Teorija igara
Neki važniji primjeri igara

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

Sadržaj

Rat spolova

Muž i žena planiraju zajednički izlazak i više od svega žele biti zajedno. Žena preferira ići u operu, a muž na nogomet. Ako odu zajedno na operu žena uživa više od muža, a na nogometu muž uživa više od žene. Ako nisu zajedno onda su nesretni zbog razdvojenosti (tablica lijevo).

Ž \ M	*Opera*	*Nogomet*
Opera	$3^*, 2^*$	$0, 0$
Nogomet	$0, 0$	$2^*, 3^*$

Ž \ M	*Opera*	*Nogomet*
Opera	$3^*, 2^*$	$1, 1$
Nogomet	$0, 0$	$2^*, 3^*$

U tablici desno dana je verzija u kojoj žena i muž manje pate zbog razdvojenosti ako svaki za sebe odabere svoj povoljni scenarij.

Dvije su NR u skupu čistih strategija: (O, O) i (N, N). Koju odabrati? Jedan od načina rješavanja tog problema je randomizacija.

Dilema zatvorenika

Dva zatvorenika osumnjičena su za pljačku banke i čekaju suđenje. Ako optuže jedan drugog slijedi im zatvor od 2 godine. Ako jedan prizna, a drugi ga optuži, prvi dobiva 3 godine, a drugi biva oslobođen i obratno. Ako jedan i drugi priznaju slijedi im zatvor od 1 godine.

		Z2	
		O	P
Z1	O	$2^*, 2^*$	$0, 3$
	P	$3, 0$	$1, 1$

Prvi redak (stupac) dominira drugim. Jedinstvena NR je (O, O). Stroga dominacija ne vidi optimalniju opciju za oba zatvorenika, a to je profil (P, P).

Primjer postavlja pitanje je li koncept 'osobne koristi', ugrađen u NR, korektno modelira ljudsko ponašanje[1].

[1] Eksperimenti pokazuju da ljudi pokazuj naklonost prema suradnji

Pismo-glava (napad-obrana)

Ivica i Marica bacaju novčiće. Ako se strane podudaraju Ivica gubi novčić, ako se strane ne podudaraju Marica gubi novčić.

		Marica	
		P	G
Ivica	P	$-1, 1^*$	$1^*, -1$
	G	$1^*, -1$	$-1, 1^*$

U literaturi se taj tip igre naziva *napad-obrana*. Saveznici su u 2. svjetskom ratu razmatrali hoće li se iskrcati u Normandiji ili Calaisu, a Nijemci su razmatrali da li da obranu organiziraju u Normandiji ili Calaisu. Ako se saveznici iskrcaju tamo gdje su Nijemci organizirali obranu prijeti im poraz.

Igra nema čistu ravnotežu. U životnim situacijama igrači nastoje uvjeriti protivnika u svoju (ne)namjeru. Stupanj uvjerljivosti namjere izražava se vjerojatnošću.

Jastreb-golub (podjela plijena)

Dvije životinje dijele plijen. Svaka od njih može natupiti agresivno (jastreb, A) ili pasivno (golub, P). U slučaju agresivnog nastupa obje ostaju bez plijena, a u ostalim kombinacijama isplate su proporcionalne prema tablici.

		Golub	
		P	A
Jastreb	P	$3, 3$	$1^*, 5^*$
	A	$5^*, 1^*$	$0, 0$

Igra ima dvije čiste ravnoteže: (A, P) i (P, A). Zbog simetrije, postoji još i simetrična miješana ravnoteža: $(\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}A, \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}A)$ s isplatama $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

U kontekstu međunarodnih odnosa, agresivan i pasivan stil ponašanja mogu se odnositi na vanjsku politiku. Koju politiku će zemlje odabrati ovisi o vanjskim faktorima[2]. Agresivni nastup oba igrača završava razaranjem – $(0, 0)$.

[2] ili *fokusu* (u literaturi aktualan termin).

Racionalne svinje

	Sklopka	*Čeka*
Sklopka	$-1, 5$	$-2, 6$
Čeka	$3, 2$	$0, 0$

Malo i veliko prase dijele zajedničko dvorište. Na jednom kraju dvorišta nalazi se sklopka, koja, kad ju prase takne njuškom, na drugom kraju dvorišta isporučuje doziranu količinu hrane u zajedničko korito. Oba praseta potroše dio energije na trčanje s jednog kraja dvorišta na drugo, ali je malo prase nešto brže. Kad su zajedno na koritu, veliko prase izgura malo. U tablici je dan dobitak izražen u *kcal* za sve kombinacije njihovih mogućih akcija. Malo prase ima dominantnu strategiju: *Čekaj* dok velika ogladni i stisne *Sklopku*. Ova igra je zgodan primjer u kojoj slabiji dobiva bolji zalogaj.

Podjela ulova. Jelen ili zec?

Dva lovca imaju mogućnost zajedno loviti jelena (J), kojeg jedan sam lovac nije u stanju uloviti, ili uloviti zeca (Z), svaki za sebe, koji je siguran ulov. Ako odluče surađivati, dijele plijen. Tablica isplata je:

		Haso	
		J	Z
Mujo	J	$2^*, 2^*$	$0, 1$
	Z	$1, 0$	$1^*, 1^*$

Jedan i drugi lovac prefereiraju $1/2$ jelena više od jednog zeca. Igra spada u tzv. *igre koordinacije* jer koordiniranjem igrači mogu poboljšati svoje korisnosti.

Podjela ulova. Jelen ili zec?

Dva lovca imaju mogućnost zajedno loviti jelena (J), kojeg jedan sam lovac nije u stanju uloviti, ili uloviti zeca (Z), svaki za sebe, koji je siguran ulov. Ako odluče surađivati, dijele plijen. Tablica isplata je:

		Haso	
		J	Z
Mujo	J	$2^*, 2^*$	$0, 1$
	Z	$1, 0$	$1^*, 1^*$

Jedan i drugi lovac prefereiraju $1/2$ jelena više od jednog zeca. Igra spada u tzv. *igre koordinacije* jer koordiniranjem igrači mogu poboljšati svoje korisnosti. Moderator igre može, ako dobro moderira učestalost pojedinih profila u višestrukom ponavljanju igre, povećati socijalnu dobit i dobit svakog igrača. Primjer takvog moderatora je i tradicija koja sugerira da se jelen lovi nakon punog mjeseca osim u proljeće. Za moderiranje je potreban 'slučajni signal'.

Oligopoly (Cournot, 1838)

Pretpostavke.
Jedno dobro proizvodi n poduzeća. Cijena prozvodnje q jedinica dobra od strane i-tog poduzeća iznosi $C_i(q)$, dgje je C_i rastuća funkcija[3]. Sva proizvodnja se proda po cijeni[4] koja je funkcija potražnje; ako je ukupna proizvodnja Q onda je tržišna cijena proizvoda $P(Q)$[5]. Pretpostavljamo da je P opadajuća funkcija na $\mathbb{R}_+$. Ako označimo s q_i proizvodnju i-te firme onda je njena zarada $q_i P(q_1 + \cdots + q_n)$, a njen profit je

$$\pi(q) = q_i P(q_1 + \cdots + q_n) - C_i(q_i) \tag{1}$$

Cournot je predložio da se tržište modelira kao igra u kojoj su **igrači firme**, njihove **akcije** su **količina proizvodnje** q_i, a korisnost i-te firme je dana formulom (1).

[3] Veća produkcija više košta
[4] Neovisno od proizvođača
[5] P – *inverzna funkcija potražnje*

Monopoly

Pretpostavljamo da je cijena proizvodnje količine q

$$C(Q) = cQ$$

(c je jedinična cijena) i inverzna funkcija potražnje[6]

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha(1 - Q/Q_0) & \text{ako } Q \leq Q_0 \\ 0 & \text{ako } Q > Q_0 \end{cases} = \alpha(1 - Q/Q_0)^+ \tag{2}$$

gdje je $\alpha > 0$ najveća moguća cijena, a $Q_0 > 0$ najveća moguća proizvodnja određena veličinom tržišta.

Profit poduzeća je

$$\pi(Q) = QP(Q) - c(Q) = \alpha(1 - Q/Q_0)^+ - cQ \tag{3}$$

koji je maksimalan za proizvodnju Q koja zadovoljava $\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$, što daje

$$Q^* = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right).$$

[6] Pretpostavka (2) i nije neka realna pretpostavka ali se očekuje da je P linearna u okolici ravnotežne proizvodnje, a to je jedino važno.

Odgovarajuća cijena proizvodnje i profit su

$$P^* = P(Q^*) = \frac{\alpha + c}{2} \tag{4}$$

$$\pi^* = Q^*(P^* - c) = \frac{\alpha Q_0}{4}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)^2. \tag{5}$$

Duopoly (Cournot)

U ovom slučaju imamo 2 prozvođača istog dobra koji proizvode količine q_1 i q_2 ukupne količine $Q = q_1 + q_2$. Model tržišta shvaćamo kao igru u kojoj je skup strategija svakog igrača $\mathbb{R}^+$, ali se može reducirati na $[0, Q_0]$ jer se niti jednom poduzeću ne isplati prozvoditi više od Q_0.

Profiti (korisnosti) poduzeća su

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1\alpha\left(1 - \frac{q_1 + q_2}{Q_0}\right)^+ - cq_1 \tag{6}$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2\alpha\left(1 - \frac{q_1 + q_2}{Q_0}\right)^+ - cq_2 \tag{7}$$

Ravnotežu igre (q_1, q_2) naći ćemo tako što ćemo odrediti najbolje odgovore $\psi(q_i)$ i riješiti inkluzivni sustav $q_1 \in \psi(q_2)$ i $q_2 \in \psi(q_1)$.

Najveći profit prvog poduzeća, za zadanu koričinu proizvodnje q_2 drugog poduzeća dobije se rješavanjem jednadžbe

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = \alpha - c - \frac{\alpha}{Q_0} q_2 - 2\frac{\alpha}{Q_0} q_1$$

što daje (uvažavajući simetriju)

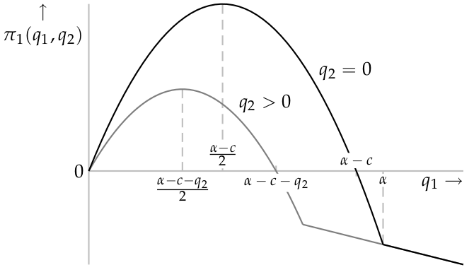
$$q_1^* = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{Q_0}\right) - \frac{q_2}{2}, \quad q_2^* = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{Q_0}\right) - \frac{q_1}{2}.$$

Ostaje riješiti inkluzivni sustav jednadžbi što daje

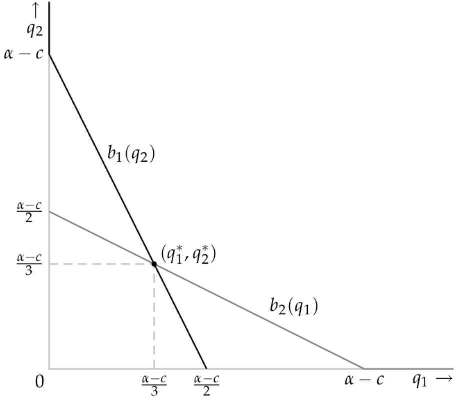
$$q_1^* = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{Q_0}\right) - \frac{q_2^*}{2}, \quad q_2^* = \frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{Q_0}\right) - \frac{q_1^*}{2} \tag{8}$$

te ravnotežne proizvodnje i ravnotežnu cijenu

$$q_1^* = q_2^* = \frac{Q_0}{3}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right), \quad P^* = q_1^* + q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha + c),$$



Slika 1 : Graf profita $\pi_1(q_1, q_2)$ kao funkcija proizvodnje q_1 prema formuli (6), u slučaju $\alpha = Q_0$, (q_2 – je para- metar). Razumno je pretpostaviti $c < \alpha$ jer u suprotnom profit može biti negativan.



Slika 2 : Najbolji odgovori $b_1(q_2)$ i $b_2(q_1)$ ($\alpha = Q_0$). Presjek pravaca najboljih odgovora je $(\frac{1}{3}(\alpha - c)), \frac{1}{3}(\alpha - c))$ i to je Nashova ravnoteža.

a odgovarajuće ravnotežni profiti su

$$\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{\alpha Q_0}{9}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)^2.$$

Monopoly vs. duopoly.

	proizvodnja	*cijena*	*profit*
Monopoly	$\frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{2}(\alpha + c)$	$\frac{\alpha Q_0}{4}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)^2$
Duopoly	$\frac{Q_0}{3}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{3}(\alpha + c)$	$\frac{\alpha Q_0}{9}\left(1 - \frac{c}{\alpha}\right)^2$

Kod duopolyja je ukupni profit manji, ravnotežna cijena je manja, proizvodnja poduzeća je manja, ali je ukupna proizvodnja veća. To znači da je zadovoljeno više kupaca s manjom cijenom.

Zadatak. Sačinite model tržišta kao oligopoly s n igrača i nađite NR. Iskoristite simetriju na način da tražite simetričnu ravnotežu i rjašavate jednu jednadžbu umjesto sustava. Komentirajte rezultat ovisno o broju igrača.

Zadatak. Riješite model duopolnog tržišta u slučaju cijene proizvodnje $C_i(q_i) = q_i^2$, a inverzna funkcija potražnje je kao i do sada dana formulom (3).

Zadatak. Nađite NR Cournotove igre ako je cijena proizvodnje

$$C_i(q_i) \begin{cases} 0 & \text{ako } q_i = 0 \\ c_0 + cq_i & \text{ako } q_i > 0 \end{cases}$$

gdje je $c_0 > 0, c \geq 0$ i $c < \alpha$ Zaključite da u tom slučaju postoji više od jedne NR. Fiksna cijena c_0 utječe na odluku firme u smislu da li proizvoditi ili ne.

Linkovi

https://mindyourdecisions.com/blog/2016/09/06/
pigs-know-game-theory-and-how-strength-can-be-a-weakness-game-
https:
//johncarlosbaez.wordpress.com/2013/01/06/game-theory-part-1/
http://www.gametheory.net/