Teorija igara
Preferencije i korisnost

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

Sadržaj

1. Igre protiv prirode
    - Tablica odlučivanja
    - Očekivana korisnost
    - Stroga neizvjesnost
    - Milnorov teorem
2. Zadaci

Tablica odlučivanja

. . . nastavak slijedi

Očekivana korisnost

. . . nastavak slijedi

Stroga neizvjesnost. Neka pravila odlučivanja

. . . nastavak slijedi

Aksiomi stroge neizvjesnosti

. . . nastavak slijedi

Zadaci za vježbu.

Zadatak. Dokažite da svaka strogo rastuća transformacija korisnosti čuva čiste Nashove ravnoteže.

Rješenje.

Neka je profil $(a, b) \in A \times B$ NR, a matrica isplata: $\begin{array}{cc} & b_j \\ a_i & \boxed{u_{ij}, v_{ij}} \end{array}$

Neka su $u' = \phi(u)$ i $v' = \psi(u)$ strogo rastuće funkcije. Tada je:

$$u(a, b) \geq u(x, b) \iff u'(a, b) \geq u'(x, b), \ \forall x \in A.$$

$$v(a, b) \geq v(a, y) \iff v'(a, b) \geq v'(a, y), \ \forall y \in B.$$

Zadatak. Dokažite da strogo pozitivna afina transformacija korisnosti čuva miješanu Nashovu ravnotežu. Vrijedi li obrat?

Rješenje. (Za 2×2 matricu.) Dovoljno je promatrati samo korisnosti jednog igrača, napr. drugog. Neka je V matrica isplata u kojoj nema dominacije među stupcima:

$$V = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline a & \rightarrow & b \\ \hline c & \leftarrow & d \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array}$$

Redak odabire x tako da neutralizira očekivanu korisnost strategija stupca, tj. $ax + (1-x)c = bx + (1-x)d$ odnosno $x(a-b) = (1-x)(d-c)$, odakle $x = \frac{d-c}{(a-b)+(d-c)} = \frac{1}{1+\frac{a-b}{d-c}}$. Dakle, mješana ravnoteža ima prvu komponentu:

$$\frac{1}{1+\frac{a-b}{d-c}}T + \frac{1}{1+\frac{d-c}{a-b}}B.$$

Ako je $v' = \psi(v)$ strogo pozitivna afina transformacija, onda ona čuva omjer $\frac{d-c}{a-b}$ što ne mijenja NR (odnosno njenu prvu komponentu ovdje). Vrijedi i obratno, ako transformacija čuva NR onda mora nužno biti pozitivna afina transformacija. □

Zadatak. Može li se bimatrična igra

	A	B
a	$(0.5, 4)$	$(3, -1)$
b	$(8.5, -12)$	$(4, -3)$
c	$(5, -5)$	$(1.5, 2)$

svesti na igru sa sumom nula? Ako da, odredite transformaciju.
Uputa: Transformirajte samo korisnost Retka. Nacrtajte u (u, v) ravnini profile strategija.

Rješenje. Može. Transfomacija je $\phi(u) = 2u - 5$.

Zadatak. Može li se bimatrična igra

	A	B
a	$(-4,4)$	$(2,0)$
b	$(8,-4)$	$(-7,6)$
c	$(5,-2)$	$(-13,10)$
d	$(5,-2)$	$(-7,6)$

svesti na igru sa sumom nula? Ako da, odredite transformaciju. Kakva je veza među ravnotežama tih igara? Iskoristite tu vezu i nađite bar jednu ravnotežu zadane igre.

Zadatak. Može li se bimatrična igra

	A	B
a	$(-4,4)$	$(2,0)$
b	$(8,-4)$	$(-7,6)$
c	$(5,-2)$	$(-13,10)$
d	$(5,-2)$	$(-7,6)$

svesti na igru sa sumom nula? Ako da, odredite transformaciju. Kakva je veza među ravnotežama tih igara? Iskoristite tu vezu i nađite bar jednu ravnotežu zadane igre.

Rješenje.
Tražena transformacija korisnosti prvog igrača je $\phi(u) = \frac{2}{3}u - \frac{4}{3}$ ili $\psi(v) = \frac{3}{2}v - 2$. Drugi i treći redak dobivene matrične igre su dominantni što vodi na miješanu ravnotežu (x, y) gdje je $x = \frac{1}{7}(0,5,2,0)$, a $y = \frac{1}{7}(3,4)$. $\square$

Zadatak.
Promatrajte skup lutrija $\mathcal{L}$ na skupu brojeva $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$.
Označimo s $\min(P)$ najmanju vrijednost lutrije P na nosaču od P, tj.

$$\min(P) := \min\{x \in X \mid p(x) > 0\}.$$

Definiramo relaciju preferencije na $\mathcal{L}$ na sljedeći način: Lutrija P je preferirana u odnosu na lutriju Q ako $\min(P) \geq \min(Q)$.

a) Iskažite aksiom neprekidnosti među lutrijama.
b) Dokažite da tako definirana preferencija ne zadovoljava aksiom neprekidnosti.

Rješenje. Ako je $P \succ Q \succ R$ i $S = pP + (1-p)R$ za $p \in (0,1)$ onda je $\min(S) = \min\{\min(P), \min(R)\} = \min(R)$ pa je nemoguće $S \sim Q$.

Zadatak. Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ konačan skup i $(X, \succcurlyeq)$ relacija slabe preferencije (potpuna i tranzitivna) i $x_1 \succ x_k$.

1. Iskažite aksiom neprekidnosti (AN) teorije korisnosti.
2. Dokažite da je, unutar sustava aksioma teorije korisnosti, AN ekvivalentan sljedećoj implikaciji:

$$x \succ y \text{ i } y \succ z \implies \exists p \in [0,1] \text{ td.}$$
$$y \sim \langle\, p, x; 1-p, z \,\rangle$$

Rješenje. Vidi (Čaklović, 2014, str.218).

Zadatak. (Čaklović, 2014, str.216) Promatrajte sljedeću tablicu u kojoj su posljedice akcija novčane isplate u tisućama kuna:

posljedice		stanja svijeta		
x_{ij}		θ_1	θ_2	θ_3
akcije	a_1	10	10	12
	a_2	9	10	12
	a_3	10	11	10
		vjerojatnosti		
		0.25	0.5	0.25

Donositelj odluke izražava indiferencije između sljedećih lutrija:

$$10 \sim 12(0.5)9; \quad 11 \sim 12(0.8)9.$$

Koju će akciju donositelj odluke poduzeti?

Rješenje. $U_1 = 0.625, U_2 = 0.5, U_3 = 0.65$. DO će poduzeti alciju a_3.

Literatura

Čaklović, L. (2014). *Teorija vrednovanja s naglaskom na metodu potencijala*. SLAP, Jastrebarsko, Croatia.