Teorija igara
Egzistencija Nashove ravnoteže

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

Sadržaj

1. Brouwerov teorem
   - Jednodimenzionalni slučaj
2. Kakutanijev teorem
3. Konačne igre
   - Egzistencija Nashove ravnoteže (Brouwer)
   - Egzistencija Nashove ravnoteže (Kakutani)
4. Beskonačne igre
   - Čiste ravnoteže
   - Miješane ravnoteže
   - Egzistencija simetrične ravnoteže
   - Varijaciona karakterizacija simetrične ravnoteže
   - Nepostojanje simetrične ravnoteže

U literaturi ima puno dokaza Nashovog teorema i svi se baziraju na nekoj od tvrdnji koja je ekvivalentna Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki:

Teorem (Brouwer)

Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ konveksan i kompaktan skup i $f : S \to S$ neprekidna funkcija. Tada postoji fiksna točka od F, tj.

$$(\exists x^* \in S) \quad f(x^*) = x^*.$$

Dokaz za $n = 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\Sigma = [0, 1]$. Ako je $f(0) = 0$ ili $f(1) = 1$ tvrdnja stoji. Neka je $f(0) > 0$ i $f(1) < 1$. Definirajmo $F(x) := x - f(x)$. Prema Bolzanovom teoremu F posjeduje nul-točku $x^* \in \Sigma$ koja je fiksna točka od f.

Nastavak slijedi ...

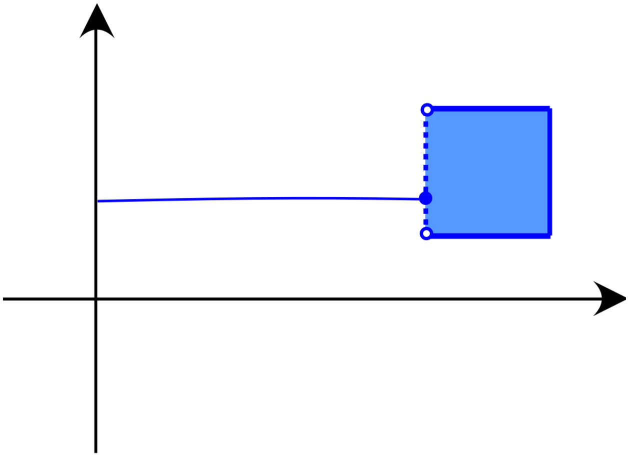
Kakutanijev teorem o fiksnoj točki

Teorem (Kakutani)

Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ *neprazan i kompaktan podskup i* $f : A \rightrightarrows A$ *korespodencija* $(A \ni x \mapsto f(x) \subset A)$ *koja zadovojava:*

1. $f(x)$ *je konveksan*
2. *graf od* f *je zatvoren, tj.* $\{x_n, y_n\} \to \{x, y\}$ *takvi da* $y_n \in f(x_n) \implies y \in f(x)$

Tada f *ima fisknu točku, tj. postoji* $x \in A$ *tako da je* $x \in f(x)$*.*



Slika 1: Nezatvoren graf

Teorem (Nash)

Neka su $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^n$ konveksni kompaktni skupovi i u_i neprekidne funkcije na Σ, $i \in \mathcal{I}$. Pretpostavimo da je za svaki profil $\sigma \in \Sigma$ skup točaka maksimuma funkcija $\sigma_{-i} \mapsto u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ konveksan. Tada igra $(\mathcal{I}, \Sigma, u)$ ima bar jednu Nashovu ravnotežu.

Teorem je dosta općenit i može se primijeniti na naš slučaj jer su funkcije u i v linearne u svakoj varijabli. Njegova je uporabnost ipak ograničena jer ne govori o tome koliko ima ravnoteža ni kako do njih doći. U literaturi ima puno dokaza Nashovog teorema i svi se baziraju na nekoj od tvrdnji koja je ekvivalentna Brouwerovom teoremu o fiksnoj točki. Osim Brouwerovog, teorem se najčešće dokazuje pomoću Kakutanijevog teorema o fiksnoj točki ili pomoću Ky Fanove nejednakosti.

Dokaz Nashovog teorema pomoću Brouwerovog ($n \geq 3$).

Definiramo lateralna povećanja korisnosti

$$\varphi_{i,a_i}(s) = max\{0, u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)\}.$$

Neka je $f : \Sigma \to \Sigma$ definirano s: $f(s) = s'$ gdje je

$$\begin{aligned} s_i'(a_i) &= \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{\sum_{b_i \in A_i}(s_i(b_i) + \varphi_{i,b_i}(s))} \\ &= \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} \varphi_{i,b_i}(s)} \end{aligned} \tag{1}$$

Akcijama u profilu s' koje su bolji odgovor pridjeljena je veća vjerojatnost.

Funkcija f je neprekidna, Σ je kompaktan i konveksan pa, prema Brouwerovom teoremu, f ima bar jednu fiksnu točku s. Tvrdimo da je s Nashova ravnoteža, tj. da je s_i najbolji odgovor za s_{-i}. Preciznije

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i.$$

Nastavak dokaza.

Prema (1) i zbog $f(s) = s$ (fiksna točka) slijedi

$$\varphi_{i,a_i}(s) = \left(\sum_{b_i \in A_i} \varphi_{i,b_i}(s) \right) \cdot s_i(a_i), \quad \forall i, a_i \in A_i \tag{2}$$

odnosno

$$max\{0, u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)\} = \left(\sum_{b_i \in A_i} \varphi_{i,b_i}(s) \right) \cdot s_i(a_i) \quad \forall i, a_i \in A_i \tag{3}$$

Promatrajmo lijevu stranu u (3). Funkcija $a_i \mapsto u_i(a_i, s_{-i})$ je linearna i poprima minimum na nekom vrhu $a_i' \in A_i$ i vrijedi $\varphi_{i,a_i'}(s) = 0$. Zagrada na desnoj strani u (3) sad poprima vrijednost 0 ako je $s_i(a_i') > 0$, a to će biti istina za $a_i \in supp(s_i)$. Dakle, $u_i(a_i, s_{-i}) \leq u_i(s), \forall a_i \in supp(s_i)$. Prethodna nejednakost stoji i ako je $a_i \in \Sigma_i$ jer je Σ_i konveksno proširenje od A_i i formule (3) iz prezentacije 1.bimatrične.igre.pdf. Dakle, s je Nashova ravnoteža, što se i htjelo dokazati. $\square$

Dokaz Nashovog teorema pomoću Kakutanijevog teorema.

Promatrajmo funkciju najboljeg odaziva

$$\psi_i(\sigma_{-i}) := \arg\max_{x \in \Sigma_i} u_i(x, \sigma_{-i})$$

i korespodenciju $\psi(\sigma) := \prod_i \psi_i(\sigma_{-i})$ Dovoljno je dokazati da ψ zadovoljava uvjete Kakutanijevog teorema.

- $\Sigma = \prod_i \Sigma_i$ je kompaktan kao produkt kompaktnih skupova.
- $\psi(\sigma)$ je neprazan jer je $x \mapsto u_i(x, \sigma_{-i})$ linearna (neprekidna) funkcija, poprima maksimium na kompaktnom skupu prema Weierstrassovom teoremu, pa je $\psi_i(\sigma_{-i})$ neprazan.
- $\psi_i(\sigma)$ je konveksan $\forall i$ jer je to skup točaka maksimuma afine funkcije.
- $\psi(\sigma)$ ima zatvoren graf. U suprotnom, postoji niz $\{\sigma^n, \tau^n\}$, $\tau^n \in \psi(\sigma^n)$ tako da $\sigma^n \to \sigma$, $\tau^n \to \tau$ i $\tau \notin \psi(\sigma)$. Međutim, $\tau \notin \psi(\sigma)$ implicira da $\exists i, \tau_i \notin \arg\max_{x \in \Sigma_i} u_i(x, \sigma_{-i})$. To znači da postoji $\tau_i' \in \Sigma_i$
$$u_i(\tau_i', \sigma_{-i}) > u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) + 3\varepsilon.$$

Dokaz nastavak...

Zbog neprekidnosti u_i i zbog $\sigma_i^n \to \sigma_i$, za dovoljno veliki n vrijedi $u_i(\tau', \sigma_{-i}^n) > u_i(\tau', \sigma_{-i}) - \varepsilon$, odakle slijedi

$$
\begin{aligned}
& u_i(\tau', \sigma_{-i}^n) - u_i(\tau_i^n, \sigma_{-i}^n) = \\
& \quad = u_i(\tau', \sigma_{-i}^n) - u_i(\tau_i^n, \sigma_{-i}^n) \pm u_i(\tau', \sigma_{-i}) \pm u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) \\
& \quad = u_i(\tau', \sigma_{-i}^n) - u_i(\tau', \sigma_{-i}) + u_i(\tau', \sigma_{-i}) - u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) \\
& \quad \quad u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) - u_i(\tau_i^n, \sigma_{-i}^n) \\
& \quad > \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nejednakost je u suprotnosti s činjenicom da je $\tau_i^n \in \psi_i(\sigma_{-i}^n)$

$\square$

Beskonačne igre

$\sigma \in A$ je Nashova ravnoteža u skupu čistih strategija ako je

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i}).$$

Teorem (Debreu, Glicksberg, Fan)

Neka su $A_i \subset \mathbb{R}^m$ neprazni, konveksni i kompaktni. Ako za $\forall i, u_i : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna u a i konkavna[1] u a_i, tada igra $(\mathcal{I}, A, u)$ ima čistu Nashovu ravnotežu.

Dokaz.

Slijedi direktno iz Kakutanijevog teorema na isti način kao što je bio dokaz Nashovog teorema. Konveksnost slupa $\psi_i(\sigma_{-i})$ je sada posljedica činjenice da je skup točaka maksimuma konkavne funkcije konveksan skup. $\square$

[1] dovoljno je kvazikonkavna, tj. $\{x \mid u(x) \geq \alpha\}$ is konveksan za svako α.

Problem beskonačnih igara je što nije apriori jasno kako definirati miješanu strategiju. Jedan od načina je da se promatraju vjerojatnostne distribucije s konačnim skupom vrijednosti, preciznije da se odabere konačan broj elemenata $y_1, y_2, \ldots, y_k \in A_i$ i da im se pridruže vjerojatnosti njihovog odabira $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ako je A_i interval onda za miješanu strategiju možemo uzeti bilo koju vjerojatnostnu mjeru σ_i na A_i. Očekivana korisnost $u_i(\sigma)$ je

$$u_i(\sigma) = \int_A u_i(x) d\sigma(x)$$

(σ – produktna mjera) uz pretpostavku da integral postoji.

Teorem (Debreu, 1952)

Neka su $A_i \subset \mathbb{R}^m$ neprazni, konveksni i kompaktni skupovi i $u_i : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna $\forall i \in \mathcal{I}$. Tada postoji miješana ravnoteža igre.

Za dokaz v. literaturu.

Egzistencija simetrične ravnoteže

Definicija (Simetrična)

Igra $(\mathcal{I}, \prod_i S, \prod_i u)$ je simetrična ako je $S_i =: S$ i $u_i(s_i, s_{-i}) = u_j(s_j, s_{-j})$ za $s_i = s_j$ i $s_{-i} = s_{-j}$ za sve $i, j \in \mathcal{I}$. Stoga možemo pisati $u(s, \sigma)$ za korisnost bilo kojeg igrača koji igra strategiju s u profilu određenom sa σ. Simetričnu igru označavamo tada $(\mathcal{I}, S, u)$.

Ravnoteža igre je simetrična ako su sve njene komponente jednake.

Simetrična igra ima ravnotežu. Pitanje je ima li simetričnu ravnotežu.

Teorem (Postojanje simetrične ravnoteže)

Svaka konačna simetrična igra ima simetričnu miješanu ravnotežu.

Dokaz (fen Cheng et al., 2004).

Za čistu strategiju $s \in S$, definiramo funkciju miješane strategije σ s

$$g_s(\sigma) := \max(0, u(s,\sigma) - u(\sigma,\sigma)).$$

$g(s)$ predstavlja dobitak u unilateralnoj devijaciji igrača s od simetričnog profila određenog sa σ. Nadalje, definiramo

$$\tau_s(\sigma) = \frac{\sigma(s) + g_s(\sigma)}{1 + \sum_{t \in S} g_t(\sigma)}.$$

Vektor $\tau(\sigma) = (\tau_s(\sigma),\ s \in S)$ je miješana strategija i $\tau(\cdot)$ je neprekidno preslikavanje skupa miješanih strategija na S u samog sebe. Prema Browerovom teoremu postoji fiksna točka σ preslikavanja $\tau(\cdot)$. Dovoljno je još dokazati da σ određuje simetrični ravnotežni profil.

Neka je $\tau(\sigma) = \sigma$. Postoji $s \in supp(\sigma)$ takav da je $u(s,\sigma) \leq u(\sigma,\sigma)$. Tada je $g_s(\sigma) = 0$ pa $\tau_s(\sigma) = \sigma(s) \implies 1 + \sum_{t \in S} g_t(\sigma) = 1$, što daje $g_t(\sigma) = 0$ $\forall t \in S$, odnosno, $u(t,\sigma) \leq u(\sigma,\sigma)$ $\forall t \in S$. Time je teorem dokazan. $\square$

Napomena.. Nash (1951) je dokazao teorem, uz drugačiju definiciju simetričnosti, koja je ekvivalentna ovoj našoj.

Evo još nekih zanimljivih tvrdnji o simetričnim igrama.

Teorem

Simetrična igra s dvije čiste strategije ima ravnotežu u skupu čistih strategija.

Dokaz.

Dokaz se može naći u: fen Cheng et al. (2004). Traži se kraći dokaz. □

Uvjeti teorema ne mogu se oslabiti. Primjer simetrične igre bez ravnoteže u skupu čistih strategija je *K-Š-P*. Teorem ne vrijedi za asimetrične igre, napr. za igru *pismo-glava*. Međutim, za beskonačne igre, za koje je skup S konveksan i kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$, a $u(s_i, s_{-1})$ neprekidna u s i kvazi-konkavna u s_i postoji simetrična čista ravnoteža (fen Cheng et al., 2004).

Varijaciona karakterizacija simetrične ravnoteže

Jednostavnosti radi ograničimo se samo na 2 igrača, tj. za $\mathcal{I} = \{1, 2\}$.

Teorem (McKelvey and Mclennan, 1996)

Simetrična ravnoteža simetrične igre $(\mathcal{I}, S, u)$ *je globalni minimum funkcije dobitka*

$$f(\sigma) := \sum_{s \in S} (\max\{0, u(s, \sigma) - u(\sigma, \sigma)\})^2$$

Dokaz. Očito je $f \geq 0$. Za svaku ravnotežu σ je $f(\sigma) = 0$. Ako je $f(\sigma) = 0$ tada je evidentno da je σ simetrična ravnoteža jer $\forall s \in S, u(s, \sigma) \leq u(\sigma, \sigma)$.

Većina numeričkih metoda ne uvažava simetričnost pa je dobar broj simetričnih igara 'neriješiv' ako se inzistira na simetriji. Poznati softver `Gambit` također ne uvažava simetriju. Lemke-Howsonov algoritam za bimatrične igre se može 'simetrizirati' i time ubrzati.

Simetrična NR ne postoji za svaku igru.

Beskonačna igra, međutim, nužno Nashovu ravnotežu (potreban citat). U primjeru koji slijedi dana je simetrična igra bez simetrične NR.

Primjer (Simetrična igra bez simetrične NR (Fey, 2011))

Dva igrača biraju broj iz intervala $X = [0, 1]$. Isplate su definirane funkcijom

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} \max(x_1, x_2) & \text{ako } x \neq (1, 1) \\ 0, & \text{ako } s = (1, 1) \end{cases}$$

Lako se vidi da je skup svih (čistih) ravnotežnih stanja (singletona)

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \neq 1 \vee y \neq 1\} \setminus (1, 1)\}.$$

Niti jedan profil nije simetričan. Ostaje za pokazati da igra nema miješanu simetričnu ravnotežu.

Dokaz ide kontrapozicijom.

Primjer (nastavak)

Pretpostavimo da je (σ, σ) ravnoteža igre.

- *Slučaj $\sigma(\{1\}) > 0$.* Tada $x = 1$ mora nužno biti najbolji odgovor[2] za σ jer je u nosaču od σ. Međutim, $\sigma(\{1\}) > 0$ ima za posljedicu da je za z, koji nije atom i dovoljno blizu 1 (atoma ima prebrojivo), očekivana korisnost $u_1(1, \sigma) = 1 - \sigma(\{1\}) < u_1(z, \sigma)$ što je u suprotnosti s činjenicom da je $x = 1$ najbolji odgovor za σ. Za dokaz nejednakosti dovoljno je izračunati

$$u_1(z,\sigma) = \int_{[0,1]} \max\{z,y\} d\sigma(y) = \int_{[0,z]} z d\sigma(y) + \int_{[z,1]} 1 d\sigma(y) < z^2 + 1 - z.$$

[2]Vidi teorem o nosaču najboljeg odgovora koji vrijedi i za beskonačne igre.

Primjer (nastavak)

- *Slučaj $\sigma(\{1\}) = 0$.* U tom slučaju je $u_1(1, \sigma) = 1$ što je strogo veće od $u_1(z, \sigma)$ za svako $z < 1$. Dakle, $x = 1$ je strogo optimalna ćista strategija pa je nužno u nosaču od σ, tj. $\sigma(1) > 0$.

Time je dokazano da ne postoji simetrična ravnoteža igre.

Takvo ponašanje egzistencije posljedica je toga što je funkcija u_1 prekidna u točki $(1, 1)$.

Ne egzistencija Nashove ravnoteže za neke beskonačne igre koje se javljaju u ekonomiji pripisuje se prekidnosti funkcija korisnosti. Međutim, klasični teoremi egzistencije (Debreu) mogu se oslabiti za 'umjereno prekidne' fukcije u smislu da skup diskontinuiteta nije prevelik. Ovakve rasprave nadilaze ciljeve ovog kursa, v. Dasgupta and Maskin (1986).

Dasgupta, P. and Maskin, E. (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games, I: Theory. *The Review of Economic Studies*, 53(1):1–26.

Debreu, G. (1952). A social equilibrium theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, (38):386–393.

fen Cheng, S., Reeves, D. M., Vorobeychik, Y., and Wellman, M. P. (2004). Notes on equilibria in symmetric games. In *In Proceedings of the 6th International Workshop On Game Theoretic And Decision Theoretic Agents (GTDT*, pages 71–78.

McKelvey, R. D. and Mclennan, A. (1996). Computation of equilibria in finite games.

Nash, J. (1951). Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*, 54:286–295.