $f : X \to X$ koje su kontrakcije u odnosu na metriku d. Pri tome je općenito $\mathcal{K}(d) \neq \mathcal{K}(\varrho)$ čak i ako su (potpune) metrike d i ϱ uniformno ekvivalentne.

Ako je E Banachov prostor (tj. potpuni normirani linearni prostor), onda smo norme $|\ |$ i $\|\ \|$ zvali uniformno ekvivalentnima ako možemo naći pozitivne konstante D i G takve da je $D\,|x| \leq \|x\| \leq G\,|x|$ za sve vektore $x \in E$. Sada je jasno da će bilo koja Lipschitzova funkcija u odnosu na neku normu biti Lipschitzova funkcija i u odnosu na svaku njoj uniformno ekvivalentnu normu. Zato je, u Banachovim prostorima, za pručavanje Lipschitzove funkcije $F : E \to E$ vrlo često korisno naći uniformno ekvivalentnu normu u odnosu na koju je funkcija F kontrakcija.

Takva razmatranja su najljepše ilustrirana u slijedećem dokazu egzistencije rješenja za Volterrinu integralnu jednadžbu druge vrste.

TEOREM 17.1. *Neka je T pozitivan realan broj i pretpostavimo da za neprekidnu funkciju $K : [0,\, T] \times [0,\, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji pozitivan realan broj L takav da je*

$$|K(t,\, s, x) - K(t,\, s, y)| \leq L\,|x-y|$$

za sve $t,\, s \in [0,\, T]$ i sve $x,\, y \in \mathbb{R}$. Onda za svaku neprekidnu funkciju $v : [0,\, T] \to \mathbb{R}$ integralna jednadžba

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t,\, s,\, u(s))\, ds \qquad (0 \leq t \leq T)$$

ima jedinstveno rješenje $u : [0,\, T] \to \mathbb{R}$ *u skupu* $C([0,\, T])$ *svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu* $[0,\, T]$. *Pored toga, odaberemo li bilo koju funkciju* $u_1 \in C([0,\, T])$ *i definiramo li niz funkcija* $u_n \in C([0,\, T])$ *induktivnim pravilom*

$$u_{n+1}(t) = v(t) + \int_0^T K(t,\, s,\, u_n(s))\, ds$$

za $n \in \mathbb{N}$ *i* $t \in [0,\, T]$ *onda niz* $\{\, u_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira uniformno na* $[0,\, T]$ *prema tom jedinstvenom rješenju* u.

Dokaz. Neka je $E = C([0,\, T])$ Banachov prostor svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[0,\, T]$ snabdjeven normom

$$\langle h \rangle = \max \{ e^{-L\, t}\, |h(t)| \,:\, 0 \le t \le T \}.$$

Ta norma je potpuna i uniformno je ekvivalentna sup-normi $\|h\|$ jer za svaki $h \in E$ vrijedi $e^{-L\, T} \|h\| \le \langle h \rangle \le \|h\|$.

stranica sadrži samo $\boxed{5}$

Definirajmo funkciju $F : E \to E$ pravilom

$$F(h)(t) = v(t) + \int_0^t K(t,\, s,\, h(s))\, ds.$$

Da bi smo dokazali da zadana integralna jednadžba ima rješenje dovoljno je dokazati da funkcija F ima fiksnu točku. To će slijediti iz Banachovog teorema o fiksnoj točki ako pokažemo da je F kontrakcija. Imamo redom

$$\begin{aligned}
\langle F(h) - F(k) \rangle &\le \max_{0 \le t \le T} e^{-L\, t} \int_0^t |K(t,\, s,\, h(s)) - K(t,\, s,\, k(s))|\, ds \\
&\le L \max_{0 \le t \le T} e^{-L\, t} \int_0^t |h(s) - k(s)|\, ds \\
&= L \max_{0 \le t \le T} e^{-L\, t} \int_0^t e^{L\, s}\, e^{-L\, s} |h(s) - k(s)|\, ds \\
&\le L\, \langle h - k \rangle \max_{0 \le t \le T} e^{-L\, t} \int_0^t e^{L\, s}\, ds \\
&= L\, \langle h - k \rangle \max_{0 \le t \le T} e^{-L\, t} \frac{e^{L\, t} - 1}{L} \\
&\le (1 - e^{-L\, T})\, \langle h - k \rangle,
\end{aligned}$$

za bilo kakve $h,\, k \in E$. Budući da je $1 - e^{-L\, T} < 1$, zaključujemo da je funkcija F kontrakcija pa nam Banachov teorem o fiksnoj točki osigurava prije svega postojanje jedinstvene fiksne točke u za F a zatim i tvrdnju da niz iteracija $\{\, u_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ opisan u iskazu teorema uniformno konvergira u normi $\langle \cdot \rangle$ i zato također i u njoj uniformno ekvivalentnoj sup-normi $\| \cdot \|$ prema toj fiksnoj točki. $\square$

Primjetimo da kada bi smo u prethodnom dokazu umjesto norme $\langle \cdot \rangle$ koristili njoj uniformno ekvivalentnu sup-normu $\| \cdot \|$, onda bi funkcija

F bila kontrakcija jedino ako bi se promatrala kao funkcija prostora $C([0,\, S])$ u sebe gdje je $S \le \min\{\, T,\, \frac{1}{L}\, \}$. Dakle, ako je $T > \frac{1}{L}$ onda nam Banachov teorem o fiksnoj točki primjenjen na uobičajenu sup-normu osigurava jedinstveno rješenje samo na nekom podintervalu od $[0,\, T]$ dok smo modifikacijom norme uspjeli zaključiti da jedinstveno rješenje postoji na čitavom intervalu $[0,\, T]$.

stranica sadrži $\boxed{5}$

Teorem 17.2. *Ako za funkciju $f : [0,\, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji pozitivan realan broj L takav da je*

$$|f(s,\, x) - f(s,\, y)| \;\le\; L\, |x - y|$$

za sve $s \in [0,\, T]$ i sve $x,\, y \in \mathbb{R}$, onda diferencijalna jednadžba s početnim uvjetom

$$\frac{dh}{ds} = f(s,\, h), \qquad h(0) = 0,$$

ima točno jedno rješenje h definirano na čitavom intervalu $[0,\, T]$.

Dokaz. Stavimo li u prethodnom teoremu $K(t, s, x) = f(s, x)$ i $v(t) = 0$, Volterrina jednadžba postaje

$$u(t) = \int_0^t f(s,\, u(s))\, ds.$$

Kako je derivacija određenog integrala funkcije po njegovoj promjenjivoj gornjoj granici jednaka podintegralnoj funkciji jasno je da će svako rješenje te integralne jednadžbe biti rješenje zadane diferencijalne jednadžbe sa danim početnim uvjetom. □

.... $\boxed{5}$ ....

18. Neprekidne funkcije

18.1. Definicija. Da bi neka funkcija bila neprekidna mora preslikavati bliske točke domene u bliske točke kodomene. Pri tome se u metričkim prostorima pojam bliskosti uvodi zahtjevom da udaljenost točaka bude neki relativno mali pozitivan realan broj. U općenitijim topološkim prostorima nemamo udaljenosti i relnih brojeva već se bliskost mjeri otvorenim skupovima.

Definicija 18.1. Neka su $(X,\, \mathcal{T})$ i $(Y,\, \mathcal{S})$ topološki prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako je $f^{-1}(V)$ okolina od x_0 u prostoru X za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u prostoru Y. Ako funkcija f nije neprekidna u točki x_0 onda kažemo da je prekidna ili diskontinuirana u točki x_0. Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene. Umjesto riječi "neprekidna funkcija" često se koristi riječ "preslikavanje". Iako to nije bitno skraćenje u engleskom jeziku se koristi "continuous function" za "neprekidna funkcija" i mnogo krače "map" za "preslikavanje".

Lagano se provjerava da se uvjet "ako je $f^{-1}(V)$ okolina od x_0 u prostoru X za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u prostoru Y" iz gornje definicije može zamijeniti bilo kojim od slijedećih uvjeta:

(1) f je neprekidna u $x_0 \in X \Longleftrightarrow$ za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u Y postoji okolina U od x_0 u X takav da je $f(U) \subset V$.

(2) f je neprekidna u $x_0 \in X \Longleftrightarrow$ za svaku okolinu V od $f(x_0)$ u Y iz neke baze okolina $b(f(x_0), Y)$ postoji okolina U od x_0 u X iz neke baze okolina $b(x_0, X)$ takva da je $f(U) \subset V$.

Tvrdnja (2) pokazuje da je neprekidnost dovoljno provjeriti samo za elemente baza okolina točke i njene slike. U slučaju kada su X i Y metrički prostori onda za te baze možemo uzeti familije

$$\{ K(f(x_0), \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \}$$

$$\{ K(x_0, \delta) \mid \delta > 0 \}$$

svih otvorenih kugli s centrima u $f(x_0)$ odnosno u x_0. Dakle, u tome slučaju ekvivalencija (2) povlači.

Teorem 18.1. *Neka su (X, d) i (Y, ϱ) bilo kakvi metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da relacije $x \in X$ i $d(x, x_0) < \delta$ imaju za posljedicu relaciju $\varrho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

U posebnom slučaju kada su oba X i Y realni pravac $\mathbb{R}$ sa standardnom metrikom induciranom funkcijom apsolutne vrijednosti onda imamo za posljedicu slijedeći korolar.

Korolar 18.1. *Realna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da iz $x \in \mathbb{R}$ i $|x - x_0| < \delta$ slijedi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Promatrajmo njihov (direktni) produkt $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$. Onda se funkcije $p : X \times Y \to X$ i $q : X \times Y \to Y$ definirane formulama $p(x, y) = x$ i $q(x, y) = y$ za sve $(x, y) \in X \times Y$ nazivaju se projekcijama (produkta $X \times Y$ na njegove faktore X i Y redom).

Propozicija 18.1. *Projekcije p i q produkta $X \times Y$ na njegove faktore X i Y su neprekidne funkcije.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je projekcija p produkta $X \times Y$ na prvi faktor X neprekidna funkcija jer je argument za drugu projekciju q potpuno analogan.

Neka je (x_0, y_0) bilo koja točka iz produkta $X \times Y$ i neka je U bilo koja okolina njene slike $x_0 = p(x_0, y_0)$ u prostoru X. Budući da je $p^{-1}(U) = U \times Y$ očito okolina točke (x_0, y_0) u produktu $X \times Y$, slijedi da je projekcija p doista neprekidna funkcija. $\square$

Zadatak 18.1. Neka je X realni normirani linearni prostor. Dokaži da su neprekidne slijedeće funkcije:

- zbrajanje vektora $s : X \times X \to X$ dano sa $s(x, y) = x + y$ za sve $x, y \in X$.
- množenje vektora $m_\lambda : X \to X$ čvrstim skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ dano pravilom $m_\lambda(x) = \lambda\, x$ za svaki $x \in X$.

Rješenje. □

Linearni topološki prostor je skup koji je snabdjeven strukturom linearnog prostora i strukturom topološkog prostora s time da su te dvije strukture usklađene tj. operacije definirane u linearnom prostoru (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) su neprekidne funkcije. Iz prethodnog zadatka odmah slijedi: Svaki realni normirani linearni prostor je primjer linearnog topološkog prostora.

Zadatak 18.2. Prisjetimo se da je algebra linearni prostor X u kojem je još definirano i množenje vektora $(x, y) \to x\, y$ koje ima slijedeća tri svojstva za sve $x, y, z \in X$ i sve skalare λ:

- (kvaziasocijativnost) $(\lambda\, x)\, y = \lambda\, (x\, y) = x\, (\lambda\, y)$.
- (desna distributivnost prema zbrajanju) $(x + y)\, z = x\, z + y\, z$.
- (lijeva distributivnost prema zbrajanju) $x\, (y + z) = x\, y + x\, z$.

Uz dodatne uvjete na množenje algebra dobiva atribute: asocijativna, s jedinicom, komutativna, itd.

Normirana algebra je asocijativna algebra X definirana na normiranom linearnom prostoru s time da norma poštuje uvjet:

$$\| x\, y \| \leq \| x \| \, \| y \|$$

za sve $x, y \in X$.

Banachova algebra je normirana algebra definirana na Banachovom prostoru.

Dokaži: množenje vektora u svakoj normiranoj algebri (posebno i u svakoj Banachovoj algebri) je neprekidna funkcija.

Rješenje. □

18.2. Osnovna svojstva; Kategorijalnost.

Teorem 18.2. *Identična funkcija $id_X : X \to X$ na topološkom prostoru X je neprekidna funkcija. Kompozicija $g \circ f : X \to Z$ bilo koje dvije neprekidne funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ među topološkim prostorima je neprekidna funkcija.*

Dokaz. Tvrdnja o tome da je identična funkcija neprekidna je očigledno istinita. Za dokaz tvrdnje o kompoziciji, pretpostavimo da je x bilo koja točka prostora X i da je W bilo koja okolina točke $(g \circ f)(x)$ u prostoru Z.

Jer je funkcija g neprekidna u točki $f(x)$, skup $g^{-1}(W)$ je okolina od $f(x)$ u prostoru Y. Sada možemo iskoristiti neprekidnost funkcije f u točki x da zaključimo da je skup $f^{-1}(g^{-1}(W))$ okolina od x u prostoru X. Budući da je $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ vidimo da je

$(g\circ f)^{-1}(W)$ okolina od x u prostoru X. Znači, pokazali smo da je kompozicija $g\circ f$ neprekidna funkcija u točki x. Kako je x proizvoljna točka prostora X slijedi da je $g\circ f$ neprekidna funkcija. □

KOROLAR 18.2. *Topološki prostori kao objekti i neprekidne funkcije kao morfizmi čine jednu kategoriju koja se zove topološka kategorija i obično piše sa* $\mathcal{TOP}$.

TEOREM 18.3. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Onda je funkcija* f *neprekidna onda i samo onda ako za svaku mrežu* $\sigma : D \to X$ *u* X *koja konvergira prema nekoj točki* $x_0 \in X$ *mreža* $f\circ\sigma : D \to Y$ *konvergira u prostoru* Y *prema točki* $f(x_0)$.

DOKAZ. ($\Longrightarrow$). Neka je V bilo koja okolina točke $f(x_0)$ u prostoru Y. Jer je funkcija f neprekidna u točki x_0, postoji okolina U od x_0 u prostoru X takva da je $f(U)\subset V$. Pretpostavka da $\sigma\to x_0$ povlači da postoji element $d\in D$ takav da je $\sigma_e \in U$ za svaki $e \geq d$ iz usmjerenog skupa D. Dakle, za svaki takav element $e\in D$ vrijedi $f(\sigma_e) = (f\circ\sigma)_e \in V$ što znači da $f\circ\sigma \to f(x_0)$.

($\Longleftarrow$). Pretpostavimo suprotno tj. da funkcija f nije neprekidna. Onda mora postojati neka točka x_0 u prostoru X i bar jedna okolina V točke $f(x_0)$ u prostoru Y takva da je za svaku okolinu U točke x_0 u prostoru X moguće naći najmanje jedan element $x_U\in U$ sa svojstvom da $f(x_U)\notin V$. Neka nam D bude kratka oznaka za usmjeren skup $n(x_0, X)$ svih okolina točke x_0 u prostoru X sa izvrnutom inkluzijom kao usmjerenjem. Pravilom $\sigma(U) = x_U$ za svaki $U\in D$ definirana je mreža $\sigma : D\to X$. Pri tome očigledno $\sigma\to x_0$. S druge strane mreža $f\circ\sigma$ ne konvergira prema točki $f(x_0)$ jer se svi njezini članovi nalaze izvan njene okoline V. Ali, postojanje takve mreže σ protivi se našoj pretpostavci pa funkcija f mora biti neprekidna. □

Slijedeći teorem pokazuje da za metričke prostore vrijedi verzija prethodnog teorema gdje se umjesto mreža koriste jednostavniji i mnogo poznatiji nizovi. Ta karakterizacija neprekidnosti funkcija među metričkim prostorima pripisuje se njemačkom matematičaru Heineu.

TEOREM 18.4. *Neka su* (X, d) *i* (Y, ϱ) *metrički prostori. Funkcija* $f : X\to Y$ *je neprekidna onda i samo onda ako za svaki niz* $\sigma : \mathbb{N}\to X$ *u* X *koji konvergira prema nekoj točki* $x_0\in X$ *niz* $f\circ\sigma : \mathbb{N}\to Y$ *konvergira u prostoru* Y *prema točki* $f(x_0)$.

DOKAZ. ($\Longrightarrow$). Ova implikacija slijedi iz prethodnog teorema jer je svaki niz mreža.

($\Longleftarrow$). Pretpostavimo suprotno tj. da funkcija f nije neprekidna. Onda mora postojati neka točka x_0 u prostoru X i bar jedna okolina V točke $f(x_0)$ u prostoru Y takva da je za svaku okolinu U točke x_0 u prostoru X moguće naći najmanje jedan element $x_U\in U$ sa svojstvom da $f(x_U)\notin V$. U posebnom, za svaki prirodan broj n postoji točka

$x_n \in K(x_0, \frac{1}{n})$ (iz otvorene kugle sa središtem u točki x_0 i radijusom $\frac{1}{n}$) takva da $f(x_n) \notin V$. Pravilom $\sigma(n) = x_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiran je niz $\sigma : \mathbb{N} \to X$. Pri tome očigledno $\sigma \to x_0$. S druge strane niz $f \circ \sigma$ ne konvergira prema točki $f(x_0)$ jer se svi njegovi članovi nalaze izvan njene okoline V. Ali, postojanje takvog niza σ protivi se našoj pretpostavci pa funkcija f mora biti neprekidna. □

Zadatak 18.3. Ako se neprekidne funkcije f i g topološkog prostora X u Hausdorffov topološki prostor Y podudaraju na gustom podskupu A od X onda se one podudaraju u svim točkama domene X.

Rješenje. Neka je $x_0 \in X$. Dovoljno je vidjeti da je $f(x_0) = g(x_0)$.

Jer je podskup A gust u prostoru X postoji mreža $\sigma : D \to A$ takva da $\sigma \to x_0$. Budući da se funkcije f i g podudaraju na skupu A mreže $f \circ \sigma$ i $g \circ \sigma$ se podudaraju. Ali, jer su f i g neprekidne funkcije mora $f \circ \sigma \to f(x_0)$ i $g \circ \sigma \to g(x_0)$. Sada na kraju iskoristimo činjenicu da u Hausdorffovom prostoru mreže imaju jedinstveni limes da dođemo do željenog zaključka da je $f(x_0) = g(x_0)$. □

18.3. Karakterizacije neprekidnosti.

Teorem 18.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ za svaki $V \in \mathcal{S}$ tj. ako i samo ako je potpuna praslika bilo kojeg otvorenog skupa u kodomeni otvoreni skup u domeni.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$). Neka je $V \in \mathcal{S}$ i neka je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Kako je V okolina točke $f(x_0)$ i funkcija f je neprekidna u x_0, sigurno postoji okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U) \subset V$. Dakle, $U \subset f^{-1}(V)$ pa je $f^{-1}(V)$ okolina točke x_0 kao nadskup okoline U. Prema tome $f^{-1}(V)$ je okolina svake svoje točke i stoga je otvoren skup tj. $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$.

($\Longleftarrow$). Neka je $x_0 \in X$ i neka je V okolina točke $f(x_0)$ u prostoru Y. Po pretpostavci $f^{-1}(Int(V))$ je otvorena okolina točke x_0 u prostoru X. Ali, onda je i njen nadskup $f^{-1}(V)$ također okolina točke x_0 pa je f neprekidna funkcija. □

Teorem 18.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}(G)$ zatvoren podskup prostora X za svaki zatvoreni podskup G prostora Y tj. ako i samo ako je potpuna praslika bilo kojeg zatvorenog skupa u kodomeni zatvoreni skup u domeni.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$). Neka je G zatvoreni podskup prostora Y. Njegov komplement $Y \backslash G$ je otvoreni podskup prostora Y i jer je f neprekidna funkcija prethodni teorem povlači da je skup $f^{-1}(Y \backslash G) = X \backslash f^{-1}(G)$ otvoren u prostoru X. Zato je potpuna praslika $f^{-1}(G)$ zatvoreni podskup prostora X.

($\Longleftarrow$). Neka je $x_0 \in X$ i neka je V okolina točke $f(x_0)$ u prostoru Y. Po pretpostavci $f^{-1}(Y \backslash Int(V)) = X \backslash f^{-1}(Int(V))$ je zatvoreni podskup prostora X. Zato je $f^{-1}(Int(V))$ otvorena okolina točke x_0 u prostoru X. Ali, onda je i njen nadskup $f^{-1}(V)$ također okolina točke x_0 pa je f neprekidna funkcija. $\square$

TEOREM 18.7. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori. Funkcija* $f : X \to Y$ *je neprekidna ako i samo ako za svaki podskup* A *prostora* X *vrijedi inkluzija* $f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$.

DOKAZ. ($\Longrightarrow$). Neka je A podskup prostora X. Skup $Cl(f(A))$ je zatvoreni podskup prostora Y. Iz prethodnog teorema slijedi da je skup $f^{-1}(Cl(f(A)))$ zatvoreni podskup prostora X. Taj podskup očigledno sadrži skup A zato jer je $f(A) \subset Cl(f(A))$. Budući da je $Cl(A)$ najmanji zatvoreni nadskup od A mora biti $Cl(A) \subset f^{-1}(Cl(f(A)))$. Dakle, pogledamo li slike tih skupova u prostoru Y, imamo traženu inkluziju $f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$.

($\Longleftarrow$). Neka je G zatvoreni podskup prostora Y. Ako pokažemo da je skup $f^{-1}(G)$ zatvoren u prostoru X onda će iz prethodnog teorema slijediti da je f neprekidna funkcija.

Iz pretpostavki dobivamo

$$f(Cl(f^{-1}(G))) \subset Cl(f(f^{-1}(G))) = Cl(G) = G$$

pa je $Cl(f^{-1}(G)) \subset f^{-1}(G)$. Kako uvijek vrijedi $f^{-1}(G) \subset Cl(f^{-1}(G))$ zaključujemo da je $Cl(f^{-1}(G)) = f^{-1}(G)$ tj. da je $f^{-1}(G)$ zatvoreni podskup prostora X. $\square$

ZADATAK 18.4. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna rastuča funkcija. Dokažite da ako za neki podskup A od $\mathbb{R}$ postoji $\inf A$ onda postoji i $\inf f(A)$ i vrijedi $f(\inf A) = \inf f(A)$. Analogna tvrdnja za supremum je također istinita.

RJEŠENJE. Neka je $a = \inf A$ i neka je $b = f(a)$. Moramo pokazati da je $b = \inf f(A)$.

Za svaki $x \in A$ vrijedi $a \leq x$ što povlači $b \leq f(x)$ jer je funkcija f rastuča. Dakle, b je donja međa skupa $f(A)$. Da bi smo provjerili da je b najveća donja međa od $f(A)$, moramo dokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji točka b_ε iz skupa $f(A)$ takva da je $b \leq b_\varepsilon < b + \varepsilon$.

Neka je realan broj $\varepsilon > 0$ zadan. Budući da je funkcija f neprekidna u točki a postoji realan broj $\delta > 0$ takav da $x \in \mathbb{R}$ i $|x - a| < \delta$ povlače $|f(x) - b| < \varepsilon$. Jer je $a = \inf A$, postoji točka $a_\delta \in A$ takva da je $a \leq a_\delta < a + \delta$. Neka je $b_\varepsilon = f(a_\delta)$. $\square$

18.4. Homeomorfizmi. Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Bijekciju $f : X \to Y$ nazivamo homeomorfizam ako ona poštuje topološke strukture tj. ako vrijedi:

- $f(U) \in \mathcal{S}$ za svaki $U \in \mathcal{T}$,
- $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ za svaki $V \in \mathcal{S}$.

Sada ćemo homeomorfizme karakterizirati u terminima neprekidnih funkcija. Prisjetimo se da je $id_X : X \to X$ oznaka za identičnu funkciju na skupu X definiranu pravilom $id_X(x) = x$ za svaki $x \in X$.

Teorem 18.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je homeomorfizam onda i samo onda ako je f neprekidna funkcija i postoji neprekidna funkcija $g : Y \to X$ takva da je $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$). Ako je f homeomorfizam, onda je f bijekcija pa sigurno postoji funkcija $g = f^{-1} : Y \to X$ takva da je $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$. Preostaje još pokazati da su f i g neprekidne funkcije.

Ako je V bilo koji otvoren skup u prostoru Y onda je po pretpostavci skup $f^{-1}(V)$ otvoren u prostoru X pa je prema Teoremu 18.5 funkcija f neprekidna.

Slično, ako je U bilo koji otvoren skup u prostoru X onda je po pretpostavci skup $g^{-1}(U) = f(U)$ otvoren u prostoru Y pa je ponovo prema Teoremu 18.5 funkcija g neprekidna.

($\Longleftarrow$). Iz jednakosti $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$ očigledno slijedi da je funkcija f bijekcija. Ako je U bilo koji otvoreni skup u prostoru X onda je $f(U) = g^{-1}(U)$ otvoreni podskup u prostoru Y jer je g neprekidna funkcija. Slično, ako je V bilo koji otvoreni skup u prostoru Y onda je $f^{-1}(V)$ otvoreni podskup u prostoru X jer je f neprekidna funkcija. $\square$

Prema tome imamo sada slijedeću alternativnu definiciju heomeomorfizma koju mnogi autori uzimaju kao izvornu definiciju tog pojma.

Korolar 18.3. *Funkcija $f : X \to Y$ među topološkim prostorima $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ je homeomorfizam ako i samo ako je f bijekcija i funkcije f i f^{-1} su neprekidne.*

Za topološke prostore X i Y kažemo da su homeomorfni i pišemo $X \cong Y$ ako postoji najmanje jedan homeomorfizam $f : X \to Y$ prostora X na prostor Y.

Primjetimo da je binarna relacija $\cong$ (homeomorfnosti prostora) relacija ekvivalencije koja klasificira topološke prostore na u parovima disjunktne klase međusobno homeomorfnih prostora koji su sa apstraktnog stanovišta jednaki i mogu se razlikovati jedino u prirodi elemenata.

Postavlja se prirodno pitanje da li je u Korolaru 18.3 potrebno zahtijevati da funkcija f^{-1} bude neprekidna ili se to može dokazati kao posljedica samo činjenice da je f neprekidna bijekcija. Slijedeći primjer pokazuje da se bez dodatnih pretpostavki o prostorima X i Y taj zahtjev ne može ispustiti.

Primjer 18.1. Neka je X segment $[0, 1)$ i neka je Y kružnica

$$S^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}.$$

Definirajmo funkciju $f : X \to Y$ pravilom

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

za svaki $t \in X$. Funkcija f ostvaruje namatanje poluotvorenog segmenta X na kružnicu Y. Očigledno je f neprekidna bijekcija ali njen inverz f^{-1} nije neprekidna funkcija jer bliske točke kružnice (npr. $(1, 0)$ i $(\cos(2\pi(1-\frac{1}{n})), \sin(2\pi(1-\frac{1}{n})))$ za $n \in \mathbb{N}$) može preslikati u daleke točke segmenta (0 i $1-\frac{1}{n}$ redom).

18.5. Uniformna neprekidnost.

Definicija 18.2. Za funkciju $f : X \to Y$ među metričkim prostorima (X, d) i (Y, ϱ) kažemo da je uniformno ili jednoliko neprekidna na podskupu A od X ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da je za sve elemente $x, y \in A$ za koje je $d(x, y) < \delta$ ispunjeno $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Za funkciju koja je uniformna neprekidna na čitavoj domeni X kaže se da je uniformno neprekidna.

Uspredbom prethodne definicije sa definicijom neprekidne funkcije vidimo da je svaka uniformno neprekidna funkcija neprekidna funkcija. Naime, u definiciji neprekidnosti za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ i svaki element domene $x \in X$ se traži postojanje realnog broja $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ (koji ovisi od točke x i od broja ε) tako da za svaki $y \in X$ iz $d(x, y) < \delta$ slijedi $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ dok se u definiciji uniformne neprekidnosti za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ traži postojanje realnog broja $\delta = \delta(\varepsilon)$ (koji ovisi samo od broja ε) tako da za sve točke $x, y \in X$ iz $d(x, y) < \delta$ slijedi $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Slijedeći primjer pokazuje da obrat gornje tvrdnje ne vrijedi tj. da postoje neprekidne funkcije koje nisu uniformno neprekidne.

Primjer 18.2. Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dana pravilom $f(x) = \frac{1}{x}$ za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je neprekidna funkcija (kao kvocijent neprekidnih funkcija od kojih ona u nazivniku nikada nije nula) koja nije uniformno neprekidna funkcija. I doista, uzmemo li za ε broj $\frac{1}{2}$ onda za svaki realan broj $\delta > 0$ možemo naći prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \delta$. Slijedi da su $x = \frac{1}{n}$ i $y = \frac{1}{n+1}$ dvije točke iz domene funkcije f za koje vrijedi $d(x, y) < \delta$ i

$$\varrho(f(x), f(y)) = |(n+1) - n| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Zato f ne može biti uniformno neprekidna funkcija jer je uvjet iz definicije za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ neostvariv.

Naš slijedeći teorem pokazuje da uniformno neprekidne funkcije čuvaju Cauchyjeve nizove. Ranije smo vidjeli da neprekidne funkcije čuvaju konvergentne nizove. Primjetimo da one ne moraju čuvati Cauchyjeve nizove jer je $\{\frac{1}{n}\}$ Cauchyjev niz u domeni neprekidne funkcije f iz prethodnog primjera ($f(x) = \frac{1}{x}$) čija slika $\{n\}$ nije Cauchyjev niz u kodomeni.

Teorem 18.9. *Neka je $f : X \to Y$ uniformno neprekidna funkcija među metričkim prostorima (X, d) i (Y, ϱ). Za svaki Cauchyjev niz*

$\sigma : \mathbb{N} \to X$ u prostoru X je kompozicija $f \circ \sigma : \mathbb{N} \to Y$ Cauchyjev niz u prostoru Y.

Dokaz. Neka je realan broj $\varepsilon > 0$ zadan. Mi moramo pokazati da postoji prirodan broj i_0 takav da je $\varrho((f \circ \sigma)_i, (f \circ \sigma)_j) < \varepsilon$ za sve prirodne brojeve $i, j \geq i_0$.

Prvo iskoristimo pretpostavku da je f uniformno neprekidna funkcija da odaberemo realan broj $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in X$ iz relacije $d(x, y) < \delta$ slijedi relacija $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Zatim iskoristimo pretpostavku da je σ Cauchyjev niz da bi smo našli traženi prirodan broj i_0 koji ima svojstvo da je $d(\sigma_i, \sigma_j) < \delta$ za sve prirodne brojeve $i, j \geq i_0$.

Sada je jasno da za sve prirodne brojeve $i, j \geq i_0$ vrijedi

$$\varrho((f \circ \sigma)_i, (f \circ \sigma)_j) = \varrho(f(\sigma_i), f(\sigma_j)) < \varepsilon.$$

□

Teorem 18.10. *Neka je A gusti podskup metričkog prostora (X, d). Neka je $f : A \to Y$ uniformno neprekidna funkcija sa podskupa A u potpun metrički prostor (Y, ϱ). Onda postoji samo jedna uniformno neprekidna funkcija $g : X \to Y$ koja proširuje funkciju f tj. za koju vrijedi $g(x) = f(x)$ za svaki $x \in A$.*

Dokaz. Jer je podskup A gust u metričkom prostoru X za svaku točku $x \in X$ postoji niz $\sigma\langle x\rangle : \mathbb{N} \to A$ takav da $\sigma\langle x\rangle \to x$. Očigledno je $\sigma\langle x\rangle$ Cauchyjev niz u prostoru X. Kako je funkcija f uniformno neprekidna, prema prethodnom teoremu slijedi da je $f \circ \sigma\langle x\rangle$ Cauchyjev niz u prostoru Y. Budući da je Y potpun metrički prostor postoji točka $y\langle x, \sigma\rangle \in Y$ takva da $f \circ \sigma\langle x\rangle \to y\langle x, \sigma\rangle$. Sada definiramo $g(x) = y\langle x, \sigma\rangle$ za svaki $x \in X$.

Ova definicija je korektna tj. ne ovisi od izbora Cauchyjevog niza σ jer ako je τ neki drugi niz u A koji također konvergira prema istoj točki x onda su ti nizovi ekvivalentni u smislu da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj i takav da je $d(\sigma_j, \tau_j) < \varepsilon$ za sve prirodne brojeve $j \geq i$. Jer se lagano dokazuje da uniformno neprekidna funkcija preslikava ekvivalentne nizove u ekvivalentne nizove i jer dva ekvivalentna niza konvergiraju k istoj točki slijedi da je $y\langle x, \sigma\rangle = y\langle x, \tau\rangle$.

Ovaj argument također povlači da se na potprostoru A funkcija g podudara sa funkcijom f (za niz σ možemo uzeti konstantan niz u x ako je točka x iz A) a i da je funkcija g jednoznačno određena.

Preostaje provjeriti da je g uniformno neprekidna funkcija. Neka je realan broj $\varepsilon > 0$ zadan. Jer je f uniformno neprekidna funkcija, postoji realan broj $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in A$ iz relacije $d(x, y) < \delta$ slijedi relacija $\varrho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Promatrajmo sada točke $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$. Odaberimo nizove $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to A$ takve da $\sigma \to x$ i $\tau \to y$. Znamo da vrijedi $f \circ \sigma \to g(x)$ i $f \circ \tau \to g(y)$. Zato postoji prirodan broj i sa svojstvom da je $\varrho(f(\sigma_j), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ i $\varrho(f(\tau_j), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki prirodan broj $j \geq i$. Sada iskoristimo konvergencije $\sigma \to x$ i $\tau \to y$ da odaberemo prirodan broj $j \geq i$ takav da je $d(\sigma_j, \tau_j) < \delta$. Upotrebom nejednakosti trokuta i naših odabira imamo

$$\begin{aligned}\varrho(g(x), g(y)) \leq \varrho(g(x), f(\sigma_j)) + \varrho(f(\sigma_j), f(\tau_j)) + \\ + \varrho(f(\tau_j), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Korolar 18.4. *Svaki normirani realni linearni prostor X je gust potprostor nekog Banachovog prostora Y. Taj prostor Y je upotpunjenje polaznoga prostora X i jedinstven je (do na izomorfizam).*

Dokaz. Neka je par $((Y, \varrho), h)$ upotpunjenje normiranog linearnog prostora $(X, \| \|)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je X gusti podskup od Y i da je izometrija $h : (X, d_{\| \|}) \to (Y, \varrho)$ inkluzija, gdje je $d_{\| \|}$ metrika na X inducirana normom $\| \|$. Sada ćemo upotrebom prethodnog teorema definirati operacije zbrajanja vektora i množenja vektora realnim brojem i normu kojima će Y postati traženi Banachov prostor.

Neka je $z : X \times X \to X$ operacija zbrajanja vektora u linearnom prostoru X. Onda je $X \times X$ gusti podskup od $Y \times Y$ pa se po prethodnom teoremu kompozicija $h \circ z$ zbrajanja z i inkluzije h na jedinstveni način dade proširiti do uniformno neprekidne funkcije $Z : Y \times Y \to Y$. Način na koji smo definirali to proširenje pomoću nizova u $X \times X$ ima za posljedicu da sva svojstva zbrajanja vektora ima i proširena funkcija Z. Potpuno analogno se postupa s uvođenjem množenja vektora realnim brojem i norme u prostor Y. Dakle, Y je Banachov prostor. □

Korolar 18.5. *Svaki unitarni realni linearni prostor X je gust potprostor nekog Hilbertovog prostora Y. Taj prostor Y je upotpunjenje polaznoga X i jedinstven je (do na izomorfizam).*

Dokaz. Ovaj korolar se dokazuje slično kao i prethodni za normirane prostore. □

19. Povezanost

Svojstvo povezanosti koje ćemo promatrati u ovom poglavlju, grubo rečeno, opisuje prostore koji se sastoje od jednog dijela za razliku od onih prostora koji se sastoje od više dijelova koji su daleko jedan od drugoga slično diskretnim prostorima poput prostora prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Definicija 19.1. Kažemo da je topološki prostor X *povezan* ako ne postoje dva neprazna, disjunktna, i otvorena podskupa od X koji ga zajedno prekrivaju.

Teorem 19.1. *Za bilo koji topološki prostor X slijedeći uvjeti su ekvivalentni:*

(1) *Prostor X je povezan.*
(2) *U prostoru X ne postoje dva neprazna, disjunktna, i zatvorena podskupa koji ga zajedno prekrivaju.*
(3) *Prazan skup $\emptyset$ i čitav prostor X su jedini podskupovi od X koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.*
(4) *Ako je X unija razdvojenih podskupova A i B (tj. ako je $X = A \cup B$ i $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$), onda je A ili B prazan skup.*
(5) *Svaka neprekidna funkcija $f : X \to D$ prostora X u diskretan prostor na dvočlanom skupu $D = \{0, 1\}$ je konstantna.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Kad bi u prostoru X postojala dva neprazna, disjunktna, i zatvorena podskupa F i G koji ga zajedno prekrivaju onda bi njihovi komplementi G i F bila dva neprazna, disjunktna, i otvorena podskupa koji bi zajedno prekrivali prostor X što se protivi našoj pretpostavci.

(2) $\Rightarrow$ (3). Kad bi u prostoru X postojao podskup F koji je istovremeno otvoren i zatvoren i koji se razlikuje od praznog skupa i od čitavog prostora X, onda bi F i njegov komplement $X \setminus F$ bila dva neprazna, disjunktna, i zatvorena podskupa koji bi zajedno prekrivali prostor X što se protivi našoj pretpostavci.

(3) $\Rightarrow$ (4). Neka je X prikazan kao unija razdvojenih podskupova A i B. Onda je $\overline{A} \subset X \setminus B \subset A$ pa slijedi da je $A = \overline{A}$. Zato je A zatvoren. Slično je i B isto zatvoren. Jer su A i B zatvoreni i disjunktni, oni su također otvoreni pa prema (3) bar jedan od njih mora biti prazan.

(4) $\Rightarrow$ (5). Pretpostavimo da postoji neka neprekidna i nekonstantna funkcija $f : X \to D$ prostora X na diskretan prostor na dvočlanom skupu $D = \{0, 1\}$. Onda su skupovi $A = f^{-1}(0)$ i $B = f^{-1}(1)$ neprazni, razdvojeni, i prekrivaju X. Ali, postojanje takvih podskupova onemogućuje naša pretpostavka.

(5) $\Rightarrow$ (1). Ova implikacija slijedi iz činjenice da ako (1) ne vrijedi (tj. ako se prostor X može prekriti sa dve disjunktna, neprazna

otvorena skupa A i B), onda je pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in B \\ 0, & \text{ako je } x \in A, \end{cases}$$

definirana neprekidna nekonstantna funkcija sa X na D. $\square$

Korolar 19.1. *Svaki povezani potpuno regularan prostor s najmanje dva elementa ima najmanje toliko elemenata koliko ima realnih brojeva.*

Dokaz. Neka je X povezani potpuno regularan prostor i neka su x_1 i x_2 njegove dvije različite točke. Jer je potpuno regularan prostor po definiciji T_1-prostor, vidimo da sigurno postoji neprekidna funkcija f od X u jedinični segment I takva da je $f(x_1) = 0$ i $f(x_2) = 1$. Tvrdimo da je f surjekcija.

I doista, kad bi postojao broj ξ, veći od 0 i manji od 1, koji nije u skupu vrijednosti funkcije f, onda bi $A = f^{-1}([0, \xi))$ i $B = f^{-1}((\xi, 1])$ bila dva disjunktna, neprazna, otvorena podskupa od X koji prekrivaju prostor X što se protivi našoj pretpostavci.

Dakle, f je surjekcija tako da u prostoru X ima najmanje onoliko točaka koliko ima realnih brojeva u jediničnom segmentu. $\square$

Teorem 19.2. *Jedinični zatvoreni segment $I = [0, 1]$ je povezan.*

Dokaz. Kad prostor I ne bi bio povezan, onda bi postojala dva neprazna, disjunktna, otvorena njegova podskupa A i B koji ga prekrivaju. Možemo pretpostaviti da je $0 \in A$. Označimo sa S skup svih t iz I takvih da A prekriva segment $[0, t]$. Primjetimo da skup S sigurno nije prazan jer je početak 0 svakako u S budući da A prekriva 0 pa zato i segment $[0, 0]$.

Budući da je S neprazan i omeđen (jer je podskup omeđenog skupa I), prema svojstvu neprekidnosti realnih brojeva on ima supremum $s \in I$.

Element s mora ležati u jednom od skupova A ili B jer oni u uniji daju čitav segment I.

Pretpostavimo prvo da je $s \in A$ i da je $s < 1$. Kako je A otvoren skup i s je supremum skupa S sigurno postoje $\varepsilon > 0$ i $t \in S$ takvi da je $s - \varepsilon < t \leq s < s + \varepsilon < 1$ i $(s - 2\,\varepsilon, s + 2\,\varepsilon) \subset A$. Jer je $[0, t] \subset A$, slijedi da je $[0, s + \varepsilon] \subset A$ što se protivi definiciji broja s. Dakle, ako je $s \in A$ onda mora biti $s = 1$. Ali, za $s = 1$, ponavljanjem gornjeg zaključivanja vidimo da postoje $\varepsilon > 0$ i $t \in S$ takvi da je $1 - \varepsilon < t \leq 1$ i $(1 - \varepsilon, 1] \subset A$. Jer je ponovo $[0, t] \subset A$, slijedilo bi kao i ranije da je $[0, 1] \subset A$ što bi vodilo na zaključak da je $B = \emptyset$. Vidimo da broj s ni u kom slučaju ne može biti u skupu A.

S druge strane, ako je $s \in B$, onda jer je B također otvoren, postoje $\varepsilon > 0$ i $t \in S$ takvi da je $0 < s - \varepsilon < t \leq s$ i interval $(s - 2\,\varepsilon, s + 2\,\varepsilon)$

je podskup od B. Kako je opet $[0,\, t] \subset A$, slijedilo bi da je broj $s - \varepsilon$ istovremeno u oba A i B što je nemoguće jer su ti skupovi disjunktni.

Tako smo se uvjerili da supremum s skupa S ne može biti niti u A niti u B. To je očigledna kontradikcija, pa je naša pretpostavka da jedinični segment I nije povezan lažna, tj. I je doista povezan. $\square$

TEOREM 19.3. *Neprekidne funkcije čuvaju povezanost. Točnije, ako je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija povezanog prostora X na prostor Y, onda je kodomena Y također povezana.*

DOKAZ. (Prvi). Kada kodomena Y ne bi bila povezana, mogli bi smo naći otvorene, neprazne, i disjunktne njene podskupove A i B takve da je $Y = A \cup B$. Jer je funkcija f neprekidna surjekcija $C = f^{-1}(A)$ i $D = f^{-1}(B)$ bi onda bili otvoreni, neprazni, i disjunktni podskupovi od X takvi da je $X = C \cup D$. Ali, takav rastav prostora X nije moguć budući da je on povezan. $\square$

DOKAZ. (Drugi). Kada kodomena Y ne bi bila povezana, mogli bi smo naći neprekidnu surjekciju $g : Y \to \{0,\, 1\}$ prostora Y na dvočlani skup koji se sastoji od brojeva 0 (nula) i 1 (jedan). Onda bi kompozicija $g \circ f$ bila neprekidna surjekcija prostora X na $\{0,\, 1\}$. Tu smo koristili teoreme o tome da je kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna funkcija i da je kompozicija surjekcija ponovo surjekcija. Ali, takva surjekcija poput $g \circ f$ na prostoru X ne postoji budući da je on povezan. $\square$

PRIMJER 19.1. Sada ćemo opisati prebrojivi povezani Hausdorffov prostor. Prema Korolaru 19.1, povezani potpuno regularan prostor nemože biti prebrojiv, a lagano je vidjeti da isto vrijedi i za regularne prostore jer je svaki prebrojiv regularan prostor normalan i zato potpuno regularan.

Traženi prostor X ima za točke sve točke $(x,\, y)$ gornje poluravnine

$$\mathbb{R}^2_g = \{(x,\, y) : x,\, y \in \mathbb{R},\, y \geq 0\}$$

kojima su obje koordinate x i y racionalni brojevi. Skup X je očigledno prebrojiv.

Sada ćemo na skupu X opisati topologiju tako da opišemo bazu okolina svake točke u X.

Za bilo koju točku $A(a,\, b)$ gornje poluravnine, neka $A_1(a_1,\, 0)$ i $A_2(a_2,\, 0)$ budu točke na x-osi takve da je $a_1 < a_2$ i AA_1A_2 je jednakostraničan trokut (sve tri stranice jednake odnosno sva tri kuta jednaka). Ako je točka A na x-osi, onda uzimamo da je $A = A_1 = A_2$.

Neka je k prirodan broj i neka je $A(a,\, b)$ točka skupa X. Označimo sa $U_k(A)$ skup koji se sastoji od A i presjeka sa X unije otvorenih segmenata $(a_1 - \frac{1}{k},\, a_1 + \frac{1}{k})$ i $(a_2 - \frac{1}{k},\, a_2 + \frac{1}{k})$ na x-osi $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2_g :\, y = 0\}$ koju kao i u ovom dokazu obično identificiramo sa realnim pravcem.

Prema našem dogovoru, ako je točka $A(a, 0)$ na x-osi, onda je skup $U_k(A)$ presjek sa X otvorenog segmenta $(a - \frac{1}{k},\, a + \frac{1}{k})$ te osi.

Lagano se može provjeriti da kolekcija $\{U_k(A) \,:\, k \in \mathbb{N},\, A \in X\}$ zadovoljava četiri aksioma (BO1)–(BO4) baza okolina točaka tako da se njome na prirodan način na skupu X definira Hausdorffova topologija kojoj je ta kolekcija jedna od baza okolina točaka.

U toj topologiji zatvarač skupa $U_k(A)$ je skup svih onih točaka od X koje su od najmanje jednog od pravaca AA_1 i AA_2 udaljene ne više od broja $\frac{\sqrt{3}}{2\,k}$. Kada je A na x-osi, u opisu tog zatvarača moramo zamijeniti pravce AA_1 i AA_2 s pravcima točkom A koji sa x-osi zatvaraju kuteve od $\frac{\pi}{3}$ odnosno $\frac{2\pi}{3}$ radijana. Dakle, u oba slučaja, zatvarač skupa $U_k(A)$ je unija dviju beskonačnih traka širine $\frac{\sqrt{3}}{k}$ čije središnje zrake sa x-osi zatvaraju kuteve od $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{2\pi}{3}$ radijana.

Sada je jasno da se za bilo koje dvije točke A i B prostora X i za bilo kakve prirodne brojeve m i n zatvarači okolina $U_m(A)$ i $U_n(B)$ sijeku u nepraznom skupu. To svojstvo očigledno povlači da je prostor X povezan.

20. Operacije s povezanim prostorima

Očigledno je da potprostor povezanog prostora ne mora biti povezan. Na primjer, jedinični segment I je povezan, a on ima kao potprostor skup $D = \{0, 1\}$ krajeva koji nije povezan.

Teorem 20.1. *Potprostor C topološkog prostora X je povezan ako i samo ako za svaki par A i B razdvojenih podskupova od X koji u uniji daju C vrijedi $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je povezani potprostor C prostora X prikazan kao unija razdvojenih u X podskupova A i B. Drugim riječima, neka je $C = A \cup B$ gdje je $A \cap Cl_X(B) = \emptyset$, i $B \cap Cl_X(A) = \emptyset$. Kako je $Cl_C(A) = C \cap Cl_X(A)$ i $Cl_C(B) = C \cap Cl_X(B)$, vidimo da su skupovi A i B razdvojeni u C, pa iz Teorema 19.1 slijedi da je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$.

Obrnuto, ako potprostor C nije povezan, tada postoji par njegovih nepraznih disjunktnih zatvorenih podskupova A i B takvih da je $C = A \cup B$. Skupovi A i B su očigledno razdvojeni u X i pokazuju da uvjet iz iskaza teorema ne vrijedi. $\square$

Korolar 20.1. *Ako je potprostor C topološkog prostora X povezan, onda za svaki par njegovih razdvojenih podskupova A i B čija unija prekriva C vrijedi da je $C \subset A$ ili $C \subset B$.*

Dokaz. Skupovi $A \cap C$ i $B \cap C$ su razdvojeni u X i u uniji daju C. Iz prethodnog teorema slijedi da bar jedan od ta dva presjeka mora biti prazan pa će skup C biti sadržan u onom drugom presjeku. $\square$

Teorem 20.2. *Neka je X topološki prostor i neka je $\{C_j\}_{j\in J}$ familija povezanih podskupova od X. Ako postoji indeks $k \in J$ takav da skup C_k nije razdvojen od niti jednog od skupova C_j iz promatrane familije, onda je unija $\cup_{j\in J} C_j$ povezana.*

Dokaz. Neka je $C = \cup_{j\in J} C_j$. Pretpostavimo da je C unija razdvojenih u X podskupova A i B. Jer je C_k povezan, iz prethodnog korolara slijedi da je C_k sadržan u najmanje jednom od skupova A i B. Možemo uzeti da je $C_k \subset A$. Svaki drugi član C_j $(j \in J \setminus \{k\})$ također mora biti podskup bar jednog od skupova A i B, ali jer po pretpostavci nemože biti razdvojen od C_k (koji leži u A), zaključujemo da svi članovi C_j $(j \in J)$ leže u skupu A. Dakle, $C \subset A$ i $B = \emptyset$. $\square$

Korolar 20.2. *Neka je X topološki prostor. Ako familija $\{C_j\}_{j\in J}$ povezanih podskupova C_j od X ima neprazni presjek, onda je njezina unija $\cup_{j\in J} C_j$ isto povezana.*

Korolar 20.3. *Ako je C povezani podskup topološkog prostora X, onda su svi podskupovi B od X koji sadrže C i koji su sadržani u zatvaraču od C povezani.*

Dokaz. Ako podskup B zadovoljava $C \subset B \subset \overline{C}$ za neki povezani podskup C, onda familija $\{C\} \cup \{x\}_{x\in B}$ ispunjava uvjete Teorema 20.2 za $C_k = C$. $\square$

Korolar 20.4. *Prostor koji sadrži povezani gusti potprostor je i sam povezan.*

Korolar 20.5. *Prostor u kojem je svaki par točaka sadržan u povezanom potprostoru je i sam povezan.*

Dokaz. Neka je X prostor sa svojstvom iz iskaza teorema i neka je a njegova točka. Za bilo koju drugu točku b od X, po pretpostavci, postoji povezani potprostor C_b od X koji sadrži istovremeno a i b. Dakle, X je povezan budući da je unija povezanih potprostora s nepraznim presjekom. $\square$

Teorem 20.3. *Produkt $P = \prod_{j\in J} X_j$ nepraznih topoloških prostora X_j je povezan ako i samo ako je X_j povezan za svaki $j \in J$. Dakle, produkt je povezan onda i samo onda su mu svi faktori povezani.*

Dokaz. Ako je produkt P povezan i neprazan onda je za svaki $j \in J$ faktor X_j neprazan i povezan prema Teoremu 19.3 jer je prirodna projekcija $p_j : P \to X_j$ neprekidna surjekcija.

Obrnuto, pretpostavimo da su svi faktori X_j neprazni i povezani. Da bi smo pokazali da je njihov produkt P povezan, prvo ćemo pokazati da je produkt konačno nepraznih povezanih prostora povezan a zatim ćemo pokazati da produkt P ima povezani gusti potprostor.

Za prvi korak, primjetimo da u produktu $X \times Y$ dva neprazna povezana prostora, bilo koji par toč (a, b) i (c, d) leže u potprostoru

$X \times \{b\} \cup \{c\} \times Y$ koji je povezan jer je unija dva povezana potprostora s nepraznim presjekom. Iz Korolara 20.2 slijedi da je $X \times Y$ povezan. Sada se primjenom indukcije lagano pokazuje naša tvrdnja da je produkt konačno nepraznih povezanih prostora povezan.

U drugom koraku, krećemo od familije $\{X_j\}_{j \in J}$ nepraznih povezanih prostora. Odaberimo u svakom od tih prostora točku, tj. neka je $x_j \in X_j$ sa svaki $j \in J$. Sa x označimo točku produkta P kojoj su x_j koordinate. Neka je K skup svih konačnih podskupova skupa J. Za bilo koji konačan podskup F skupa J, neka je

$$C_F = \{\, (y_j)_{j \in J} \,:\, y_j = x_j \quad \text{za svaki} \quad j \notin F \,\}.$$

Vidimo da je C_F potprostor produkta P koji je homeomorfan produktu $\prod_{k \in F} X_k$. Iz prvog koraka slijedi da je skup C_F povezan za svaki konačan podskup F skupa J. Jer je $x \in C_F$ za svaki $F \in K$, iz Korolara 20.2 ponovo zaključujemo da je unija $C = \cup_{F \in K} C_F$ povezani potprostor produkta P. Primjetimo da se potprostor C sastoji od svih onih točaka produkta P kojima se sve koordinate podudaraju sa odgovarajućim koordinatama točke x osim za najviše konačno mnogo indeksa j.

Traženi zaključak da je produkt P povezan slijediti će sada iz Korolara 20.4 ako pokažemo da je potprostor C gust u P.

Potprostor C će biti gust u P ako za svaku točku $y = (y_j)_{j \in J}$ iz P i svaku njezinu okolinu U postoji točka $c = c(y, U)$ iz C koja leži u okolini U.

Neka su dakle točka y produkta i njezina okolina U zadane. Možemo pretpostaviti da ta okolina ima oblik $U = \prod_{j \in J} U_j$ pri čemu postoji konačan podskup F od J takav da je U_j okolina točke y_j u prostoru X_j za svaki $j \in J$ i da je $U_j = X_j$ za svaki $j \notin F$. Neka je $c = (c_j)_{j \in J}$ gdje je $c_j = y_j$ za $j \in F$ i $c_j = x_j$ za $j \notin F$. Vidimo da je c tražena točka budući da ona očigledno pripada istovremeno okolini U i skupu C_F (pa zato i skupu C). $\square$

KOROLAR 20.6. *Za svaki prirodan broj n i svaki kardinalan broj τ, Tychonoffljeva kocka I^τ, Euklidski n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$, i Hilbertova kocka I^∞ su povezani prostori.*

Primjetimo da su kvocijentni prostori povezanih prostora uvijek povezani jer je kvocijentna projekcija neprekidna surjekcija a znamo da neprekidne surjekcije čuvaju povezanost.

Slijedeći primjer pokazuje da inverzni limes inverznog niza povezanih prostora ne mora biti povezan prostor.

PRIMJER 20.1. Neka je T trokut u ravnini sa vrhovima u točkama $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, i $C(2, 1)$. Neka je X prostor dobiven uklanjanjem iz T otvorene stranice AB, tj.

$$X = T \setminus \{\, (s, 0) \,:\, 0 < s < 4 \,\}.$$

Za svaki prirodan broj i neka X_i bude oznaka za potprostor od X koji se sastoji od svih onih točaka prostora X kojima je druga koordinata najviše $\frac{1}{i}$. Primjetimo da je $X = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$ silazni niz povezanih prostora. Uzmemo li za svaki prirodan broj n za vezno preslikavanje $f_n : X_{n+1} \to X_n$ inkluziju, dobiti ćemo inverzni niz povezanih prostora kojemu inverzni limes $\{A, B\}$ nije povezan.

Definicija 20.1. Kažemo da je X *kontinuum* ako je on povezan, kompaktan i metrički prostor istovremeno.

$\boxed{5}$

Primjetimo da prostori u Primjeru 20.1 nisu kompaktni. Slijedeći teorem pokazuje da kompaktnost donosi promjenu.

Teorem 20.4. *Limes X inverznog sistema $\mathcal{X} = \{ X_j, p_i^j, J \}$ kontinuuma X_j $(j \in J)$ je kontinuum.*

Dokaz. Kako je limes X zatvoreni podskup produkta $P = \prod_{i \in J} X_j$ iz Teorema 25.1 i 27.1 slijedi da je X kompaktan. Da bi smo pokazali da je limes X također povezan, pretpostavimo da postoje zatvoreni i disjunktni potprostori A i B od X takvi da je $X = A \cup B$. Naš cilj je pokazati da je jedan od skupova A odnosno B prazan.

Za svaki indeks j u usmjerenom skupu J, neka je

$$A_j = p^j(A), \qquad B_j = p^j(B), \qquad C_j = A_j \cap B_j.$$

gdje nam $p^j : X \to X_j$ označava projekciju. Primjetimo da su svi gore definirani prostori kompaktni.

Sada želimo prvo provjeriti da prostori $\{C_j\}_{j \in J}$ sa restrikcijama

$$q_i^j = p_i^j | C_i : C_i \to C_j$$

(za $i \geq j$ u J) tvore inverzni sistem $\mathcal{C} = \{ C_j, q_i^j, J \}$ kompaktnih prostora.

U toj provjeri moramo jedino dokazati da je $p_i^j(C_i) \subset C_j$ za svaki par $i \geq j$ elemenata od J budući da su ostali dijelovi te provjere lagani i slijede iz činjenice da je $\mathcal{X}$ inverzni sistem.

Neka su dakle $i \geq j$ iz usmjerenog skupa J. Onda je

$$p_i^j(C_i) = p_i^j(A_i \cap B_i) \subset p_i^j(A_i) \cap p_i^j(B_i) = \\ p_i^j \circ p_i(A) \cap p_i^j \circ p_i(B) = p^j(A) \cap p^j(B) = A_j \cap B_j = C_j$$

Još lakše se vidi da su $\mathcal{A} = \{ A_j, s_i^j, J \}$ i $\mathcal{B} = \{ B_j, t_i^j, J \}$ isto inverzni sistemi kompaktnih prostora uzmemo li za vezna preslikavanja ponovo restrikcije $s_i^j = p_i^j | A_i$ i $t_i^j = p_i^j | B_i$.

Lagano se uvjeriti da su A i B limesi inverznih sistema $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. S druge strane, limes C inverznog sistema $\mathcal{C}$ očigledno mora ležati u presjeku $A \cap B$ koji je po pretpostavci prazan skup pa slijedi da je $C = \emptyset$.

Prisjetimo li se sada da je limes inverznog sistema kompaktnih nepraznih prostora neprazan, vidimo da postoji indeks k u skupu J takav da vrijedi $C_k = A_k \cap B_k = \emptyset$.

Skupovi A_k i B_k su disjunktni zatvoreni skupovi u normalnom prostoru X_k, pa možemo naći otvorene skupove U_k i V_k u X_k takve da je

$$A_k \subset U_k, \qquad B_k \subset V_k, \qquad U_k \cap V_k = \emptyset.$$

Za svaki indeks $j \geq k$ u J, stavimo $U_j = (p_j^k)^{-1}(U_k)$, $V_j = (p_j^k)^{-1}(V_k)$, i

$$W_j = X_j \setminus (U_j \cup V_j),$$

a za preostale članove j skupa J (tj. za one koji ne zadovoljavaju $j \geq k$) definiramo $W_j = X_j$.

Sada se lagano provjerava da je $\mathcal{W} = \{\, W_j,\, r_i^j,\, J \,\}$ inverzni sistem kompaktnih prostora uzmemo li za vezna preslikavanja r_i^j opet restrikcije veznih preslikavanja p_i^j.

Limes W inverznog sistema $\mathcal{W}$ je potprostor limesa X kome projekcija $r^k(W) = p^k(W)$ u vezni prostor Z_k mora ležati u projekciji $A_k \cup B_k$ od X u X_k. Budući da su skupovi W_k i $A_k \cup B_k$ disjunktni, to je moguće jedino tako da je $W = \emptyset$.

Ponovo kao i za sistem $\mathcal{C}$ gore, vidimo da mora postojati indeks $m \in J$ takav da je $W_m = \emptyset$.

Ako je $m \geq k$ onda je $X_m = U_m \cup V_m$ pa smo povezani prostor X_m prikazali kao uniju dva disjunktna otvorena skupa U_m i V_m. Zato je $U_m = \emptyset$ ili $V_m = \emptyset$. Uzmimo prvo da je $U_m = \emptyset$. Kako je

$$A_m = p^m(A) \subset (p_m^k)^{-1} \circ p_m^k \circ p^m(A) = (p_m^k)^{-1}(A_k) \subset U_m$$

vidimo da mora biti $A_m = \emptyset$ i stoga $A = \emptyset$. Potpuno na isti način se vidi da iz $V_m = \emptyset$ slijedi $B = \emptyset$.

Preostaje razmotriti što se dešava ako je $W_m = \emptyset$ za neki indeks m koji ne zadovoljava $m \geq k$. Jer je u tom slučaju po konstrukciji $W_m = X_m$, slijedi da je tada $X_m = \emptyset$ pa je $X = \emptyset$ i oba skupa A i B moraju biti prazni.

Tako smo pokazali da bar jedan od zatvorenih disjunktnih skupova A i B koji u uniji daju čitav limes X mora biti prazan pa je taj limes povezan. Prema tome, on je kontinuum jer smo na početku dokaza odmah pokazali da je i kompaktan. □

KOROLAR 20.7. *Ako je neka familija kontinuuma $\{X_j\}_{j \in J}$ zatvorena na konačne presjeke, onda je presjek $\bigcap_{j \in J} X_j$ svih članova polazne familije opet kontinuum.*

DOKAZ. Neka nam $\mathcal{K}$ bude oznaka za skup svih konačnih podskupova skupa J indeksa zadane familije. Skup $\mathcal{K}$ postaje usmjeren skup ako za relaciju usmjerenja uzmemo inkluziju (tj. ako za $A, B \in \mathcal{K}$ stavimo $A \geq B$ onda i samo onda ako je $A \supset B$ (konačan podskup A je nadskup konačnog podskupa B).

Za svaki $A \in \mathcal{K}$ (tj. za svaki konačan podskup A od J), neka je presjek $\cap_{j\in A} X_j$ svih onih članova zadane familije čiji indeksi pripadaju konačnom skupu A označen sa X_A. Isto tako, za usporedive elemente A, $B \in \mathcal{K}$ takve da je $B \supset A$, neka p_B^A bude inkluzija presjeka X_B u presjek X_A.

Tako smo izgradili inverzni sistem $\mathcal{X} = \{\, X_A,\, p_B^A,\, \mathcal{K}\,\}$ kontinuuma čiji limes je homeomorfan s presjekom $\cap_{j\in J} X_j$ svih članova familije. Na kraju, iz prethodnog teorema slijedi da je taj presjek također kontinuum. □

Korolar 20.8. *Presjek $\cap_{i=1}^{\infty} X_i$ silaznog niza $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ kontinuuma je kontinuum.*

Primjetimo da prostor preslikavanja Y^X među povezanim prostorima X i Y ne mora biti povezan. Potraga za uvjetima koji osiguravaju povezanost prostora preslikavanja Y^X dala je mnoštvo lijepih rezultata od kojih bez dokaza navodimo samo slijedeći teorem.

Teorem 20.5. *Neka je n prirodan broj i neka je X potprostor Euklidskog n-dimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^n$. Prostor $(S^{n-1})^X$ svih preslikavanja sa prostora X u $(n-1)$-dimenzionalnu sferu S^{n-1} snabdjeven kompaktno-otvorenom topologijom je povezan onda i samo onda ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ povezan.*

Jednostavna posljedica tog teorema je i tvrdnja da da će za homeomorfne potprostore X i Y od $\mathbb{R}^n$ komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ biti povezan ako i samo ako je komplement $\mathbb{R}^n \setminus Y$ povezan. I doista, ako su potprostori X i Y homeomorfni, onda će biti homeomorfni i prostori preslikavanja $(S^{n-1})^X$ i $(S^{n-1})^Y$ pa možemo primjeniti gornji teorem da zaključimo da je $\mathbb{R}^n \setminus X$ povezan onda i samo onda ako je $\mathbb{R}^n \setminus Y$ povezan. Slijedi da je taj teorem značajno poopćenje Jordanovog teorema o jednostavnoj zatvorenoj krivulji koji tvrdi da za svaku jednostavnu zatvorenu krivulju (tj. homeomorfnu sliku kružnice) C u ravnini $\mathbb{R}^2$ komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ nije povezan.

.... $\boxed{5}$ ....

Definicija 20.2. *Komponentom (povezanosti)* točke x u topološkom prostoru X nazivamo uniju svih povezanih potprostora od X koji sadrže točku x.

Kako je (vidi Korolar 20.3) zatvarač povezanog potprostora povezan i (vidi Korolar 20.2) unija svih povezanih potprostora koji sadrže istu točku je povezana, vidimo da su kompomente zatvoreni povezani potprostori. Komponente dvije različite točke se ili podudaraju ili su disjunktne. Zato sve komponente prostora X daju dekompoziciju tog prostora na u parovima disjunktne povezane zatvorene potprostore koje još nazivamo i *kompomentama (povezanosti) prostora X*.

Teorem 20.6. *Neka je P produkt $\prod_{j\in J} X_j$ familije prostora. Onda se komponenta točke $x = (x_j)_{j\in J}$ u produktu P podudara sa produktom*

$C = \prod_{j \in J} C_j$ gdje je C_j komponenta točke x_j u prostoru X_j za svaki $j \in J$.

Dokaz. Neka nam K bude oznaka za komponentu točke x u produktu P. Cilj nam je pokazati da je $K = C$.

Označimo sa $p_j : P \to X_j$ prirodnu projekciju produkta P na faktor X_j za svaki $j \in J$. Jer je projekcija $p_j(K)$ komponente K povezani potprostor od X_j koji sadrži točku x_j, vidimo da mora biti $p_j(K) \subset C_j$ za svaki $j \in J$. Zato je $K \subset C$.

S druge strane, prema Teoremu 20.3, C je povezani potprostor od P jer je produkt povezanih prostora. Kako C sadrži točku x, slijedi da je $C \subset K$.

Prema tome, $K = C$ jer smo uspjeli pokazati prvo da je $K \subset C$ a zatim da je $C \subset K$. □

Definicija 20.3. *Kvazikomponenta točke x* topološkog prostora X je presjek svih potprostora od X koji sadrže točku x i koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni u X.

Vidimo da su kvazikomponente zatvoreni potprostori jer je svaka unija zatvorenih skupova zatvoreni skup. Kvazikomponente dviju različitih točaka prostora se ili podudaraju ili su disjunktne. Zato kvazikomponente točaka prostora X tvore dekompoziciju od X na u parovima disjunktne zatvorene potprostore koje još nazivamo *kvazikomponente prostora X*.

Teorem 20.7. *Kvazikomponenta Q točke x topološkog prostora X uvijek sadrži komponentu C točke x.*

Dokaz. Neka je Z bilo koji potprostor od X koji sadrži točku x i koji je istovremeno otvoren i zatvoren u X. Jer su podskupovi Z i $W = X \setminus Z$ razdvojeni (tj., $\overline{Z} \cap W = \emptyset = \overline{W} \cap Z$), takvi će biti i skupovi $D = C \cap Z$ i $E = C \cap W$. Budući da je $D \neq \emptyset$ (oba C i Z sadrže točku x), iz Teorema 19.1, slijedi da je $E = \emptyset$. Dakle, skup C ne siječe komplement od Z, pa je $C \subset Z$. Zato je $C \subset Q$ jer je Q unija skupova poput Z. □

$\boxed{5}$

Teorem 20.8. *U kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru X, komponenta svake točke $x \in X$ podudara se sa njenom kvazikomponentom.*

Dokaz. Iz prethodnog teorema slijedi da je dovoljno pokazati da je kvazikomponenta Q točke x povezana. I doista, ako je Q povezana, onda je Q sadržana u komponenti C od x jer je C unija svih povezanih podskupova od X koji sadrže točku x. Kako znamo da Q sadrži C, slijediti će da je $C = Q$.

Da bi smo pokazali da je kvazikomponenta Q povezana, pretpostavimo suprotno, tj. da je Q unija dvaju disjunktnih zatvorenih potprostora A i B. Možemo pretpostaviti da je $x \in A$. Jer su (zbog toga što je Q zatvoren) skupovi A i B također zatvoreni u X i jer je svaki kompaktan Hausdorffov prostor normalan, postoje otvoreni skupovi U i V u X takvi da je

$$A \subset U, \qquad B \subset V, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Slijedi da je kompaktan potprostor Q sadržan u otvorenom skupu $S = U \cup V$.

Sada ćemo prvo pokazati da postoji prirodan broj n i skupovi $F_1,\ldots, F_n$ koji su svi istovremeno otvoreni i zatvoreni takvi da je

$$Q \subset F \subset S,$$

gdje je $F = \cap_{i=1}^{n} F_i$ presjek tih skupova.

Neka je $\mathcal{Z}$ familija svih potprostora od X koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni i koji sadrže točku x. Primjetimo da je skup $\mathcal{W}$ svih konačnih podskupova od $\mathcal{Z}$ usmjeren skup uzmemo li za usmjerenje relaciju sadržavanja skupova. Kada gore opisanog prirodanog broja n i skupova $F_1,\ldots, F_n$ ne bi bilo, onda bi za za svaki element w skupa $\mathcal{W}$ (tj. za svaki konačan skup $w = \{ Z_1, \ldots, Z_k \}$ potprostora od X koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni i koji sadrže točku x) mogli pronaći točku z_w iz presjeka $Z_w = \cap_{i=1}^{k} Z_i$ koja ne pripada otvorenom skupu S. Stavimo li $\varphi(w) = z_w$ za svaki $w \in \mathcal{W}$, definirali smo mrežu u kompaktnom prostoru $X \setminus S$. Zbog te kompaktnosti, mreža φ ima najmanje jednu točku nakupljanja (recimo $p \in X \setminus S$). S druge strane, jer je kvazikomponenta Q presjek svih potprostora od X koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni i koji sadrže točku x bar jedan takav skup Z ne sadrži točku p. Komplement $X \setminus Z$ potprostora Z je okolina točke p a jednočlani skup $w = \{Z\}$ je element usmjerenog skupa $\mathcal{W}$ (domene mreže φ), pa mora postojati veći indeks $v \geq w$ takav da je $\varphi(v) = z_v \in X \setminus Z$. Kako je $v = \{ Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_m \}$ za neki cijeli broj $m \geq 0$ i neke elemente $Z_1,\ldots, Z_m$ skupa $\mathcal{Z}$, vidimo da $z_v \in Z$. Dakle, uspjeli smo zaključiti da je točka z_v istovremeno u i izvan skupa Z što je očigledna kontradikcija.

Sada možemo nastaviti s dokazom našeg teorema i pri tome se slobodno možemo koristiti ranije definiranim skupom F. Primjetimo da je on istovremeno otvoren i zatvoren. Isto vrijedi i za presjek $U \cap F$ jer je njegova otvorenost očigledna (presjek dvaju otvorenih) dok zatvorenost slijedi iz

$$\overline{U \cap F} \subset \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cap V) \cap F = U \cap F.$$

Budući da je točka x sadržana u presjeku $U \cap F$ koji je istovremeno otvoren i zatvoren, kvazikomponenta Q leži u tom presjeku. Podskup B te kvazikomponente zato leži u skupu U. Kako je B isto tako podskup skupa V, a U i V su disjunktni, to se sve može zadovoljiti jedino tako da je $B = \emptyset$.

Potpuno analogno se pokazuje da ako je $x \in B$ mora biti $A = \emptyset$. Zato je kvazikomponenta Q povezana. $\square$

.... $\boxed{5}$ ....

PRIMJER 20.2. Sada ćemo opisati prostor u kome se komponente i kvazikomponente razlikuju.

Neka je X potprostor ravnine $\mathbb{R}^2$ koji se sastoji od niza segmenata

$$X_i = [0,\, 1] \times \{\frac{1}{i}\}$$

(za $i = 1,\, 2,\, \ldots$) i točaka $s = (0,\, 0)$ i $t = (1,\, 0)$. Primjetimo da su komponente od X segmenti X_i ($i = 1,\, 2,\, \ldots$) i jednočlani skupovi $\{s\}$ i $\{t\}$. Sada ćemo pokazati da je kvazikomponenta Q točke s dvočlani skup $\{s,\, t\}$.

Neka je Z potprostor prostora X koji sadrži točku s i koji je istovremeno otvoren i zatvoren u X. Jer je Z okolina točke s i niz lijevih krajeva segmenata X_i konvergira prema točki s, vidimo da postoji prirodan broj n takav da su točke $(\frac{1}{m},\, 0)$ (lijevi krajevi segmenata X_m) sadržane u potprostoru Z za svaki $m \geq n$. Kako je svaki segment X_m ($m \geq n$) povezan, potprostor Z sadrži X_m za svaki $m \geq n$. Zato mora sadržavati i točku t koja je limes niza $(1,\, \frac{1}{m})$ desnih krajeva segmenata X_m za $m \geq n$. Time smo pokazali da je $\{s,\, t\} \subset Q$ pa je kvazikomponenta točke s različita od njene komponente.

Zamijenimo li točke s i t segmentima $[0,\, \frac{1}{2}) \times \{0\}$ i $(\frac{1}{2},\, 1] \times \{0\}$ dobiti ćemo lokalno kompaktan prostor u kojem postoje točke čije se komponente i kvazikomponente ne podudaraju.

———————————————— $\boxed{5}$ ————————————————

LEMA 20.1. *Svaka komponenta C pravog nepraznog zatvorenog potprostora A kontinuuma X siječe granicu $Bd(A)$ od A.*

DOKAZ. Neka je $c \in C$. Prema Teoremu 20.8, komponenta C je presjek familije $\mathcal{K}$ svih potprostora od A koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni i koji sadrže točku c.

Pretpostavimo da je $C \cap Bd(A) = \emptyset$. Budući da je familija $\mathcal{K}$ zatvorena na konačne presjeke i granica $Bd(A)$ je kompaktna, sigurno postoji $K \in \mathcal{K}$ koji ne siječe $Bd(A)$. Odaberimo otvoreni skup U u X takav da je $U \cap A = K$. Jer je $K \cap Bd(A) = \emptyset$, slijedi da je $K = U \cap Int(A)$ što znači da je skup K otvoren u prostoru X. S druge strane, skup K je također zatvoren u X jer je kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora a i sadrži točku c. Zato je $K = X$ pa bi granica $Bd(A)$ koja ne siječe K morala biti prazan skup što je očigledno nemoguće. $\square$

LEMA 20.2. *Ako je kontinuum X prekriven u parovima disjunktnim zatvorenim skupovima $X_1,\, X_2, \ldots$ od kojih su najmanje dva neprazna, onda za svaki prirodan broj n postoji kontinuum C koji ne siječe skup*

X_n ali ima svojstvo da su najmanje dva člana niza $C \cap X_1$, $C \cap X_2$, ... neprazna.

Dokaz. Ako je $X_n = \emptyset$, možemo staviti $C = X$. Ako je $X_n \neq \emptyset$, odaberimo prirodan broj $m \neq n$ takav da je $X_m \neq \emptyset$. Jer su X_n i X_m dva disjunktna zatvorena skupa u normalnom prostoru, postoje otvoreni skupovi U i V u X takvi da je $X_n \subset U$ i $X_m \subset V$.

Odaberimo točku p u skupu X_m i neka je C komponenta od p u prostoru $\overline{V}$ (zatvaraču skupa V). Naš odabir osigurava da je C kontinuum koji ne siječe X_n ali siječe X_m (najmanje u točki p). Preostaje još pokazati da postoji najmanje jedan prirodan broj $k \neq m$, n takav da presjek $C \cap X_k$ nije prazan.

Prvo primjetimo da iz prethodne leme slijedi da je $C \cap Bd(\overline{V}) \neq \emptyset$. S druge strane, skup X_m leži u skupu V i zato također i u unutrašnjosti zatvarača $\overline{V}$. Sada za k možemo uzeti bilo koji prirodan broj takav da X_k siječe neprazni skup $C \cap Bd(\overline{V})$. Takav sigurno postoji jer zatvoreni skupovi X_1, X_2, ... prekrivaju prostor X. $\square$

Teorem 20.9. *Ako kontinuum X ima prebrojivi pokrivač $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ u parovima disjunktnim zatvorenim podskupovima, onda najviše jedan od tih podskupova može biti neprazan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji niz $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ u parovima disjunktnih zatvorenih podskupova od X takvih da je $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$, i $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Primjenimo li prethodnu lemu za slučaj $n = 1$, vidimo da postoji kontinuum C_1 koji ne siječe X_1 takav da da su najmanje dva skupa iz niza $C_1 \cap X_2$, $C_1 \cap X_3$,... neprazna.

Ponovnom primjenom iste leme na kontinuum C_1, familiju

$$\{C_1 \cap X_i\}_{i=2}^{\infty},$$

i $n = 2$, vidimo da postoji kontinuum $C_2 \subset C_1$ disjunktan sa X_2 takav da da su najmanje dva skupa iz niza $C_2 \cap X_3$, $C_2 \cap X_4$,... neprazna.

Nastavimo li taj postupak neograničeno izgraditi ćemo silazni niz

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

nepraznih kontinuuma takvih da je $C_n \cap X_n = \emptyset$ za svaki prirodan broj n. Kako skupovi X_n zajedno prekrivaju X, posljednji uvjet povlači da presjek $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ mora biti prazan dok nam kompaktnost prostora X garantira da taj presjek mora biti neprazan. Prema tome, dobili smo kontradikciju pa naša polazna pretpostavka ne vrijedi. $\square$

Pojam povezanosti topološkog prostora daje nam mogućnost da definiramo slijedeću novu klasu preslikavanja.

Definicija 20.4. Za neprekidnu funkciju $f : X \to Y$ među topološkim prostorima kažemo da je *monotona* ako je za svaki $y \in Y$ potpuna praslika $f^{-1}(y)$ povezani potprostor prostora X.

TEOREM 20.10. *Ako je $f : X \to Y$ monotono kvocijentno preslikavanje, onda je potpuna praslika $f^{-1}(C)$ svakog zatvorenog povezanog podskupa C kodomene Y povezan. Isto vrijedi i za svaki otvoreni povezani podskup C od Y.*

DOKAZ. Prisjetimo se da je za svaki otvoreni (zatvoreni) podskup C kodomene kvocijentnog preslikavanja $f : X \to Y$ restrikcija

$$f_C = f|_{f^{-1}(C)} : f^{-1}(C) \to C$$

ponovo kvocijentno preslikavanje. Zato je dovoljno pokazati da povezanost kodomene Y povlači da je domena X povezana.

Da bi smo to pokazali, pretpostavimo da je prostor X unija dva disjunktna zatvorena podskupa A i B. Ti skupovi su također i otvoreni. Jer su vlakna (potpune praslike točaka iz kodomene) preslikavanja f povezana, očigledno je $A = f^{-1}(P)$ i $B = f^{-1}(Q)$, gdje je $P = f(A)$ i $Q = f(B)$. Skupovi P i Q su disjunktni i istovremeno otvoreni i zatvoreni jer je f kvocijentno preslikavanje. Kako je svako kvocijentno preslikavanje po definiciji surjekcija, skupovi P i Q prekrivaju prostor Y.

Iz pretpostavke da je Y povezan prostor, slijedi da je jedan od skupova P i Q (recimo da je to P) prazan. Onda je skup A također prazan. Odavde slijedi da je prostor X povezan. □

TEOREM 20.11. *Potpuna praslika $f^{-1}(C)$ bilo kojeg povezanog potprostora C kodomene zatvorenog monotonog preslikavanja $f : X \to Y$ je uvijek povezan potprostor. Isto vrijedi i za otvorena monotona preslikavanja.*

DOKAZ. Prisjetimo se da je za svaki podskup C kodomene otvorenog (zatvorenog) preslikavanja $f : X \to Y$ restrikcija

$$f_C = f|_{f^{-1}(C)} : f^{-1}(C) \to C$$

ponovo otvoreno (zatvoreno) preslikavanje. Zato je dovoljno pokazati da povezananost kodomene Y povlači da je domena X povezana. Ali to slijedi odmah iz prethodnog teorema ako se sjetimo da su i otvorena i zatvorena surjektivna preslikavanja kvocijentna preslikavanja. □

.... $\boxed{5}$ ....

TEOREM 20.12. *Kompaktan metrički prostor (X, d) je povezan ako i samo ako za svaki par točaka $x, y \in X$ i svaki realni broj $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ iz X takve da je $x = x_1$, $y = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$.*

DOKAZ. Neka je metrički prostor (X, d) povezan i neka su dani par točaka $x, y \in X$ i realni broj $\varepsilon > 0$. Označimo sa A skup svih točaka z prostora X takvih da postoji prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ iz X takve da je $x = x_1$, $z = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Skup A je neprazan jer sigurno sadrži točku x. Skup A je otvoren jer ako je $z \in A$ onda je otvorena ε-kugla $K_d(z, \varepsilon)$ u točki z sadržana u skupu A. I doista, ako je $w \in K_d(z, \varepsilon)$ i ako su prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ prostora X takve da je $x = x_1$, $z = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$ onda ako stavimo $x_{k+1} = w$ vidimo da je $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ pa je w također u skupu A. Na kraju, skup A je i zatvoren jer za svaku točku w zatvarača od A, otvorena kugla $K_d(w, \varepsilon)$ sadrži neku točku z skupa A pa istim zaključivanjem vidimo da točka w pripada skupu A.

Sada kada znamo da je skup A neprazan i istovremeno otvoren i zatvoren, pretpostavka da je prostor X povezan povlači da je $A = X$. Dakle, $y \in A$ pa se prirodan broj k i niz točaka $x_1, \ldots, x_k$ iz iskaza teorema sigurno mogu naći.

Obrnuto, pretpostavimo da kompaktan metrički prostor (X, d) ima svojstvo da za svaki par točaka $x, y \in X$ i svaki realni broj $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ prostora X takve da je $x = x_1$, $y = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Kada prostor X ne bi bio povezan, postojali bi neprazni, disjunktni, zatvoreni potprostori A i B od X takvi da je $X = A \cup B$. Neka je $x \in A$ i $y \in B$. Jer su skupovi A i B kompaktni, realni broj $\varepsilon = d(A, B)$ je pozitivan (tj., strogo veći od nule). Po pretpostavci, postoji prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ prostora X takve da je $x = x_1$, $y = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Jer su skupovi A i B disjunktni, mora postojati prirodan broj $m < k$ takav da je $x_m \in A$ i $x_{m+1} \in B$. Kako je $d(x_m, x_{m+1}) < \varepsilon$, slijedilo bi da je $d(A, B) < \varepsilon$ što se protivi definiciji broja ε. Dakle, prostor X je povezan. $\square$

U prvom dijelu gornjeg dokaza nismo trebali pretpostavku da je prostor X kompaktan, dok je za drugi dio ona bitna jer je

$$L = (0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times (0, 1]$$

(nekompaktni) nepovezani metrički prostor u kojem za svaki par točaka $x, y \in L$ i svaki realni broj $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj k i točke $x_1, \ldots, x_k$ prostora L takve da je $x = x_1$, $y = x_k$, i $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Teorem 20.13. *Topološki prostor X je povezan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{j \in J}$ od X i svaki par točaka $x, y \in X$, postoji prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa J takvi da je $x \in U_{j_1}$, $y \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za $m, n = 1, 2, \ldots, k$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da prostor X ne zadovoljava svojstvo opisano u iskazu teorema. Drugim riječima, pretpostavimo da postoji otvoreni pokrivač $\{U_j\}_{j \in J}$ od X i par točaka $x, y \in X$ takvi da ne postoji prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa J takvi da je $x \in U_{j_1}$, $y \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za $m, n = 1, 2, \ldots, k$.

Označimo sa A skup svih točaka z od X sa svojstvom da postoji prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa J takvi da je $x \in U_{j_1}$, $z \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za m, $n = 1, 2, \ldots, k$. Primjetimo da skup A nije prazan jer je točka x sigurno njen element (stavimo $k = 1$ i za j_1 uzmemo bilo koji član od J takav da U_{j_1} sadrži točku x). S druge strane, komplement B od A u X je također neprazan jer sigurno sadrži točku y.

Sada ćemo pokazati da su skupovi A i B otvoreni. Prema Teoremu 19.1 slijediti će da prostor X ne može biti povezan što će završiti dokaz jedne od implikacija u teoremu.

Ako je točka z u A, onda postoji prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa J takvi da je $x \in U_{j_1}$, $z \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za m, $n = 1, 2, \ldots, k$. Sada je jasno da će sve točke w iz skupa U_{j_k} također pripadati skupu A (jer za njih možemo iskoristiti isti k i iste elemente $j_1, \ldots, j_k$). Dakle, skup A je otvoren.

Skup B je otvoren zato jer ako je $w \in B$ i ako je $j \in J$ takav da skup U_j sadrži točku w, onda je $U_j \subset B$. I doista, kada bi slučajno neka točka z skupa A ležala u U_j, onda bi postojao prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa J takvi da je $x \in U_{j_1}$, $z \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za m, $n = 1, 2, \ldots, k$. Neka je m prvi među prirodnim brojevima između 2 i $k + 1$ sa svojstvom da je $U_{j_{m-1}} \cap U_j \neq \emptyset$. Stavimo li $j_m = j$, dobiti ćemo prirodan broj m i elemente $j_1, \ldots, j_m$ skupa J takve da je $x \in U_{j_1}$, $w \in U_{j_m}$, i $U_{j_s} \cap U_{j_t} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|s - t| \leq 1$ za s, $t = 1, 2, \ldots, m$. Dakle, slijediti će da je $w \in A$, što je nemoguće.

Za dokaz obrnute implikacije u teoremu, pretpostavimo da prostor X nije povezan. Naš cilj je pokazati da tada prostor X nema niti svojstvo opisano u iskazu teorema.

Ako prostor X nije povezan, onda postoji pokrivač $\{U_1, U_2\}$ od X nepraznim, otvorenim, i disjunktnim skupovima. Neka je $x \in U_1$ i $y \in U_2$. Jasno je da ne postoje prirodan broj k i elementi $j_1, \ldots, j_k$ skupa $\{1, 2\}$ takvi da je $x \in U_{j_1}$, $y \in U_{j_k}$, i $U_{j_m} \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ onda i samo onda ako je $|m - n| \leq 1$ za m, $n = 1, 2, \ldots, k$. $\square$

21. Lokalna povezanost

Definicija 21.1. Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaki $x \in X$ i svaku okolinu U od x u X postoji povezan skup C takav da je $C \subset U$ i $x \in Int(C)$.

Teorem 21.1. *Prostor X je lokalno povezan ako i samo ako je za svaki otvoreni podskup U od X unija komponenti svih točaka iz U otvoren skup.*

Teorem 21.2. *U lokalno povezanom prostoru komponente i kvazikomponente se podudaraju.*

Teorem 21.3. *Kvocijentna preslikavanja čuvaju lokalnu povezanost.*

Teorem 21.4. *Otvoreni podskupovi lokalno povezanog prostora su lokalno povezani.*

Primjer 21.1. Prostor

$$X = \{0\} \cup \{\,\frac{1}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

je zatvoreni podskup pravca $\mathbb{R}$ koji nije lokalno povezan, dok je

$$Y = [0,\,1] \times \{0\} \cup \{\,[0,\,1] \times \{\frac{1}{n}\}\,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

zatvoreni podskup ravnine $\mathbb{R}^2$ koji nije lokalno povezan.

Teorem 21.5. *Neka je $\{X_j\}_{j\in J}$ familija nepraznih topoloških prostora. Produkt $P = \prod_{j\in J} X_j$ je lokalno povezan onda i samo onda ako su svi prostori X_j lokalno povezani i ako postoji konačan podskup K od J takav da su svi prostori X_j za $j \in J \setminus K$ povezani.*

22. Povezanost putevima i lokalna povezanost putevima

Definicija 22.1. Prostor X je *putevima povezan* ako za svaki par njegovih točaka x_0 i x_1 postoji neprekidna funkcija $f\,:\, I \to X$ sa jediničnog zatvorenog segmenta $I = [0,\,1]$ u prostor X takva da je

$$f(0) = x_0 \quad \text{i} \quad f(1) = x_1.$$

Svaku takvu neprekidnu funkciju zovemo *putem* s početkom u x_0 i krajem u x_1. Kažemo još da put f *spaja* točku x_0 s točkom x_1.

Teorem 22.1. *Putevima povezani prostori su povezani.*

Teorem 22.2. *Ako je prostor X putevima povezan i $f\,:\, X \to Y$ je neprekidna surjekcija, onda je prostor Y također putevima povezan.*

Teorem 22.3. *Neka je $\{X_j\}_{j\in J}$ familija nepraznih topoloških prostora. Produkt $P = \prod_{j\in J} X_j$ je putevima povezan ako i samo ako su svi prostori X_j putevima povezani.*

Definicija 22.2. Prostor X je *lokalno putevima povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i svaku njenu okolinu U postoji okolina V od x takva da za svaku točku $y \in V$ postoji neprekidna funkcija $f\,:\, I \to U$ sa jediničnog zatvorenog segmenta $I = [0,\,1]$ u okolinu U takva da je $f(0) = x$ i $f(1) = y$.

Teorem 22.4. *Svaki lokalno putevima povezani prostor je lokalno povezan.*

Teorem 22.5. *Povezani prostori koji su lokalno putevima povezani su putevima povezani.*

Teorem 22.6. *Ako je $f\,:\, X \to Y$ kvocijentno preslikavanje lokalno putevima povezanog prostora X na prostor Y, onda je prostor Y također lokalno putevima povezan.*

Teorem 22.7. *Svi otvoreni podskupovi lokalno putevima povezanog prostora su i sami lokalno putevima povezani.*

TEOREM 22.8. *Neka je $\{X_j\}_{j \in J}$ familija nepraznih topoloških prostora. Produkt $P = \prod_{j \in J} X_j$ je lokalno putevima povezan ako i samo ako su svi prostori X_j lokalno putevima povezani i ako postoji konačan podskup K od J takav da su svi prostori X_j za $j \in J \setminus K$ putevima povezani.*

$\boxed{5}$

23. Nepovezanosti

DEFINICIJA 23.1. Topološki prostor X je *nasljedno nepovezan* ako taj prostor ne sadrži niti jedan povezani potprostor od dvije ili više točaka.

Dakle, prostor je nasljedno nepovezan ako i samo ako se komponenta svake njegove točke sastoji samo od te točke. Jer su komponente zatvoreni podskupi, vidimo da svaki nasljedno nepovezan prostor mora biti T_1-prostor.

DEFINICIJA 23.2. Topološki prostor X je *nula-dimenzionalan* ako je on neprazan T_1-prostor s bazom topologije koja se sastoji od skupova koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.

TEOREM 23.1. *Svaki nula-dimenzionalan prostor je potpuno regularan.*

DOKAZ. Neka su u nula-dimenzionalnom prostoru X dani zatvoreni podskup F i točka x izvan skupa F. Moramo pokazati da postoji neprekidna funkcija $f : X \to I$ od X u jedinični zatvoreni segment $I = [0, 1]$ takva da je $f(x) = 0$ i $f(F) = 1$.

Jer je komplement $X \setminus F$ od F u X otvorena okolina točke x i jer prostor X ima bazu od OZ-skupova, postoji OZ-skup U takav da je $x \in U$ i $F \subset X \setminus U$. Definirajmo sada traženu funkciju f tako da je $f(y) = 0$ za svaku točku y u U i da je $f(y) = 1$ za svaku točku y izvan U. □

TEOREM 23.2. *Nula-dimenzionalan prostor je nasljedno nepovezan.*

DOKAZ. Neka je A podskup nula-dimenzionalnog prostora X. Pretpostavimo da A ima više od jedne točke. Neka su a i b dvije različite točke podskupa A. Kako je nula-dimenzionalan prostor po definiciji T_1-prostor, $X \setminus \{b\}$ je otvorena okolina točke a. Jer X ima bazu od OZ-skupova, postoji OZ-skup U takav da je $a \in U \subset X \setminus \{b\}$. Sada je jasno da su presjek $A \cap U$ i razlika $A \setminus U$ neprazni razdvojeni podskupovi od A pa slijedi da A nije povezan. Zato je prostor X nasljedno nepovezan budući da nema netrivijalnih povezanih podskupova. □

DEFINICIJA 23.3. Podskup S topološkog prostora X nazivamo *funkcijski zatvorenim* (ili, kraće, FZ-*podskup*) ako postoji neprekidna funkcija f sa X u jedinični zatvoreni segment $I = [0, 1]$ takva da je

$$S = f^{-1}(0).$$

Funkcijski zatvoreni podskupovi su dakle potpune praslike broja nula za neku neprekidnu funkciju prostora u jedinični zatvoreni segment pa se zato često još nazivaju i nula-skupovi. Očigledno je da je svaki funkcijski zatvoreni podskup zatvoren. Obrat jamačno općenito ne vrijedi.

LEMA 23.1. *Unije od konačno mnogo i presjeci od prebrojivo mnogo FZ-podskupova su ponovo FZ-podskupovi.*

DOKAZ. Neka je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz neprekidnih funkcija sa prostora X u jedinični zatvoreni segment I. Jer su funkcije f, $g : X \to I$ definirane sa $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ i

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

za svaki $x \in X$ neprekidne i zadovoljavaju

$$f^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0), \qquad \text{and} \qquad g^{-1}(0) = \cap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(0)$$

vidimo da je unija dva FZ-podskupa i presjek niza FZ-podskupa opet FZ-podskup. Da je unija konačno mnogo FZ-podskupa opet FZ-podskup sada možemo lagano dokazati matematičkom indukcijom. $\square$

DEFINICIJA 23.4. Komplement funkcijski zatvorenog podskupa nazivamo *funkcijski otvoreni podskup* (ili, kraće, FO-*podskup*).

Funkcijski otvoreni podskupovi su dakle potpune praslike $(0, 1]$ (svi realni brojevi između nule i jedan osim nule) za neku neprekidnu funkciju prostora u jedinični zatvoreni segment pa se zato često još nazivaju i konula-skupovi. Očigledno je da je svaki funkcijski otvoreni podskup otvoren.

Iz Leme 23.1 slijedi da su FO-podskupovi zatvoreni na konačne presjeke i prebrojive unije.

TEOREM 23.3. *Da bi T_1-prostor bio potpuno regularan nužno je i dovoljno da svi njegovi FO-podskupovi čine bazu topologije prostora.*

TEOREM 23.4. *Svaki OZ-podskup topološkog prostora je istovremeno FO-podskup i FZ-podskup.*

TEOREM 23.5. *Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija među topološkim prostorima. Za svaki FZ-podskup B od Y, potpuna praslika $A = f^{-1}(B)$ je FZ-podskup od X. Isto vrijedi i za FO-podskupove.*

DOKAZ. Jer je B po pretpostavci FZ-podskup od Y, postoji neprekidna funkcija $g : Y \to I$ takva da je $B = g^{-1}(0)$. Neka je $h = g \circ f$. Kako je $h^{-1}(0) = A$, slijedi da je A također FZ-podskup. Dokaz za FO-podskupove je vrlo sličan. $\square$

DEFINICIJA 23.5. Kažemo da su podskupovi A i B topološkog prostora X *potpuno razdvojeni* ako postoji neprekidna funkcija $f : X \to I$ od X u jedinični zatvoreni segment I takva da je $f(a) = 0$ za svaki $a \in A$ i $f(b) = 1$ za svaki $b \in B$.

Urysohnova Lema zapravo tvrdi da su u normalnom prostoru dva disjunktna zatvorena skupa potpuno razdvojeni. Obrnuto, ako su svaka dva disjunktna zatvorena podskupa T_1-prostora X potpuno razdvojena, onda je X normalan prostor.

Definicija 23.6. Pokrivač topološkog prostora koji se sastoji od FZ-podskupova naziva se FZ-*pokrivač*. Slično se uvodi i pojam i FO-*pokrivača*.

Definicija 23.7. Neprazni potpuno regularan prostor zovemo *jako nula-dimenzionalan* ako svaki njegov konačan FO-pokrivač ima konačno otvoreno profinjenje u parovima disjunktnim skupovima.

Lema 23.2. *Za bilo koji par A, B potpuno razdvojenih podskupova jako nula-dimenzionalnog prostora X uvijek postoji OZ-podskup U od X takav da vrijedi $A \subset U \subset X \setminus B$.*

Dokaz. Neka je $f : X \to I$ neprekidna funkcija takva da vrijedi $f(A) \subset \{0\}$ i $f(B) \subset \{1\}$. Skupovi $f^{-1}((0,\, 1])$ i $f^{-1}([0,\, 1))$ zajedno tvore FO-pokrivač prostora X. Po pretpostavci, postoji konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od X u parovima disjunktnim skupovima koji profinjuje taj FO-pokrivač. Onda je $U = \cup\{V : V \in \mathcal{V},\ A \cap V \neq \emptyset\}$ traženi OZ-podskup. $\square$

Lema 23.3. *Neka je X topološki prostor. Ako za svaki par A, B potpuno razdvojenih podskupova od X postoji OZ-podskup U od X takav da je $A \subset U \subset X \setminus B$, onda svaki konačan FO-pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^k$ prostora X ima konačno otvoreno profinjenje $\{V_i\}_{i=1}^k$ takvo da je $V_i \subset U_i$ i $V_i \cap V_j = \emptyset$ za sve $i, j = 1, \ldots, k$ uz $i \neq j$.*

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom s obzirom na broj k. Za $k = 1$ lema očigledno vrijedi. Pretpostavimo da je ona istinita za svaki prirodan broj k manji od prirodnog broja m. Neka je dan FO-pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^m$ prostora X. Po pretpostavci indukcije, postoji pokrivač $\{W_1, W_2, \ldots, W_{m-1}\}$ prostora X koji se sastoji od u parovima disjunktnih OZ-podskupova takvih da je

$$W_i \subset U_i \qquad \text{za} \qquad i < m-1 \qquad \text{i} \qquad W_{m-1} \subset U_{m-1} \cup U_m.$$

Primjetimo da je $W_{m-1} \setminus U_m$ FZ-podskup od X jer je presjek dvaju FZ-podskupova; W_{m-1} je FZ-podskup jer su OZ-podskupovi FZ-podskupovi dok je komplement od U_m sigurno FZ-podskup jer je U_m po pretpostavci FO-podskup. Slično se vidi da je $W_{m-1} \setminus U_{m-1}$ isto FZ-podskup od X. Budući da su skupovi $W_{m-1} \setminus U_m$ i $W_{m-1} \setminus U_{m-1}$ disjunktni, slijedi da su oni potpuno razdvojeni. Dakle, po pretpostavci leme, postoji OZ-podskup U od X takav da je

$$W_{m-1} \setminus U_{m-1} \subset U \subset X \setminus (W_{m-1} \setminus U_m) = (X \setminus W_{m-1}) \cup U_m.$$

Primjetimo da vrijede inkluzije

$$W_{m-1} \setminus U \subset U_{m-1}, \qquad W_{m-1} \cap U \subset U_m.$$

Definirajmo sada otvorene skupove $\{V_i\}_{i=1}^m$ tako da stavimo $V_i = W_i$ za $i < m-1$, $V_{m-1} = W_{m-1} \setminus U$, i $V_m = W_{m-1} \cap U$. Lagano se provjerava da je $\{V_i\}_{i=1}^m$ traženi otvoreni pokrivač takav da je $V_i \subset U_i$ i $V_i \cap V_j = \emptyset$ za sve i, $j = 1, \ldots, m$ uz $i \neq j$. $\square$

Na sličan način dokazuje se i slijedeća lema.

LEMA 23.4. *Ako za bilo koji par A, B potpuno razdvojenih podskupova normalnog prostora X postoji OZ-podskup U od X takav da vrijede inkluzije $A \subset U \subset X \setminus B$, onda svaki konačan otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^k$ prostora X ima konačno otvoreno profinjenje $\{V_i\}_{i=1}^k$ takvo da je $V_i \subset U_i$ i $V_i \cap V_j = \emptyset$ za sve i, $j = 1, \ldots, k$ uz $i \neq j$.*

Iz Lemi 23.3 i 23.4 lagano slijedi slijedeća zanimljiva karakterizacija jako nula-dimenzionalnih prostora.

TEOREM 23.6. *Neprazni potpuno regularan prostor X će biti jako nula-dimenzionalan ako i samo ako za svaki par A, B njegovih potpuno razdvojenih podskupova postoji OZ-podskup U od X takav da je $A \subset U \subset X \setminus B$.*

TEOREM 23.7. *Neprazni normalan prostor X je jako nula-dimenzionalan ako i samo ako svaki konačan otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i=1}^k$ prostora X ima konačno otvoreno profinjenje $\{V_i\}_{i=1}^m$ takvo da je $V_i \cap V_j = \emptyset$ za sve indekse i, $j = 1, \ldots, m$ uz $i \neq j$.*

Primjetimo da iz Leme 23.4 neposredno slijedi.

TEOREM 23.8. *Svaki jako nula-dimenzionalan topološki prostor je nula-dimenzionalan.*

TEOREM 23.9. *Svaki Lindelöfov nula-dimenzionalan prostor je jako nula-dimenzionalan.*

DOKAZ. Kako je svaki nula-dimenzionalan prostor potpuno regularan, dovoljno je pokazati da za svaki par A, B potpuno razdvojenih podskupova Lindelöfovog nula-dimenzionalnog prostora X postoji OZ-podskup U od X takav da je $A \subset U \subset X \setminus B$.

Za svaku točku x prostora X odaberimo OZ-podskup W_x od X koji sadrži x i zadovoljava relaciju $A \cap W_x = \emptyset$ ili relaciju $B \cap W_x = \emptyset$.

Postojanje skupa W_x obrazlažemo ovako. Kako su A i B potpuno razdvojeni, postoji neprekidna funkcija $f : X \to I$ takva da je $f(A) \subset \{0\}$ i $f(B) \subset \{1\}$. Ako je $f(x) = 0$, onda je $W = f^{-1}([0, 1))$ otvorena okolina od x u X koja ne siječe skup B. Jer je X nula-dimenzionalan, on ima bazu topologije od OZ-podskupova, pa je moguće naći OZ-podskup W_x takav da je $x \in W_x \subset W$. Potpuno simetričan je slučaj kada je $f(x) = 1$, dok za $f(x) \in (0, 1)$ na sličan način možemo odabrati OZ-podskup W_x koji ne siječe ni A ni B.

Tako smo izgradili otvoreni pokrivač $\{W_x\}_{x \in X}$ od X. Budući da je prostor X Lindelöfov, taj pokrivač ima prebrojivi potpokrivač, pa postoji niz $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ točaka prostora X takav da je $\{W_{x_i}\}_{i=1}^\infty$ pokrivač od X.

Ako za svaki prirodan broj i stavimo $U_i = W_{x_i} \setminus \cup_{j<i} W_{x_j}$, onda dobijemo niz u parovima disjunktnih OZ-podskupova koji prekrivaju čitavi prostor X. Zato je $U = \cup\{ U_i \,:\, A \cap U_i \neq \emptyset \}$ traženi OZ-podskup. $\square$

KOROLAR 23.1. *Svaki neprazan regularan prostor X s prebrojivo mnogo elemenata je jako nula-dimenzionalan.*

DOKAZ. Kako je X Lindelöfov prostor, dovoljno je pokazati da X ima bazu topologije od OZ-podskupova. Da bi smo to pokazali, neka su točka x i otvorena okolina U od x u X dane. Jer su prebrojivi regularni prostori normalni (pa stoga i potpuno regularni), postoji neprekidna funkcija $f : X \to I$ takva da je $f(x) = 0$ i $f(A) \subset \{1\}$. Sada iskoristimo pretpostavku da je X prebrojiv da ustanovimo postojanje broja ξ iz $I = [0,\, 1]$ koji ne pripada slici $f(X)$. Dakle,

$$V = f^{-1}([0,\, \xi)) = f^{-1}([0,\, \xi])$$

je traženi OZ-podskup koji sadrži točku x a sadržan je u okolini U. $\square$

TEOREM 23.10. *Za neprazne lokalno kompaktne parakompaktne topološke prostore svojstva nasljedne nepovezanosti, nula-dimenzionalnosti, i jake nula-dimenzionalnosti su ekvivalentna.*

DOKAZ. Jer su nula-dimenzionalni prostori uvijek nasljedno nepovezani i jako nula-dimenzionalni prostori su uvijek nula-dimenzionalni, stoga je dovoljno pokazati da je svaki neprazni lokalno kompaktan parakompaktan nasljedno nepovezan prostor X jako nula-dimenzionalan. Daljnu redukciju postižemo ako se prisjetimo da se svaki neprazni lokalno kompaktan parakompaktan prostor može prikazati kao unija familije u parovima disjunktnih OZ-podskupova svaki sa Lindelöfovim svojstvom. Zato je dovoljno pokazati da za svaku točku $x \in X$ i svaku okolinu U od x u X postoji OZ-podskup V od X takav da je $x \in V \subset U$.

Za dane x i U, odaberimo otvorenu okolinu W od x u X takvu da je $W \subset U$ i da je zatvarač $\overline{W}$ kompaktan. Lagano vidimo da se jednočlani skup $\{x\}$ u $\overline{W}$ podudara sa presjekom familije $\mathcal{Z}$ svih OZ-podskupova od $\overline{W}$ koji sadrže točku x. Zato, postoji prirodan broj k i članovi $Z_1, \ldots,$ Z_k familije $\mathcal{Z}$ takvi da je $x \in V \subset W$, gdje je $V = \cap_{i=1}^{k} Z_i$. Skup V je zatvoren u X jer je zatvoren u $\overline{W}$. On je također otvoren u X budući da je otvoren u W. $\square$

TEOREM 23.11. *Za sve neprazne kompaktne topološke prostore svojstva nasljedne nepovezanosti, nula-dimenzionalnosti, i jake nula-dimenzionalnosti su ekvivalentna.*

TEOREM 23.12. *Svaki potprostor nasljedno nepovezanog topološkog prostora je nasljedno nepovezan. Svaki neprazni potprostor nula-dimenzionalnog prostora je nula-dimenzionalan.*

TEOREM 23.13. *Ako je prostor X jako nula-dimenzionalan prostor, onda je svaki neprazan podskup A od X koji ima svojstvo da se svaka* *neprekidna funkcija $f : A \to I$ dade proširiti do neprekidne funkcije $g : X \to I$ također jako nula-dimenzionalan prostor.*

KOROLAR 23.2. *Svaki neprazni zatvoreni potprostor normalnog jako nula-dimenzionalnog prostora je jako nula-dimenzionalan prostor.*

Može se pokazati da postoje jako nula-dimenzionalni prostori s potprostorima koji nisu jako nula-dimenzionalni prostori.

TEOREM 23.14. *Stone-Čechova kompaktifikacija βX potpuno regularnog prostora X je jako nula-dimenzionalan prostor ako i samo ako je prostor X jako nula-dimenzionalan.*

DOKAZ. Prethodni teorem daje nam jednu implikaciju, pa preostaje dokazati da je βX jako nula-dimenzionalan prostor ako je X jako nula-dimenzionalan prostor.

Neka je A, B par potpuno razdvojenih podskupova od βX i neka je $f : \beta X \to I$ neprekidna funkcija za koju je $f(A) \subset \{0\}$ i $f(B) \subset \{1\}$. Skupovi $C = X \cap f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ i $D = X \cap f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ su potpuno razdvojeni podskupovi od X. Kako je X po pretpostavci jako nula-dimenzionalan, postoji OZ-podskup U prostora X takav da je $C \subset U$ i $U \subset X \setminus D$. Slijedi da je zatvarač $\overline{U}$ od U u βX istovremeno otvoren i zatvoren (tj, $\overline{U}$ je OZ-podskup od βX). S druge strane, vrijede inkluzije $A \subset \overline{C}$ i $B \subset \overline{D}$. Budući da skup $\overline{D}$ ne siječe skup $\overline{U}$, slijedi

$$A \subset \overline{C} \subset \overline{U} \subset \beta X \setminus \overline{D} \subset \beta X \setminus B.$$

Zato je βX jako nula-dimenzionalan. □

Kasnije ćemo pokazati da prethodni teorem ne vrijedi za nasljednu nepovezanost i za nula-dimenzionalnost.

TEOREM 23.15. *Suma $\bigoplus_{j \in J} X_j$ neprazne familije nepraznih topoloških prostora je nasljedno nepovezana ako i samo ako su svi članovi X_j nasljedno nepovezani. Isto vrijedi i za svojstva nula-dimenzionalnosti i jake nula-dimenzionalnosti.*

TEOREM 23.16. *Produkt $P = \prod_{j \in J} X_j$ neprazne familije nepraznih prostora je nasljedno nepovezan ako i samo ako su svi faktori X_j nasljedno nepovezani.*

DOKAZ. Kako je svaki faktor X_j homeomorfan potprostoru produkta P, dovoljno je pokazati da je P nasljedno nepovezan ako su svi faktori X_j nasljedno nepovezani. Ali to slijedi neposredno iz Teorema 20.6 gdje smo pokazali da je komponenta točke produkta produkt komponenti njenih koordinata. □

KOROLAR 23.3. *Limes inverznog sistema nasljedno nepovezanih prostora je nasljedno nepovezan prostor.*

TEOREM 23.17. *Direktni produkt $\prod_{j \in J} X_j$ neprazne familije nepraznih topoloških prostora je nula-dimenzionalan ako i samo ako su svi faktori X_j nula-dimenzionalni.*

DOKAZ. Kako je svaki faktor X_j homeomorfan potprostoru produkta P, prema Teoremu 23.12, dovoljno je pokazati da je P nula-dimenzionalan ako su svi faktori X_j nula-dimenzionalni. Ali to slijedi neposredno iz činjenice da produkti oblika $\prod_{j\in J} U_j$ gdje je svaki faktor U_j neki OZ-podskup od X_j i postoji konačan podskup K od J takav da je $U_j = X_j$ za svaki $j \in K$ tvore bazu topologije produkta P i njegovi su OZ-podskupovi. $\square$

KOROLAR 23.4. *Limes inverznog sistema nula-dimenzionalnih prostora je ili prazan skup ili nula-dimenzionalan prostor.*

Postoje vrlo složeni primjeri koji pokazuju da produkt dva jako nula-dimenzionalnih prostora ne mora biti jako nula-dimenzionalan prostor. Nešto je lakše pokazati da limes inverznog niza jako nula-dimenzionalnih prostora ne mora biti jako nula-dimenzionalan.

TEOREM 23.18. *Cantorova kocka $D^{\mathfrak{m}}$ je nula-dimenzionalna i svaki se nula-dimenzionalan prostor težine $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ može uložiti u $D^{\mathfrak{m}}$.*

DOKAZ. Jer je dijada $D = \{0, 1\}$ (sa diskretnom topologijom) (jako) nula-dimenzionalan prostor, iz Teorema 23.17 slijedi da je Cantorova kocka $D^{\mathfrak{m}}$ nula-dimenzionalna za svaki kardinalni broj $\mathfrak{m}$.

Neka je X nula-dimenzionalan prostor težine $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$. Primjetimo da postoji skup K sa točno $\mathfrak{m}$ elemenata i baza $\{U_k\}_{k\in K}$ topologije prostora X od OZ-podskupova. Za svaki element k skupa K definirajmo neprekidnu funkciju $f_k : X \to D_k$ pravilom

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in U_k, \\ 0, & \text{za } x \in X \setminus U_k, \end{cases}$$

gdje je $D_k = D$ za svaki $k \in K$. Očigledno je funkcija

$$f : X \to D^{\mathfrak{m}} = \prod_{k\in K} D_k$$

definirana sa $f(x) = (f_k(x))_{k\in K}$ ulaganje prostora X u Cantorovu kocku $D^{\mathfrak{m}}$. $\square$

KOROLAR 23.5. *Svaki nula-dimenzionalan prostor X težine $\mathfrak{m}$ ima nula-dimenzionalnu kompaktifikaciju težine $\mathfrak{m}$.*

DOKAZ. Možemo pretpostaviti da je kardinalni broj $\mathfrak{m}$ beskonačan. Neka je f ulaganje prostora X u Cantorovu kocku $D^{\mathfrak{m}}$. Onda je zatvarač $\overline{f(X)}$ kopije $f(X)$ prostora X u kocki tražena kompaktifikacija. $\square$

Prisjetimo li se da je svaki kompaktan prostor beskonačne težine $\mathfrak{m}$ slika zatvorenog podskupa Cantorove kocke $D^{\mathfrak{m}}$ pri neprekidnoj funkciji, vidimo da postoji zatvoreni podskup X Cantorovog skupa $D^{\aleph_0}$ i neprekidna funkcija f od X na jedinični zatvoreni segment I. Primjetimo da je kvocijentni prostor $X/E(f)$ homeomorfan sa I, gdje je relacija ekvivalencije $E(f)$ na X definirana sa $x\,E(f)\,y$ ako i samo ako je $f(x) = f(y)$ za $x,\, y \in X$. Tako smo pokazali da kvocijentna preslikavanja ne čuvaju niti jedno od vrsta nepovezanosti koje sada promatramo: nasljednu nepovezanost, nula-dimenzionalnost, i jaku nula-dimenzionalnost.

Primjer 23.1. Svaki neprazan diskretan topološki prostor je jako nula-dimenzionalan.

Prostor W svih rednih brojeva koji su manji ili jednaki prvom neprebrojivom rednom broju ω_1 je očigledno nula-dimenzionalan a jer je on kompaktan (i stoga Lindelöfov) slijedi da je W jako nula-dimenzionalan. Neka nam W_0 bude oznaka za skup svih prebrojivih rednih brojeva (tj, W_0 je komplement jednočlanog skupa $\{\omega_1\}$ u W). Lagano se vidi da se svaka neprekidna funkcija na W_0 sa vrijednostima u jediničnom zatvorenom segmentu I dade proširiti neprekidno na cijeli prostor W. Stoga slijedi da je potprostor W_0 također jako nula-dimenzionalan.

Slično se lagano provjeri da je Sorgenfreyov pravac S nula-dimenzionalan a kako je on Lindelöfov prostor, slijedi da je isto jako nula-dimenzionalan.

Budući da su svi intervali realnih brojeva povezani, slijedi da nula-dimenzionalan potprostor X pravca nesmije sadržavati niti jedan interval (tj. nesmiju postojati realni brojevi a i b takvi da je $a < b$ i $(a,\, b) \subset X$). Lagano je dokazati da vrijedi i obrat te tvrdnje. Dakle, neprazni potprostor realnog pravca je jako nula-dimenzionalan ako i samo ako ne sadrži niti jedan interval. U posebnom, skup svih racionalnih i skup svih iracionalnih su jako nula-dimenzionalni. Sada slijedi da su potprostori Euklid-skog n-prostora $\mathbb{R}^n$, n-dimenzionalne kocke I^n, i Hilbertove kocke $I^{\aleph_0}$ koji sadrže samo točke sa svim koordinatama racionalnim brojevima jako nula-dimenzionalni. Isto vrijedi i za njihove potprostore koji sadrže samo točke sa svim koordinatama iracionalnim brojevima.

Lagano se uvjeriti da je Baireov prostor $B(\mathfrak{m})$ nula-dimenzionalan. Može se pokazati da je on čak jako nula-dimenzionalan. Nadalje, postoji primjer (od P. Erdös-a) nasljedno nepovezanog separabilnog metričkog prostora koji nije nula-dimenzionalan.

.... $\boxed{5}$ ....

24. Kompaktnost

Definicija 24.1. Neka je X topološki prostor. Za familiju

$$\mathcal{U} = \{\, U_\alpha \,:\, \alpha \in A \,\}$$

podskupova U_α od X kažemo da je *pokrivač* od X ako je

$$X = \bigcup \{ U_\alpha \,:\, \alpha \in A \}.$$

Drugim riječima, svaki element od X leži u nekom članu familije $\mathcal{U}$.

DEFINICIJA 24.2. Ako su svi članovi U_α pokrivača $\mathcal{U}$ otvoreni skupovi onda kažemo da je $\mathcal{U}$ *otvoreni pokrivač*. Slično se definiraju i *zatvoreni pokrivači*, *povezani pokrivači*, i ostali srodni pojmovi.

DEFINICIJA 24.3. Već prema prirodi skupa A kojim je indeksiran pokrivač $\mathcal{U}$ razlikujemo *konačne, prebrojive, beskonačne,...* pokrivače. Tako konačan pokrivač ima konačno mnogo članova a prebrojiv ima prebrojivo mnogo članova.

DEFINICIJA 24.4. Bilo koja podfamilija pokrivača koja je i sama pokrivač naziva se *potpokrivač*. Prema tome, ako je $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \,:\, \alpha \in A \}$ neki pokrivač prostora X i B je podskup of A takav da je i familija $\mathcal{V} = \{ U_\beta \,:\, \beta \in B \}$ također pokrivač od X, onda je $\mathcal{V}$ potpokrivač od $\mathcal{U}$.

DEFINICIJA 24.5. Neka su $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ i $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in B\}$ dva pokrivača prostora X. Kažemo da $\mathcal{V}$ *profinjuje* $\mathcal{U}$ ili da je $\mathcal{V}$ *profinjenje* od $\mathcal{U}$ i pišemo $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$ ako za svaki $\alpha \in A$ postoji $\beta \in B$ takav da je V_β podskup od U_α. Ponekad ćemo relaciju $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$ opisivati tako da kažemo da je pokrivač $\mathcal{V}$ *upisan* u pokrivač $\mathcal{U}$.

Primjetimo da je svaki potpokrivač profinjenje i da ako je $\mathcal{B}$ baza topologije na prostoru X onda je $\mathcal{B}$ pokrivač od X i za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ postoje profinjenja $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ koja se sastoje samo od članova od $\mathcal{B}$. I doista, za svaki $U \in \mathcal{U}$ i svaki $x \in U$ postoji $B_{(U,\,x)} \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_{(U,\,x)} \subset U$. Onda je $\mathcal{V} = \{B_{(U,\,x)} : U \in \mathcal{U},\, x \in U\}$ jedno takvo profinjenje. Prema tome, slijedi da svaki otvoreni pokrivač separabilnog metričkog prostora ima prebrojivo profinjenje.

DEFINICIJA 24.6. Prostor zovemo *Lindelöffovim* ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima prebrojivo otvoreno profinjenje.

Sada gornju primjedbu možemo iskazati ovako: Svaki separabilni metrički prostor je Lindelöffov prostor.

DEFINICIJA 24.7. Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima otvoreno konačno profinjenje.

DEFINICIJA 24.8. Podskup topološkog prostora je *kompaktan* ako je on kompaktan prostor u relativnoj topologiji. Dakle, ako je $(X,\, \mathcal{T})$ topološki prostor, onda će $A \subset X$ biti kompaktan ako je $(A,\, \mathcal{T}|_A)$ kompaktan topološki prostor.

PRIMJER 24.1. Očigledno je da su topološki prostori na konačnim skupovima kompaktni jer imaju konačne baze. Zato je svaki konačan podskup u topološkom prostoru kompaktan. Kasnije ćemo pokazati da je podskup Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ kompaktan onda i samo onda ako je zatvoren i omeđen. Zato su zatvoreni konačni segmenti $[a,\, b\,]$ na pravcu $\mathbb{R}$ i jedinična kružnica $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ i zatvoreni jedinični disk $B^2 = \{z : |z| \leq 1\}$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ kompaktni. S druge strane, otvoreni segmenti (a, b) (uključujući i čitav pravac $\mathbb{R}$) i otvoreni jedinični disk $\overset{\circ}{B}{}^2 = \{z : |z| < 1\}$ su primjeri nekompaktnih topoloških prostora. Svaki diskretan beskonačan prostor također nije kompaktan.

Teorem 24.1. *Jedinični zatvoreni segment $I = [0,\, 1]$ je kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ bilo koji otvoreni pokrivač od I. Označimo sa S skup svih t iz I takvih da konačno mnogo članova od $\mathcal{U}$ prekriva segment $[0,\, t]$. Primjetimo da skup S sigurno nije prazan jer je početak 0 svakako u S budući da neki član od $\mathcal{U}$ prekriva 0 pa segment $[0,\, 0]$ možemo prekriti s jednim članom pokrivača $\mathcal{U}$. Naš cilj je pokazati da drugi kraj 1 također pripada skupu S. Jednom kada to pokažemo, onda slijedi da I prekriva konačno mnogo članova od $\mathcal{U}$ pa $\mathcal{U}$ sigurmo ima konačno otvoreno profinjenje jer ima čak konačan potpokrivač.

Budući da je S neprazan i omeđen (jer je podskup omeđenog skupa I), prema svojstvu neprekidnosti realnih brojeva on ima supremum $s \in I$. Pokazati ćemo da je $s \in S$ i da je $s = 1$. Time ujedno pokazujemo da je $1 \in S$ što nam je cilj.

Odaberimo $\alpha \in A$ takav da U_α prekriva broj s. Kako je U_α otvoren skup i s je supremum skupa S sigurno postoji $t \in S$ takav da je $t \leq s$ i $[t,\, s] \subset U_\alpha$. Jer je t u skupu S, postoji konačan podskup B od A takav da $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ prekriva $[0,\, t]$. Skup $C = B \cup \{\alpha\}$ (unija skupa B i jednočlanog skupa koji se sastoji samo od indeksa α) je konačan i familija $\{U_\gamma\}_{\gamma \in C}$ očigledno prekriva $[0, s]$. Zato s pripada skupu S.

Na kraju, pretpostavimo da je $s < 1$. Opet odaberimo $\alpha \in A$ takav da U_α prekriva broj s. Kako je U_α otvoren skup i s je supremum skupa S sigurno postoje $t_1 \in S$ i $t_2 \in I$ takvi da je $t_1 \leq s < t_2 \leq 1$, i $[t_1,\, t_2] \subset U_\alpha$. Jer je t_1 u skupu S, postoji konačan podskup D od A takav da $\{U_\delta\}_{\delta \in D}$ prekriva $[0,\, t_1]$. Skup $E = D \cup \{\alpha\}$ je konačan i familija $\{U_\xi\}_{\xi \in E}$ očigledno prekriva $[0, t_2]$. Tako smo dobili da je broj t_2 koji je strogo veći od broja s u skupu S. No to se protivi pretpostavci da je s supremum skupa S. $\square$

Teorem 24.2. *Topološki prostor je kompaktan onda i samo onda ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ bilo koji otvoreni pokrivač topološkog prostora X. Po pretpostavci, u pokrivač $\mathcal{U}$ možemo upisati konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in B\}$. Za svaki $\beta \in B$ odaberimo $\alpha(\beta)$ u A tako da je $V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. Onda je $\{U_{\alpha(\beta)}\}_{\beta \in B}$ očigledno konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$.

$(\Leftarrow)$. Ova implikacija je jasna jer je svaki potpokrivač upisan u pokrivač. $\square$

TEOREM 24.3. *Realni pravac $\mathbb{R}$ s uobičajenom topologijom nije kompaktan.*

DOKAZ. Za svaki cijeli broj n neka je $U_n = (n-1,\, n+1)$ (tj. U_n je otvoreni segment od $n-1$ do $n+1$). Primjetimo da jedino interval U_n pokriva broj n. Zato je jasno da je $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$ otvoreni pokrivač od $\mathbb{R}$ bez konačnih potpokrivača. □

TEOREM 24.4. *Ako je $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija kompaktnog topološkog prostora X na topološki prostor Y, onda je prostor Y također kompaktan. Dakle, neprekidne funkcije čuvaju kompaktnost.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in B\}$ pokrivač prostora Y nepraznim otvorenim skupovima. Primjetimo da je praslika $U_\beta = f^{-1}(V_\beta)$ za svaki $\beta \in B$ neprazni otvoreni podskup od X jer je f surjekcija i jer inverz neprekidne funkcije prevodi otvorene skupove kodomene u otvorene skupove domene. Po pretpostavci, postoji konačan podskup A od B takav da familija $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ prekriva X. Jasno je da je familija $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$. □

KOROLAR 24.1. *Kompaktnost je topološka invarijanta. Drugačije rečeno, bilo koji prostor homeomorfan kompaktnom prostoru je i sam kompaktan.*

Prisjetimo se da familija $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ podskupova skupa S ima *svojstvo konačnih presjeka* ako je za svaki konačan podskup F indeksnog skupa A presjek

$$\bigcap\{S_\alpha \,:\, \alpha \in F\}$$

neprazan. Primjetimo da svaki silazni niz nepraznih podskupova ima svojstvo konačnih presjeka.

TEOREM 24.5. *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako u njemu svaka familija $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ zatvorenih podskupova sa svojstvom konačnih presjeka ima neprazan presjek $\bigcap\{F_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ svih članova.*

DOKAZ. Slijedi iz činjenice da familija $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ zatvorenih podskupova topološkog prostora X sa svojstvom konačnih presjeka ima presjek $\bigcap\{F_\alpha \,:\, \alpha \in A\}$ svih svojih članova prazan onda i samo onda ako je $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otvoreni pokrivač od X bez konačnog potpokrivača. □

KOROLAR 24.2. *U kompaktnom prostoru svaki silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova ima neprazan presjek.*

25. Osnovna svojstva kompaktnosti

TEOREM 25.1. *Zatvoreni podskupovi kompaktnog prostora su kompaktni.*

Dokaz. Neka je Z zatvoreni podskup kompaktnog prostora X i neka je familija $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in B\}$ otvoreni pokrivač od Z. Dakle, svaki V_β je otvoreni skup u relativnoj topologiji na Z pa za svaki $\beta \in B$ postoji otvoreni skup U_β u X takav da je $V_\beta = Z \cap U_\beta$ (tj. V_β je jednak presjeku U_β sa podskupom Z). Sada nam familija $\{X \setminus Z\} \cup \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ sigurno prekriva čitavi prostor X i očigledno se sastoji od otvorenih podskupova od X. Po pretpostavci, postoji konačan podskup A od B takav da $\{X \setminus Z\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prekriva X. Sada je jasno da je $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{V}$. $\square$

Teorem 25.2. *U Hausdorffovom prostoru kompaktni podskupovi su zatvoreni.*

Dokaz. Neka je X Hausdorffov prostor i naka je K kompaktan podskup od X. Da pokažemo da je skup K zatvoren, dovoljno je vidjeti da je komplement otvoren. To će sigurno vrijediti ako pokažemo da svaka točka x izvan K ima (otvorenu) okolinu U koja ne siječe K.

Po pretpostavci, za svaku točku y skupa K postoje disjunktni otvoreni skupovi U_y i V_y takvi da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$. Familija $\{K \cap V_y\}_{y \in K}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa K pa postoji konačan podskup F od K takav da familija $\{V_y\}_{y \in F}$ prekriva K. Neka je

$$U = \cap\{U_y : y \in F\}$$

(tj. U je presjek konačno mnogo okolina točke x među okolinama U_y koje su indeksirane točkama iz skupa F). Lagano je provjeriti da je U tražena okolina. $\square$

Teorem 25.3. *Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz. Neka su F i G dva disjunktna zatvorena podskupa kompaktnog metričkog prostora X. Moramo naći disjunktne otvorene skupove U i V takve da je $F \subset U$ i $G \subset V$.

Prvo kao i u dokazu Teorema 25.2, za svaku točku x skupa F možemo naći otvorenu okolinu U_x od x i otvorenu okolinu V_x zatvorenog skupa G takve da je $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Familija $\{U_x\}_{x \in F}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog skupa F (koji je zatvoreni podskup kompaktnog prostora). Zato postoji konačan podskup D od F takav da $\{U_d\}_{d \in D}$ prekriva F. Onda su $U = \cup\{U_d : d \in D\}$ i $V = \cap\{V_d : d \in D\}$ traženi otvoreni skupovi. $\square$

26. Karakterizacija kompaktnih skupova u $\mathbb{R}^n$

Propozicija 26.1. *Svaki kompaktni metrički prostor je omeđen.*

Dokaz. Neka je metrički prostor (X, d) kompaktan. Neka je

$$\mathcal{U} = \{K(x, 1)\}_{x \in X}$$

pokrivač od X otvorenim kuglama radijusa 1 (jedan). Zbog kompaktnosti, postoji konačan podskup F od X takav da familija $\{K(x, 1)\}_{x \in F}$

prekriva X. Kako svaka kugla radijusa jedan ima dijametar najviše dva, zaključujemo da je X omeđen kao konačna unija omeđenih skupova. $\square$

KOROLAR 26.1. *Kompaktni podskupovi bilo kojeg metričkog prostora su omeđeni i zatvoreni.*

DOKAZ. To je neposredna posljedica prethodne propozicije i Teorema 25.2. $\square$

Primjer skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa diskretnom metrikom

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \neq y \\ 0, & \text{ako je } x = y, \end{cases}$$

pokazuje da obrat prethodnog korolara nije istinit. Naš cilj je pokazati da on ipak vrijedi u Euklidskim prostorima.

DEFINICIJA 26.1. Topološki prostor X je *prebrojivo kompaktan* ako u njemu svaki prebrojivi otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač. S druge strane, X zovemo *nizovno kompaktnim* ako je on Hausdorffov i ako svaki niz u X ima konvergentan podniz.

Svaki kompaktan topološki prostor je prebrojivo kompaktan prostor. Točnije, očigledno vrijedi slijedeći teorem.

TEOREM 26.1. *Topološki prostor je kompaktan onda i samo ako je Lindelöffov i prebrojivo kompaktan.*

Primjetimo da se Bolzano-Weierstrassov Teorem ovim nazivljem može iskazati ovako: Svaki zatvoreni i omeđeni podskup Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je nizovno kompaktan.

LEMA 26.1. *Svaki nizovno kompaktan topološki prostor je prebrojivo kompaktan.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ prebrojivi otvoreni pokrivač nizovno kompaktnog prostora X. Ako pretpostavimo da pokrivač $\mathcal{U}$ nema konačnih potpokrivača, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo naći točku x_k izvan unije $\cup_{i=1}^k U_i$ prvih k članova pokrivača $\mathcal{U}$. Tako smo dobili niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u X. Kako je prostor X nizovno kompaktan, postoji točka x_0 u X kojoj neki podniz x_{k_j} niza x_k konvergira. Odaberimo $i \in \mathbb{N}$ tako da skup U_i sadrži točku x_0. Jer gotovo svi članovi podniza x_{k_j} leže u skupu U_i mora postojati dovoljno velika vrijednost indeksa j takva da je $k_j > i$ i da točka x_{k_j} pripada skupu U_i. No, s druge strane, točka x_{k_j} ne može biti u skupu U_i jer je $k_j > i$. $\square$

TEOREM 26.2. *Podskup Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.*

DOKAZ. $(\Rightarrow)$. Kako je Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ metrički prostor, kompaktan podskup je zatvoren i omeđen prema Korolaru 26.1.

($\Leftarrow$). Neka je K zatvoreni i omeđeni podskup od $\mathbb{R}^n$. Budući da prostor $\mathbb{R}^n$ ima prebrojivu bazu, njegov podskup K je također ima prebrojivu bazu. Zato je K Lindelöffov prostor. Kako je prema Bolzano-Weierstrassovom Teoremu K i nizovno kompaktan, iz Leme 26.1 slijedi da je K prebrojivo kompaktan. Na kraju, iz Teorema 26.1 dobivamo željeni zaključak da je K kompaktan. $\square$

27. Produkt kompaktnih prostora

Ovdje ćemo dokazati poseban slučaj slijedećeg Teorema A. Tihonova.

Teorem 27.1. *Produkt $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ prostora je kompaktan ako i samo ako je svaki faktor X_α kompaktan.*

Implikacija ($\Rightarrow$) slijedi iz činjenice da je projekcija produkta na bilo koji od faktora neprekidna surjekcija i da je kompaktnost očuvana pod takvim funkcijama.

Obrnuta implikacija je mnogo teža i dokazuje se upotrebom nekog od ekvivalenata Aksioma Izbora. Mi ćemo se zadovoljiti dokazom slučaja produkta konačno mnogo prostora. Taj slučaj se lagano dokazuje indukcijom iz slijedećeg teorema.

Teorem 27.2. *Direktni produkt $X \times Y$ dva kompaktna prostora X i Y je kompaktan prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$ otvoreni pokrivač od $X \times Y$. Kako produkti $U \times V$, gdje je U otvoren u X i V je otvoren u Y, čine bazu topologije na $X \times Y$, možemo pretpostaviti da je svaki skup W_α produkt $U_\alpha \times V_\alpha$ pri čemu je U_α otvoren u X a V_α je otvoren u Y.

Za bilo koji $x \in X$, produkt $Z = \{x\} \times Y$ je kompaktan podskup od $X \times Y$ homeomorfan prostoru Y. Kako je $\{Z \cap W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otvoreni pokrivač od Z, postoji konačan podskup A_x od A takav da familija

$$\{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in A_x\}$$

prekriva Z. Neka je U_x presjek svih onih otvorenih skupova U_α takvih da je $\alpha \in A_x$ i $x \in U_\alpha$. Jer je A_x konačan skup, U_x je otvorena okolina točke x pa je $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ otvoreni pokrivač kompaktnog prostora X. Odaberimo konačan podskup K od X takav da familija $\{U_x\}_{x \in K}$ prekriva X. Očigledno je $\{U_x \times V_\beta : x \in X,\, \beta \in A_x\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{W}$. $\square$

28. Neprekidne funkcije na kompaktnim prostorima

Teorem 28.1. *Svaka neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ kompaktnog topološkog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je inverz $g : Y \to X$ od f neprekidna funkcija. Drugim riječima, da je praslika $g^{-1}(Z) = f(Z)$ bilo kojeg zatvorenog podskupa Z od X zatvoreni podskup od Y.

Neka je Z zatvoreni podskup od X. Jer je X kompaktan, skup Z je također kompaktan. Zato je njegova slika $f(Z)$ pri neprekidnoj funkciji isto kompaktna. Ali, prostor Y je Hausdorffov pa je $f(Z)$ zatvoreni podskup od Y. □

Primjetimo da funkcija $f : [0, 1) \to S^1$ polu-zatvorenog segmenta na jediničnu kružnicu u ravnini definirana sa $f(t) = e^{2\pi i t}$ za svaki $t \in [0, 1)$ pokazuje da se pretpostavka kompaktnosti prostora X u prethodnom teoremu ne može izostaviti.

TEOREM 28.2. *Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru postiže maksimum i minimum. Drugim riječima, ako je X kompaktan prostor i funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna, onda postoje točke a i b u X takve da je*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

za sve $x \in X$.

DOKAZ. Slika $f(X)$ prostora X je kompaktan podskup od $\mathbb{R}$. Zato je on također zatvoren i omeđen. Omeđenost povlači da $f(X)$ ima supremum s i infimum i. Zbog zatvorenosti slijedi da s i i oba pripadaju skupu $f(X)$. Dakle, $f(X)$ ima najveću i najmanju vrijednost. Sada za točke a i b možemo uzeti bilo koje točke iz nepraznih skupova $f^{-1}(i)$ i $f^{-1}(s)$ redom. □

KOROLAR 28.1. *Ako je $f : X \to \mathbb{R}$ realna funkcija na kompaktnom povezanom prostoru X, onda postoje realni brojevi c i d takvi da je $f(X) = [c, d]$.*

DOKAZ. Stavimo li $c = i$ i $d = s$ u dokazu prethodnog teorema, vidimo da je $f(X) \subset [c, d]$. Kada bi postojao broj e između c i d koji nije u skupu $f(X)$, onda bi $f^{-1}((-\infty, e))$ i $f^{-1}((e + \infty))$ bili otvoreni neprazni i disjunktni podskupovi od X koji bi u uniji davali čitav prostor X. Ali takav prikaz prostora X je nemoguć jer je on povezan po pretpostavci. Dakle, broj e ne postoji pa je $f(X) = [c, d]$. □

Znamo da je svaka uniformno neprekidna funkcija između metričkih prostora neprekidna i da obrat te tvrdnje općenito ne vrijedi jer je funkcija $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = \frac{1}{x}$ neprekidna a nije uniformno neprekidna funkcija. Slijedeći teorem pokazuje da obrat vrijedi ako je domena kompaktna. Za njegov dokaz upotrijebiti ćemo slijedeću lemu.

LEMA 28.1. *Za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji broj $\delta = \delta(\mathcal{U}) > 0$ takav da za svake dvije točke x i y u prostoru X kojih je udaljenost manja od broja δ neki član pokrivača sadrži istovremeno x i y.*

DOKAZ. Kad takvog broja ne bi bilo, za svaki prirodan broj i mogli bi smo naći par točka x_i i y_i takvih da je $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$ i da ne postoji član pokrivača $\mathcal{U}$ koji bi istovremeno sadržavao točke x_i i y_i.

Budući da je prostor X kompaktan, nizovi $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ imaju konvergentne podnizove. Dakle, možemo uzeti da su sami nizovi $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergentni. Uvjet $d(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$ povlači da se limesi ta dva konvergentna niza podudaraju (recimo sa točkom x_0). Neka je U_0 član pokrivača $\mathcal{U}$ koji sadrži točku x_0. To je okolina točke x_0 pa su gotovo svi članovi obaju nizova sadržani u U_0. Dakle, postoji dovoljno veliki indeks k takav da x_k i y_k pripadaju skupu U_0. Ali, to se protivi načinu izbora točka x_k i y_k. $\square$

TEOREM 28.3. *Svaka neprekidna funkcija $f : X \to Y$ kompaktnog metričkog prostora (X, d) u metrički prostor (Y, ϱ) je uniformno neprekidna funkcija.*

DOKAZ. Neka je $\varepsilon > 0$. Moramo naći $\delta > 0$ takav da za točke $x, y \in X$ relacija $d(x, y) < \delta$ povlači $\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Jer je funkcija f neprekidna, za svaki $x \in X$ postoji pozitivan broj δ_x takav da je $f(K_d(x, \delta_x)) \subset K_\varrho(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$ (tj. funkcija f preslikava otvorenu δ_x-kuglu oko točke x u otvorenu $\frac{\varepsilon}{2}$-kuglu oko točke $f(x)$).

Familija $\{K_d(x, \delta_x)\}_{x\in X}$ je otvoreni pokrivač kompaktnog prostora X pa postoji $\delta > 0$ sa svojstvom da bilo koje dvije točke x i y od X takve da je $d(x, y) < \delta$ leže u nekoj od kugala $K_d(z, \delta_z)$ $(z \in X)$. Lagano je sada provjeriti da je δ traženi broj. $\square$

29. Kompaktnost metričkih prostora

TEOREM 29.1. **(Cantorov Teorem)**. *Metrički prostor (X, ϱ) je potpun ako i samo ako svaki silazni niz $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ nepraznih zatvorenih podskupova od X čiji dijametri teže k nuli ima neprazan presjek $\cap_{i=1}^{\infty} F_i$.*

DOKAZ. $(\Rightarrow)$. Neka je $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ niz nepraznih zatvorenih podskupova nekog potpunog metričkog prostora (X, ϱ) i pretpostavimo da je

$$lim\ \delta(F_i) = 0, \tag{1}$$

tj. da ϱ-dijametri skupova F_i teže prema nuli kada indeks i neograničeno raste.

U svakom skupu F_i odaberimo točku x_i. Budući da sve točke s indeksom većim od prirodnog broja i leže u skupu F_i, pretpostavka (1) povlači da je $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u prostoru X. Zato on konvergira prema nekoj točki $x \in X$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$, jer je skup F_i zatvoren i x je limes niza $\{x_j\}_{j\geq i}$, zaključujemo da je točka x u skupu F_i. Dakle, presjek $\cap_{i=1}^{\infty} F_i$ je neprazan skup budući da sadrži točku x.

$(\Leftarrow)$. Neka je (X, ϱ) metrički prostor koji zadovoljava uvjet iz iskaza teorema i neka je $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u X. Za svaki prirodan broj i neka je F_i zatvarač u X skupa $\{x_i, x_{i+1}, \dots\}$. Jasno je da je $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova kojima ϱ-dijametri teže k nuli. Po pretpostavci, presjek $\cap_{i=1}^{\infty} F_i$ je neprazan skup. Neka je x točka iz tog presjeka. Tvrdimo da niz $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira prema x.

Neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Sada odaberimo prirodan broj i tako da vrijedi $\delta(F_i) < \varepsilon$. Kako su za svaki $j \geq i$ točke x i x_j obje u skupu F_i, vidimo da je $\varrho(x, x_j) < \varepsilon$ za svaki $j \geq i$. Dakle, $x = lim\ x_i$ i metrički prostor (X, ϱ) je potpun. $\square$

TEOREM 29.2. *Svaka metrika na kompaktnom prostoru je totalno omeđena.*

DOKAZ. Neka je X kompaktan prostor i pretpostavimo da metrika ϱ na prostoru X nije totalno omeđena. Onda sigurno postoji $\varepsilon > 0$ takav da za niti jedan konačan podskup K od X familija $\{K_\varrho(x, \varepsilon)\}_{x\in K}$ ne prekriva čitavi prostor X. Dakle, za svaki konačan niz $x_1, \ldots, x_n$ točaka prostora X možemo naći točku x_{n+1} takvu da je $\varrho(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$ za svaki $i \leq n$. Sada indukcijom možemo izgraditi niz $x_1, x_2, \ldots$ točka u prostoru X takvih da je $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ za svaki par različitih prirodnih brojeva i i j.

Promatrajmo sada skup $F = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Za svaku točku x prostora X izvan skupa F postoji njena okolina koja ne siječe F jer bi u protivnom postojale u F dvije različite točke na udaljenosti manjoj od ε. Dakle, skup F je zatvoren u X pa je zato kompaktan. Ali, to je nemoguće jer je F očigledno homeomorfan diskretnom metričkom prostoru sa prebrojivo beskonačno mnogo točka koji nije kompaktan. $\square$

TEOREM 29.3. *Svaka metrika na kompaktnom prostoru je potpuna.*

DOKAZ. Slijedi iz Cantorovog Teorema 29.1 jer u kompaktnom prostoru svaki silazni niz nepraznih zatvorenih skupova ima neprazan presjek (vidi Korolar 24.2). $\square$

TEOREM 29.4. *Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je potpun i potpuno omeđen.*

DOKAZ. $(\Rightarrow)$. Neposredno iz Teorema 29.3 i 29.2.

$(\Leftarrow)$. Neka je (X, ϱ) metrički prostor koji je istovremeno potpun i totalno omeđen. Za svaki prirodan broj i odaberimo konačan skup $F_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{k(i)}^i\}$ takav da familija $\{K_\varrho(x, \frac{1}{2i}) : x \in F_i\}$ prekriva prostor X. Neka je $K_x^i = K_\varrho(x, \frac{1}{2i})$ za svaki $x \in F_i$. Dakle, za svaki prirodan broj i vrijedi

$$X = \cup_{x\in F_i} K_x^i \text{ i } \qquad \delta(K_x^i) \leq \frac{1}{i} \text{ za svaki } x \in F_i. \tag{2}$$

Da bi smo pokazali da je prostor X kompaktan, mi ćemo pokazati da svaki beskonačan podskup B od X ima točku gomilanja.

Jer je B beskonačan skup, prvi od uvjeta (2) povlači da postoji $x_1 \in F_1$ takav da je presjek $B \cap K_{x_1}^1$ beskonačan. Neka B_1 bude kratka oznaka za taj presjek. Dakle, imamo

$$B \supset B_1, \qquad \delta(B_1) \leq 1, \qquad \text{i} \qquad B_1 \text{ je beskonačan.}$$

Na sličan način nađemo beskonačan skup B_2 koji je presjek skupa B_1 s nekim od skupova $K^2_{x_2}$ za $x_2 \in F_2$ tako da vrijedi

$$B \supset B_1 \supset B2, \qquad \text{i} \qquad \delta(B_2) \leq \frac{1}{2}.$$

Nastavljajući tako, indukcijom, možemo definirati niz beskonačnih skupova takvih da vrijedi

$$(3) \qquad B \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots, \text{ i } \delta(B_i) \leq \frac{1}{i} \quad \text{za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Iz Cantorovog Teorema 29.1 slijedi da u presjeku zatvarača skupova B_i postoji najmanje jedna točka x. Zbog (3), očigledno je da svaka okolina točke x sadrži neki od skupova B_i (tj. sadrži beskonačno mnogo točaka skupa B što ima za posljedicu da je x točka gomilanja od B. $\square$

TEOREM 29.5. *Za metrički prostor X slijedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

(1) *X je kompaktan.*
(2) *svaki beskonačan podskup u X ima bar jednu točku gomilanja.*
(3) *svaki niz u X ima bar jednu točku gomilanja.*
(4) *svaki niz u X ima konvergentan podniz.*
(5) *svaki niz $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ nepraznih zatvorenih podskupova u X ima neprazan presjek.*

DOKAZ. ((1) $\Rightarrow$ (2)). Neka je A beskonačan podskup kompaktnog metričkog prostora X. Kada skup A ne bi imao točaka gomilanja, svaka točka $x \in X$ imala bi okolinu U_x koja je disjunktna sa skupom A ili siječe skup A jedino u točki x. Familija $\{U_x\}_{x \in X}$ je otvoreni pokrivač od X. Jer je prostor X kompaktan, postoji konačan podskup K od X takav da $\{U_x\}_{x \in K}$ prekriva X. Iz načina kako smo odabrali skupove U_x slijedilo bi da je skup A konačan što se protivi našoj pretpostavci. U ovom dokazu nismo koristili pretpostavku da je X metrički prostor.

((2) $\Rightarrow$ (3)). Neka je $\sigma : \mathbb{N} \to X$ niz u metričkom prostoru X. Ako je skup $\sigma(\mathbb{N})$ vrijednosti niza σ konačan, očigledno postoji kofinalan podskup F od $\mathbb{N}$ i točka $x \in X$ takva da je $\sigma(i) = x$ za svaki $i \in F$. Ovdje kofinalnost znači da F ima svojstvo da za svaki $j \in \mathbb{N}$ postoji $i \in F$ takav da je $i > j$. Sada je jasno da je x točka gomilanja niza σ.

S druge strane, ako je $\sigma(\mathbb{N})$ beskonačan skup, onda po pretpostavci postoji neka točka x u X takva da svaka okolina od x u X siječe skup $\sigma(\mathbb{N})$ u bar jednoj točki različitoj od točke x. Tvrdimo da je x točka gomilanja niza σ.

I doista, neka su okolina U oko točke x i neki prirodan broj i zadani. Odaberimo okolinu V točke x unutar okoline U tako da $j < i$ i $\sigma(j) \neq x$ povlači $\sigma(j) \notin V$. Budući da okolina V mora sadržavati neki element skupa $\sigma(\mathbb{N})$ različit od točke x, sigurno postoji $k \geq i$ takav da $\sigma(k)$ pripada skupu V pa dakle i njegovom nadskupu U.

U dokazu ove implikacije koristili smo samo to da X zadovoljava aksiom separacije T_1.

((3) $\Rightarrow$ (4)). Neka je $\sigma : \mathbb{N} \to X$ niz u X. Moramo dokazati da postoji podniz τ od σ koji konvergira.

Po našoj pretpostavci, niz σ ima točku gomilanja x u prostoru X. Stavimo $f(1) = 1$. Pretpostavimo da smo već definirali brojeve

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n-1) < f(n).$$

Želimo sada definirati broj $f(n+1)$. To ćemo učiniti tako da nađemo prirodan broj $k > f(n)$ takav da je točka $\sigma(k)$ sadržana u kugli $K(x,\, \frac{1}{n})$ i stavimo $f(n+1) = k$.

Tako smo indukcijom definirali strogo uzlaznu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lagano se sada provjeri da podniz $\tau = \sigma \circ f$ od σ konvergira prema točki x.

Za dokaz ove implikacije koristili smo samo to da prostor X zadovoljava Prvi Aksiom Prebrojivosti.

((4) $\Rightarrow$ (5)). Neka je $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ silazni niz nepraznih zatvorenih podskupova u X. Odaberimo u svakom skupu F_k neku točku x_k. Time smo dobili niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ u X. Po pretpostavci, postoji točka $x \in X$ i podniz $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira prema x. Tvrdimo da točka x pripada svakom od skupova F_k.

I doista, kada bi postojao prirodan broj k takav da x leži izvan zatvorenog skupa F_k, onda (zbog toga što je komplement $X \setminus F_k$ okolina točke x i jer podniz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira prema x) slijedi da možemo naći prirodan broj n_0 takav da je x_{k_n} izvan skupa F_k za svaki $n \geq n_0$. Odaberimo sada broj $n \geq n_0$ tako da je $k_n \geq k$. To je moguće zato što je funkcija $n \mapsto k_n$ strogo uzlazna. Sada točka x_{k_n} mora biti istovremeno u skupu F_{k_n} (koji je podskup od F_k) i izvan skupa F_k što je nemoguće.

Primjetimo da ova implikacija vrijedi u bilo kakvim topološkim prostorima.

((5) $\Rightarrow$ (1)). Primjetimo da je svojstvo (5) očigledno jače od svojstva iz Cantorovog teorema (gdje se za neprazne zatvorene skupove F_i još traži da im dijametri teže k nuli), pa je metrički prostor $(X,\, \varrho)$ prema tom teoremu potpun.

Prema Teoremu 29.4, da bi smo pokazali da je prostor X kompaktan, preostaje dokazati da je on potpuno omeđen prostor (tj. da u njemu za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup K_ε takav da familija $\{K_\varrho(x,\, \varepsilon)\}_{x\in K_\varepsilon}$ prekriva X).

Pretpostavimo suprotno, to jest, da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki konačan podskup K od X familija $\{K_\varrho(x,\, \varepsilon)\}_{x\in K}$ ne prekriva čitavi prostor X. Sada se lagano matematičkom indukcijom može izgraditi niz $\sigma : \mathbb{N} \to X$ takav da za svaka dva različita prirodna broja i i j vrijedi $\varrho(\sigma_i,\, \sigma_j) \geq \varepsilon$. Neka je $F_i = \sigma(\{i,\, i+1,\, \ldots\})$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Skupovi F_i čine silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova prostora

X sa praznim presjekom što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom da (5) vrijedi. $\square$

TEOREM 29.6. *Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.*

DOKAZ. Za svaki prirodan broj i pokrivač $\mathcal{U}_i = \{K(x, \frac{1}{i})\}_{x \in X}$ od X otvorenim kuglama radijusa $\frac{1}{i}$ ima konačan potpokrivač. Dakle, postoji konačan podskup K_i od X takav da familija $\mathcal{V}_i = \{K(x, \frac{1}{i})\}_{x \in K_i}$ prekriva X. Onda je $S = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$ prebrojiv podskup od X. Tvrdimo da je on gust u X.

Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ dani. Dovoljno je pokazati da postoji $s \in S$ takav da je $d(x, s) < \varepsilon$. Odaberimo prirodan broj i takav da je $\frac{1}{i} < \varepsilon$. Zatim odaberimo $s \in K_i$ takav da x leži u skupu $K(s, \frac{1}{i})$. Sada je jasno da vrijedi $d(x, s) < \varepsilon$. $\square$

Literatura

[1] Zvonko Čerin, *Associating regular hexagons to centroid sharing triangles*, Kyungpook Mathematical Journal, **38** (1998), 223–226.

[2] Clark Kimberling, *Central points and central lines in the plane of a triangle*, Mathematics Magazine, **67** (1994), 163–187.

[3] Clark Kimberling, *Point-to-line distances in the plane of a triangle*, Rocky Mountain Journal of Math., **24** (1994), 1009–1026.

[4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, and V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.