# Teorija igara
# Matrične igre

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

# Sadržaj

## Definicija

Za danu bimatričnu igru $((A, B), (u, v))$ kažemo da je **matrična** ako je $u(x, y) = -v(x, y),\ x \in S_A, y \in S_B$.

U matričnoj igri, jedan igrač dobiva onoliko koliko drugi gubi. To se može interpretirati kao da jedan igrač isplaćuje drugog. Matrična igra je jedinstveno određena matricom isplate $U$ prvog igrača i $u(x, y) = x^\tau U y$.

## Teorem (minmax, von Neumann )

*Neka je dana matrična igra s matricom isplate $U$. Tada je $(\sigma^*, \tau^*)$ Nashova ravnoteža ako i samo ako*

$$\min_\tau \max_\sigma u(\sigma, \tau) = u(\sigma^*, \tau^*) = \max_\sigma \min_\tau u(\sigma, \tau)^1 \tag{1}$$

U dokazu teorema ćemo koristiti već dokazanu nejednakost

$$\max_\sigma \min_\tau u(\sigma, \tau) \le \min_\tau \max_\sigma u(\sigma, \tau). \tag{2}$$

[1] $v := u(\sigma^*, \tau^*)$ nazivamo **vrijednost igre**.

## Dokaz.

Neka je $(\sigma^*, \tau^*)$ Nashova ravnoteža. Tada

$$u(\sigma^*, \tau^*) \geq u(\sigma, \tau^*) \quad \forall \sigma \in \Sigma_A,$$
$$u(\sigma^*, \tau^*) \leq u(\sigma^*, \tau) \quad \forall \tau \in \Sigma_B, \text{ zbog } u = -v$$

odnosno

$$\max_\sigma u(\sigma, \tau^*) = u(\sigma^*, \tau^*) = \min_\tau u(\sigma^*, \tau)$$
$$\min_\tau \max_\sigma u(\sigma, \tau) \leq u(\sigma^*, \tau^*) \leq \max_\sigma \min_\tau u(\sigma, \tau) \tag{3}$$

što zajedno s (2) ishoduje jednakosti u (3).
Obratno. Jednakost (1) direktno implicira Nashovost od $(\sigma^*, \tau^*)$ jer je

$$u(\sigma^*, \tau^*) = \max_\sigma \min_\tau u(\sigma, \tau) \leq \max_\sigma u(\sigma, \tau^*)$$

Odakle slijedi jednakost $u(\sigma^*, \tau^*) = \max_\sigma u(\sigma, \tau^*)$. Na isti način

$$u(\sigma^*, \tau^*) = \min_\tau \max_\sigma u(\sigma, \tau) \geq \min_\tau u(\sigma^*, \tau)$$

odnosno $u(\sigma^*, \tau^*) = \min_\tau u(\sigma^*, \tau)$. □

Grafičko računaje NR najlakše je ilustrirati na igrama tipa $2 \times n$ i $m \times 2$, $m, n \geq 2$ pri čemu se koristi von Neumanov *minmax* teorem. Evo primjera:

## Primjer

U ovom primjeru matrica isplate je dana s

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Traži se Nashova ravnoteža $(\sigma, \tau)$. Prema *minmax teoremu*[2] je:

$$\begin{aligned} v = \min_y \max_x x^\tau U y &= \min_{y=[t\ 1-t]^\tau} \max_{i \in \{1,2,3\}} \{e_i^\tau U y\} \\ &= \min_{t \in [0,1]} \max \left\{ t+1, -3t+2, -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \right\} = \frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{4}$$

a postiže se za $t = \frac{1}{3}$ (skicirajte grafove). Dakle, $\tau = [\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}]^\tau$. Kako naći $\sigma$?

[2] Diskutirajte kada koristiti $\min_y \max_x$, a kada $\max_x \min_y$

## Primjer (nastavak)

Iskoristimo spoznaju da je $\tau = [\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}]^\tau$:

$$U\tau = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} =: U_\tau$$

i iskoristimo činjenicu da je

$$\sigma^\tau U_\tau = v.$$

Iskusan rješavatelj će uočiti da je $\sigma(a_2) = 0$ tj. da druga strategija prvog igrača nije u nosaču od $\sigma$ (nije aktivna). Zaista, ako je $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ onda

$$\frac{4}{3}\sigma^\tau e - \sigma^\tau e_2 = \frac{4}{3} \iff \sigma_2 = 0,$$

gdje je ($e = [1\ 1\ 1]^\tau$ stupac jedinica).

Gornji račun izražava činjenicu da je produkt drugog retka s $U_\tau$ jednak $u^2 U_\tau = 1 < \frac{4}{3}$, a skalarni produkti prvog i trećeg retka s $U_\tau$ su jednaki $\frac{4}{3}$.

## Primjer (nastavak)

Iskoristimo neaktivnost $\sigma_2$ i računamo NR reducirane matrične igre $\widehat{U}$ bez drugog retka. Opet koristimo von Neumanov teorem[3]

$$v = \max_x \min_y x^\tau \widehat{U} y = \max_{x=[t\ 1-t]} \min_{i\in\{1,2\}} \{x^\tau \widehat{U} e_i\}$$
$$= \max_t \left\{ t+1, -\frac{1}{2}t + \frac{2}{2} \right\} = \frac{4}{3},$$

a postiže se za $t = \frac{1}{3}$. Dakle, $\sigma = [\frac{1}{3}\ 0\ \frac{2}{3}]^\tau$.

*Napomena.* Matrica $\widehat{U}$ je simetrična pa je moguće zaključiti $[\sigma_1\ \sigma_3] = \tau$ i korištenjem te simetrije.

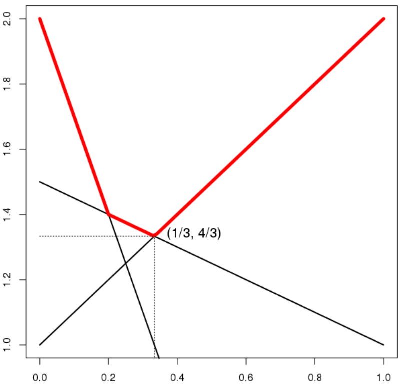
[3] ali ovaj put max min verziju.

## Primjer (nastavak, grafički prikaz)

min max zapis u formi (jedn. 4)

$$\min_{t\in[0,1]} \max\left\{t+1, -3t+2, -\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right\} = \frac{4}{3}$$

ima grafički prikaz u kojem su nacrtani pravci: $y = t+1, y = -3t+2$ i




$y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$, a crvenom bojom je nacrtana max-envelopa tih pravaca. Minimum envelope postiže se za vrijednost $t^* = \frac{1}{3}$ i iznosi $v = \frac{4}{3}$. Dakle,

$$\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{\tau}.$$

Aktivne komponente (u nosaču) od $\sigma$ su određene pravcima koji prolaze točkom $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ i to su $\{3, 1\}$.

## Definicija (Rješenje igre)

Rješenje matrične igre $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je uređena trojka $(\bar{x}, \bar{y}, v)$ takva da vrijedi

$$\bar{x}^\tau A y \geq v \ \forall y \in \Sigma_2 \tag{5}$$

$$x^\tau A \bar{y} \leq v \ \forall x \in \Sigma_1 \tag{6}$$

$$v = \bar{x}^\tau A \bar{y}. \tag{7}$$

Ako je $(\bar{x}, \bar{y})$ Nashova ravnoteža matrične igre onda je $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^\tau A \bar{y})$ rješenje i obratno.

Geometrijska interpretacija rješenja je sljedeća. Označimo s $C_v \in \mathbb{R}^n$ konus

$$C_v := \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid x \leq v \cdot \mathbb{1} \}, \tag{8}$$

gdje je $\mathbb{1}$ stupac jedinica i

$$H := \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x}^\tau x = v \}. \tag{9}$$

Očito je $C_v \subseteq H^-$, a (5) znači da je politop generira stupcima matrice $A$ podskup poluprostora $H^+$, a (6) povlači da je $A\bar{y} \in C_v \cap H$ (zadatak).

# Projekcija na konveksni skup

## Teorem

*Neka je $C \subset \mathbb{R}^n$ konveksan i zatvoren i $a \notin C$. Tada postoji jedinstveni element $\bar{a} \in C$ takav da je $\|a - \bar{a}\| \leq \|a - x\|, \forall x \in C$.*

Preslikavanje $P : \mathbb{R}^n \to C$ defiirano s $P(a) := \bar{a}$ je *projekcija* na $C$ (za $a \in C, P(a) := a$).

U daljnjem je $C$ *konveksan i zatvoren* i $\bar{a} = P(a)$ ako drugačije nije rečeno.

## Propozicija

*Pretpostavimo $a \notin C$. Tada $\forall x \in C$*

$$(x - \bar{a})^T (a - \bar{a}) \leq 0. \tag{10}$$

## Dokaz.

Označimo $x - \bar{a} =: t \cdot v, t > 0, \|v\| = 1.$

$$\begin{aligned} \|x - a\|^2 \geq & \|\bar{a} - a\|^2 \quad \text{(prema definiciji projekcije)} \\ \|x - \bar{a} + \bar{a} - a\|^2 = & \|x - \bar{a}\|^2 + 2(x - \bar{a})^\tau(\bar{a} - a) + \|\bar{a} - a\|^2 \\ \geq & \|\bar{a} - a\|^2 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 0 \leq & \|x - a\|^2 + 2(x - \bar{a})^\tau(\bar{a} - a) \\ = & t^2 + 2tv^\tau(\bar{a} - a) \end{aligned}$$

Podijelimo li s $t$ i $t \to 0$ dobije se $(x - a)^\tau(a - \bar{a}) \leq 0$. □

Ako je $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a - \bar{a})^\tau(x - \bar{a}) = 0\}$ hiperravnina onda je $C \subseteq H^-$, $a \in H^+$ i $C \cap H \neq \emptyset$. Takvu hiperravninu nazivamo *potpornom hiperravninom*, a $H^-$ je *potporanj* od $C$. $a - \bar{a}$ je normala hiperravnine koja gleda u smjeru vanjštine od $C$.

# Literatura