Teorija igara
Teoremi o nosaču

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

Sadržaj

Propozicija

Za svaki profil σ miješanih strategija vrijedi

$$u_i(\sigma) = \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) u_i(a_i, \sigma_{-i}) \tag{1}$$

Dokaz.

Prema formuli za korisnost

$$\begin{aligned}
u_i(\sigma) &= \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j) \\
&= \sum_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \sigma_i(a_i) \prod_{j \neq i} \sigma_j(a_j) \\
&= \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \prod_{j \neq i} \sigma_j(a_j) \\
&= \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) u_i(a_i, \sigma_{-i}).
\end{aligned}$$

□

Propozicija

Ako je strategija σ_i najbolji odgovor za σ_{-i} onda je

$$u_i(a_i, \sigma_{-i}) = u_i(b_i, \sigma_{-i}) \ \forall a_i, b_i \in supp(\sigma_i)$$

i svaki $a_i \in supp(\sigma_i)$ je najbolji odgovor za σ_{-i}.

Dokaz.

Za svako $a_i \in supp(\sigma_i)$

$$u_i(\sigma) = \sum_{b_i \in A_i} \sigma_i(b_i) u_i(b_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(a_i, \sigma_{-i})$$

pa je $u_i(\cdot, \sigma_{-i})$ konstantna funkcija na nosaču $supp(\sigma_i)$ (i poprima vrijednost $u_i(\sigma)$) jer u formuli stoji konveksna kombinacija brojeva $u_i(b_i, \sigma_{-i})$. $\square$

Vrijedi i obrat (sljedeća propozicija) koja je korisna za provjeru je li zadana miješana *strategija σ_i* igrača *i* *najbolji odaziv* za profil njegovih suigrača. U tu svrhu dovoljno je to provjeriti za *čiste strategije* iz nosača od σ_i.

Teorem (O nosaču najboljeg odgovora)

Strategija σ_i je najbolji odgovor za σ_{-i} ako i samo ako je svaka čista strategija $a_i \in A_i$ u nosaču od σ_i najbolji odgovor za σ_{-i}.

Dokaz.

Neka $(\forall a_i \in A_i,\ a_i \in supp(\sigma_i))\ (u_i(a_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\tau_i, \sigma_{-i})\ \forall \tau_i \in \Sigma_i)$. Tada je

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i)\, \underbrace{u_i(a_i, \sigma_{-i})}_{\geq u_i(\tau_i, \sigma_{-i})} \\ &\geq \sum_{a_i \in A_i} \sigma_i(a_i) u_i(\tau_i, \sigma_{-i}) = u_i(\tau_i, \sigma_{-i})\ \forall \tau_i \in \Sigma_i. \end{aligned}$$

Obratno, neka je a_i najbolji odgovor za σ_{-i} i $\sigma_i(a_i) > 0$. Tada je prema prethodnoj propoziciji

$$u_i(\sigma) = u_i(a_i, \sigma_{-i})$$

što dokazuje tvrdnju. $\square$

Posljedica prethodnih razmatranja je sljedeći teorem

Teorem (O nosaču u ravnoteži)

Za svaku igru u strategijskoj formi, profil miješanih strategija σ^* je Nashova ravnoteža, ako i samo ako, za svakog igrača i vrijedi

1. $u_i(s_i, \sigma^*_{-i}) = u_i(s_i', \sigma^*_{-i})$ *za sve* $s_i, s_i' \in supp(\sigma_i^*)$
2. $u_i(s_i, \sigma^*_{-i}) \geq u_i(s_i', \sigma^*_{-i})$ *za sve* $s_i \in supp(\sigma_i^*)$ *i* $s_i' \notin supp(\sigma_i^*)$.

Dokaz je direktna posljedica prethodnih propozicija i ostavljamo ga čitatelju.

Za vježbu.

Korolar (Često se koristi u zadacima)

Ako je σ Nashova ravnoteža i ako je $s_i \in A_i$ strogo dominirana čista strategija, tada s_i nije u nosaču od σ_i.

Primjer (Iscrpno traženje najboljih odgovora)

Stupac

		L	M	R
Redak	U	$7,2$	$2,7$	$3,6$
	D	$2,7$	$7,2$	$4,5$

Prvo tražimo NR σ koja sadrži čiste strategije.

1. Najbolji odgovor za U je $\{M\}$, ali najbolji odgovor za M je $\{D\}$ koji ne sadrži U. Dakle, U nije u nosaču od σ_1.
2. Najbolji odgovor za D je $\{L\}$, ali najbolji odgovor za L je $\{U\}$ koji ne sadrži D. Dakle, D nije u nosaču od σ_1.
   Dakle, nosač od $\sigma_1 = \{U, D\}$.
3. Što se Stupca tiče, σ_2 nema čistih strategija jer je skup najboljih odaziva za svaku čistu strategiju L, M, R jednočlan, a gore smo zaključili da σ_1 ima nosač $\{U, D\}$ koji je dvočlan.

Primjer (nastavak)

Stupac

Redak		L	M	R	
	U	$7,2$	$2,7$	$3,6$	x
	D	$2,7$	$7,2$	$4,5$	$y=1-x$

4. Ispitujemo mogućnost $supp(\sigma_2)=\{L,M,R\}$. U tom slučaju je nužno $u_2(\sigma_1,L)=u_2(\sigma_1,M)=u_2(\sigma_1,R)$ što vodi na inkonzistentan sustav
$$2x+7y=7x+2y=6x+5y.$$
5. Ispitujemo mogućnost $supp(\sigma_2)=\{L,M\}$. U tom slučaju je nužno $u_2(\sigma_1,L)=u_2(\sigma_1,M)$ što vodi na sustav
$$2x+7y=7x+2y$$
čije je rješenje $x=y=\frac{1}{2}$. Nadalje, $u_1(U,\sigma_2)=u_1(D,\sigma_2)$, odnosno $7\sigma_2(L)+2\sigma_2(M)=2\sigma_2(L)+7\sigma_2(M) \implies \sigma_2(L)=\sigma_2(M)=\frac{1}{2}$. Kandidat za NR je $\sigma=(\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}D,\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}M)$ što je nemoguće jer je očekivana korisnost $u_2(\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}D,R)=\frac{11}{2}>\frac{9}{2}=u_2(\sigma)$.

Primjer (nastavak)

		Stupac		
		L	M	R
Redak	U	$7,2$	$2,7$	$3,6$
	D	$2,7$	$7,2$	$4,5$

6. Ispitujemo mogućnost $supp(\sigma_2) = \{M, R\}$. Tada u odgovarajućoj sub-bimatrici D strogo dominira U što je u suprotnosti sa činjenicom da je $u_1(U, \sigma_2) = u_1(D, \sigma_2)$.
7. Ispitujemo mogućnost $supp(\sigma_2) = \{L, R\}$. I Redak i Stupac koriste miješane strategije, što znači da je

$$7\sigma_2(L) + 3\sigma_2(R) = 2\sigma_2(L) + 4\sigma_2(R) \implies \sigma_2(L) = \frac{1}{6}, \sigma_2(R) = \frac{5}{6}$$

$$2\sigma_1(U) + 7\sigma_1(D) = 6\sigma_1(U) + 5\sigma_1(D) \implies \sigma_1(U) = \frac{1}{3}, \sigma_1(D) = \frac{2}{3}.$$

Dakle, kandidat za ravnotežu je $\sigma = (\frac{1}{3}U + \frac{2}{3}D, \frac{1}{6}L + \frac{5}{6}R)$.

Primjer (nastavak)

		Stupac		
		L	M	R
Redak	U	$7,2$	$2,7$	$3,6$
	D	$2,7$	$7,2$	$4,5$

Ako je $\sigma = (\frac{1}{3}U + \frac{2}{3}D, \frac{1}{6}L + \frac{5}{6}R)$ ravnoteža onda nužno mora biti

$$u_2(\sigma) \geq u_2(\sigma_1, M)$$

tj. $\frac{2}{18} + \frac{5 \cdot 6}{18} + \frac{2 \cdot 7}{18} + \frac{10 \cdot 5}{18} = \frac{16}{3} \geq \frac{11}{3} = \frac{1 \cdot 7}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3}$ što je istina. Dakle, σ je jedinstvena NR s ravnotežnim isplatama

$$u_1(\sigma) = \frac{11}{3} \text{ i } u_2(\sigma) = \frac{16}{3}.$$

Napomena. Iscrpno traženje NR nije efikasno za velike bimatrice. Ovo je više bila ilustracija za razumijevanje pojma najboljeg odaziva. Za kompleksnije igre vidi softver *Gambit* McKelvey et al. (2015).

Egsistencija Nashove ravnoteže

Teorem (Nash)

Neka su $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^n$ konveksni kompaktni skupovi i u_i neprekidne funkcije na Σ, $i \in \mathcal{I}$. Pretpostavimo da je za svaki profil $\sigma \in \Sigma$ skup točaka maksimuma funkcija

$$\sigma_{-i} \mapsto u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

konveksan. Tada igra $(\mathcal{I}, \Sigma, u)$ ima bar jednu Nashovu ravnotežu.

Teorem je dosta općenit i može se primijeniti na naš slučaj jer su funkcije u_i linearne u svakoj varijabli. Njegova je uporabnost ipak ograničena jer ne govori o tome koliko ima ravnoteža ni kako do njih doći.

Dokaz teorema dan je prezentaciji *egzistencija.NR.pdf* uz pomoć Brouwerovog teorema kao i uz pomoć Kakutanijevog teorema.

Beskonačne igre

Definicija

Ako je bar jedan skup akcija (čistih strategija) A_i igrača $i \in \mathcal{I}$ u igri $(\mathcal{I}, A, u)$ beskonačan ili je $\mathcal{I}$ beskonačan kažemo da je igra **beskonačna**[1].

Kao i do sada, $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, $A \ni a = (a_i, a_{-i})$ i $A_i = \prod_{j \neq i} A_i$. Skup najboljih odaziva za a_{-i} je $\psi(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{a_i' \in A_i} u_i(a_i', \sigma_{-i})\}$.

Jedno od osnovnih pitanja je egzistencija čiste i/ili miješane ravnoteže

Definicija

$\sigma \in A$ je Nashova ravnoteža u skupu čistih strategija ako je

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i})$$

ili, što je ekvivalentno, $\sigma \in \prod_{i=1}^{n} \psi_i(\sigma_{-i})$.

[1] **Neprekidna** ako je A_i kompaktan metrički prostor i u_i neprekidne

Simetrične igre

Definicija (Simetrična igra s dva igrača)

Za igru $(S_1 \times S_2, u_1 \times u_2)$ kažemo da **simetrična** ako je $S_1 = S_2 =: S$ i $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)\ \forall (s_1, s_2) \in S \times S$. Drugim riječima, ako je A matica isplate jednog igrača onda je A^T matrica isplate drugog.

Simetrične igre reguliraju ponašanje entiteta iz iste populacije. Napr. svaki od dva automobila na uskoj cesti koji voze u suprotnom smjeru, imaju dvije opcije: L =lijevo ili D=desno.

	L	D
L	$1, 1$	$0, 0$
D	$0, 0$	$1, 1$

NR: (L, L), (D, D) (čiste) $(\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}D, \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}D)$ (miješana).

Interpretacija[2] miješane ravnoteže: U velikom broju ponovljenih susreta vozila će odabrati (L, L) ili (D, D) s podjednakom učestalošću.

[2]Frekvencionistička, jedna u nizu.

Igre koordinacije

Formalne definicije nema. To su simetrične igre i obično imaju više ravnotežnih profila pa se postavlja pitanje odabira, a to je uglavnom van strukture igre. Na primjeru koordinacije vožnje automobila postoje dvije ravnoteže: (L, L) i (D, D) i razlog odabira jedne od njih leži u običaju ili zakonu dotične zemlje.

Tri su igre koje se najčešće ubrajaju u tu kategoriju: *sukob spolova*, *jastreb i golub* i *igra lova*. U tim igrama igrači nastoje koordinirati svoje odabire pa otuda i naziv za takve igre. Evo još jednog primjera.

Primjer

Matrice isplate prvom i drugom igraču su:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Primjer (nastavak)

Naći ćemo sve ravnoteže igre isrpnim pretraživanjem skupova najboljih odgovora. Igra je simetrična jer je $U = V^\tau$. Pretp. da je (σ, σ) NR i:

- *supp*$(\sigma) = \{1, 2, 3\}$ Za $\sigma = (x, y, 1-x-y)$ očekivana isplata 1. igrača je

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 4y-2 \\ 3-6x-6y \end{bmatrix}$$

Ako su sve tri strategije u nosaču onda nužno vrijedi

$$2x - 1 = 3 - 6x - 6y \quad \text{i} \quad 4y - 2 = 3 - 6x - 6y$$

odnosno

$$8x + 6y = 4 \quad \text{i} \quad 6x + 10y = 5$$

što daje $\sigma = (5/22, 8/22, 9/22)$.

Primjer (nastavak)

- $supp(\sigma) = \{1, 2\}$ Za $\sigma = (x, 1-x, 0)$ računamo očekivane isplate 1. igrača
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2-4x \\ 0 \end{bmatrix},$$
odakle, prema teoremu o jednakosti isplata čistih strategija u nosaču,
$$2x - 1 = 2 - 4x \implies x = \frac{1}{2}$$
što daje $\sigma = (1/2, 1/2, 0)$. Očekivana isplata je $u(\sigma, \sigma) = 0$. Provjeravamo isplatu za odstupanje od ove strategije? $u(s_3, \sigma) = -3 < 0$, isplata se nije povećala pa je (σ, σ) NR.
- $supp(\sigma) = \{1, 3\}$ $\sigma = (1/2, 0, 1/2)$.
- $supp(\sigma) = \{2, 3\}$ $\sigma = (0, 1/2, 1/2)$.

Primjer (nastavak)

Da sumiramo; našli smo 4 miješane simetrične ravnoteže (σ, σ):

$$\sigma = (5/22, 8/22, 9/22)$$

$$\sigma = (1/2, 1/2, 0), \sigma = (1/2, 0, 1/2), \sigma = (0, 1/2, 1/2),$$

a postoje i 3 čiste

$$\sigma = (1, 0, 0), \sigma = (0, 1, 0), \sigma = (0, 0, 1).$$

Isplate u različitim NR su međusobno različite i postavlja se pitanje može li se igra moderirati na način da neke ravnoteže budu 'bolje' od ostalih. O tome će biti govora u poglavlju o *koreliranoj ravnoteži*.

Kvadratično programiranje

NR može se izračunati pomoću maksimizacije kvadratične funkcije na poliedarskom skupu, a za takve probleme postoje specijalne i provjerene tehnike.

Lema

Profil (σ^*, τ^*) *je Nashova ravnoteža bimatrične igre* (U, V) *ako i samo*

$$(a)\ u^* J_m \geq U\tau^* \quad i \quad (b)\ v^* J_n^\tau \geq (\sigma^*)^\tau V \tag{2}$$

gdje je $u^* := u(\sigma^*, \tau^*)$, $v^* := v(\sigma^*, \tau^*)$ *i* J_k *stupac samih jedinica duljine* k.

Dokaz.

Neka je (σ^*, τ^*) Nashova ravnoteža. Tada je evidentno

$$u^* = \max_{p \in \Sigma_A} p^\tau U \tau^* \iff u^* \geq e_i^\tau U \tau^*,\ \forall i = 1, \ldots, m,$$

odakle slijedi (2a). Na isti način slijedi i (2b). Obratno, neka vrijedi (2). Tada je $u^* p^\tau J_m \geq p^\tau U \tau^*$, odnosno $u^* \geq p^\tau U \tau^*$, $\forall p \in \Sigma_A$ i na isti način, $v^* \geq (\sigma^*)^\tau V q$, $\forall q \in \Sigma_B$ što je definicija Nashove ravnoteže. $\square$

Teorem

(σ^*, τ^*) je NR bimatrične igre (U, V) ako i samo ako rješava problem

$$\max_{p,q,\lambda,\mu} p^\tau Uq + p^\tau Vq - \lambda - \mu, \tag{3}$$

$$Uq \leq \lambda J_m, \tag{4}$$
$$p^\tau V \leq \mu J_n^\tau,$$
$$p \geq 0, q \geq 0, \sum p_i = 1, \sum q_i = 1.$$

Dokaz.

Neka je (σ^*, τ^*) NR. Tada, prema (2), $u^* J_m \geq U\tau^*$ i $v^* J_n^\tau \geq (\sigma^*)^\tau V$, što znači da su zadovoljena ograničenja (4) za $\lambda = u^*$ i $\mu = v^*$. Nadalje, argument od max u (3) je uvijek ≤ 0, a za $p = \sigma^*$ i $q = \tau^*$ poprima vrijednost 0, tj. maksimum. Dakle, NR maksimizira (3). Obratno, pretpostavimo sada da (p, q, λ, μ) rješava problem maksimizacije. Očito je max $= 0$ jer NR postoji. Dakle, $p^\tau Uq + p^\tau Vq = \lambda + \mu$, što, zajedno s (3), daje $p^\tau Uq = \lambda$, $p^\tau Vq = \mu$, a to je definicija NR. □

Individualna racionalnost

Neka je (U, V) bimatrična igra. Definiramo **sigurnu vrijednost** (SV)

$$val(U) := \max_{p\in\Sigma_1} \min_{q\in\Sigma_2} p^\tau Uq$$

Retka i sigurnu vrijednost Stupca s

$$\max_{q\in\Sigma_2} \min_{p\in\Sigma_1} p^\tau Vq = val(V^\tau)$$

SV je *garantirani dobitak* igrača bez obzira na strategiju njegovog protivnika.

Lema (maxmin lema)

Neka je $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tada je

$$\max_{p\in\Sigma^{m-1}} \min_{q\in\Sigma^{n-1}} p^\tau Uq \le \min_{q\in\Sigma^{n-1}} \max_{p\in\Sigma^{m-1}} p^\tau Uq. \tag{5}$$

Dokaz.

$$\min_q p^\tau Uq \le \max_p p^\tau Uq,\ \forall p, q \implies \max_p \min_q p^\tau Uq \le \min_q \max_p p^\tau Uq. \qquad \square$$

Lema vrijedi za svaku funkciju $f(p,q)$ za koju max i *min* u formuli (5) postoje. Sljedeće nejednakosti odražavaju **individualnu racionalnost** igrača:

Ako je (σ^*, τ^*) Nashova ravnoteža onda je, prema maxmin[3] lemi:

$$u(\sigma^*, \tau^*) = \max_p p^\tau U \tau^* \geq \min_q \max_p p^\tau U q \geq \max_p \min_q p^\tau U q = val(U),$$

$$v(\sigma^*, \tau^*) = \max_q (\sigma^*)^\tau V q \geq \min_p \max_q p^\tau V q \geq \max_q \min_p p^\tau V q = val(V^\tau).$$

Odgovarajuću strategiju $p \in \Sigma_1$ u kojoj se postiže sigurna vrijednost nazivamo **maxmin** strategijom Retka (Stupca).

Gornje dvije nejednakosti su *dodatna ograničenja* na skup u kojem se traži NR na one p, q u kojima je očekivani dobitak veći od SV.

Zadatak. Dokažite da $\max_{p\in\Sigma_1}$ u definiciji sigurne vrijednosti postoji, tj. da je $\sup_p < +\infty$ i da je $\sup = \max$. *Uputa.* Promatrajte familiju funkcija $f_p : q \mapsto p^\tau Uq$. Skicirajte njihove grafove za 2×2 matricu U.

[3] von Neumann je dokazao da je $\max_p \min_q p^\tau Uq = \min_q \max_p p^\tau Uq$ o čemu će kasnije biti govora.

Zadatak. Izračunajte sigurnosni dobitak Retka i Stupca u bimatričnoj igri

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak. Izračunajte sigurnosni dobitak Retka i Stupca u bimatričnoj igri

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$p^\tau Uq = (4p-3)q - 2p + 3$$

$$\min_q p^\tau Uq = \begin{cases} p < 3/4 & 2p \; (q=1) \\ p = 3/4 & 3/2 \; (q \text{ proizvoljan}) \\ p > 3/4 & -2p+3 \; (q=0) \end{cases}$$

$$val(U) = \max_p \min_q p^\tau Uq = 3/2 \;\; (\text{za } \; p = 3/4),$$

a odgovarajuća *maximin* strategija je $\sigma = (3/4, 1/4)$. Za Stupca:

$$val(V^\tau) = \max_q \min_p p^\tau Vq = 3/4 \;\; (\text{za } \; q = 3/4),$$

a odgovarajuća *maximin* strategija je $\tau = (3/4, 1/4)$.

Eliminacija dominirane strategije

- *IEJDS* **Iterativna eliminacija jako dominirane strategije** vodi uvijek na istu sub-bimatricu[4], neovisno o redoslijedu eliminiranja dominirajuće strategije, Dufwenberg and Stegeman (2002), Ritzberger (2002).

  Ta metoda pretpostavlja da igrači neće odabrati dominirajuću strategiju i da su svjesni toga da drugi igrači to znaju.
- *IESDS* Rezultat **iterativne eliminacije slabo dominirane strategije** ovisi o redoslijedu izbacivanja, Samuelson (1992), a može se izgubiti miješana ravnoteža (dajte primjer). Vidi također zadatak na 28 str.

[4] U kojoj nema strogo dominiranih redaka i stupaca

Zadaci

Zadatak. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dokažite da je slaba dominacija $(x \geq y \iff x_i \geq y_i, \forall i = 1, \ldots, n)$ je tranzitivna ali nije potpuna.

Zadatak. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $C \subset \mathbb{R}^n$ konveksan konus. Relacija $(x \geq_C y \iff x - y \in C)$ je tranzitivna ali nije potpuna. Što ako je $C = \mathbb{R}^n_+$? Raspravite situaciju kad je C konus pozitivno semidefinitnih matrica.

Zadatak. Koja svojstva gubi relacija $\geq_C$ ako C nije konveksan? Dajte primjer?

Zadatak. Ispitajte konveksnost skupa pozitivno semidefinitnih matrica.

Zadatak. Naći NR koristeći iterativno princip dominacije.

	L	C	R
U	$4,3$	$5,1$	$6,2$
M	$2,1$	$8,4$	$3,6$
D	$5,9$	$9,6$	$2,8$

Zadatak. Dva su kafića u gradu: A i B. Vlasnici razmišljaju da naplate € $2, 4$ ili 5 za napitak. Svakog dana kafiće posjećuje 6000 turista i 4000 stanovnika grada. Svaka osoba posjećuje samo jedan kafić u kojem konzumira samo jedno piće. Turisti randomiziraju posjet kafiću bez obzira na cijenu, a domaći uvijek idu u jeftiniji kafić (i randomiziraju ako je cijena ista). Koje cijene bi trebali odrediti vlasnici kafića ako ih simultano biraju?

Rješenje. Zarade za svaku kombinaciju cijena su (u tisućama €):

$$\begin{aligned}
u(2,2) &= v(2,2) = (3+2)\times 2 = 10\\
u(2,4) &= v(4,2) = (3+4)\times 2 = 14\\
u(2,5) &= v(5,2) = (3+4)\times 2 = 14\\
u(4,2) &= v(2,4) = 3\times 4 = 12\\
u(4,4) &= v(4,4) = (3+2)\times 4 = 20\\
u(4,5) &= v(5,4) = (3+4)\times 4 = 28\\
u(5,2) &= v(2,5) = 3\times 5 = 15\\
u(5,4) &= v(4,5) = 3\times 5 = 15\\
u(5,5) &= v(5,5) = (3+2)\times 5 = 25.
\end{aligned}$$

Bimatrica isplata je

		Kafić B		
		€2	€4	€5
	€2	$10, 10$	$14, 12$	$14, 15$
Kafić A	€4	$12, 14$	$20, 20$	$28, 15$
	€5	$15, 14$	$15, 28$	$25, 25$

Koristite princip dominacije iterativno (NR je (€4, €4)).

Zadatak.

		Stupac		
		L	C	R
Redak	U	$2, 3$	$3, 0$	$0, 1$
	D	$0, 0$	$1, 6$	$4, 2$

Uočite strogu dominaciju R miješanom strategijom. (NR je (U, L)).

Zadatak. Uvjerite se da kombinacijom jake i slabe dominacije, dobivena NR ovisi o redoslijedu eliminiranja strategija.

$$\begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline M & 1,1 & 0,0 \\ \hline D & 0,0 & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline M & 1,1 & 0,0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & L \\ \hline U & 3,2 \\ \hline M & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & L \\ \hline U & 3,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline M & 1,1 & 0,0 \\ \hline D & 0,0 & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline D & 0,0 & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & R \\ \hline U & 2,2 \\ \hline D & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & R \\ \hline U & 2,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline M & 1,1 & 0,0 \\ \hline D & 0,0 & 1,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline U & 3,2 & 2,2 \\ \hline \end{array}$$

Zadatak. Miješana strategija σ koja strogo dominira čistu strategiju $s \in S_i$ i takva da je $\sigma(s) > 0$[5] i sama je dominirana nekom miješanom strategijom.

Zadatak. Miješana strategija σ može biti strogo dominirana usprkos tome što ima u nosaču čiste strategije koje nisu (čak slabo) dominirane sa σ.

Primjer.

	L	R
U	$1, 3$	$-2, 0$
M	$-2, 0$	$1, 3$
D	$0, 1$	$0, 1$

Strategija $\sigma = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}M$ zadovoljava $u_1(\sigma) = -\frac{1}{2}$ i ne dominira ni U ni M. Međutim ona je strogo dominirana s D.

[5] tj. s je u nosaču od σ.

Zadatak. Naći sve miješane strategije $\sigma = \lambda M + (1-\lambda)D$ koje strogo dominiraju U.

	L	R
U	$1,3$	$1,0$
M	$4,0$	$0,3$
D	$0,1$	$3,1$

Rješenje. $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$. Eliminacija U vodi na niz igara i Nashovu ravnotežu:

$$\begin{array}{c|c|c|} & L & R \\ \hline M & 4,0 & 0,3 \\ \hline D & 0,1 & 3,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & R \\ \hline M & 0,3 \\ \hline D & 3,1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c|} & R \\ \hline D & 3,1 \\ \hline \end{array}$$

Zadatak. (Podjela novca)
Dva igrača dijele €10. Svaki od njih izabire neki cijeli broj iz intervala $k \in [0, 10]$. Ako je $k_1 + k_2 \leq 10$ svaki dobiva k_i. Ako je $k_1 + k_2 > 10$ tada (a) ako $k_1 < k_2$ igrač 1 gobiva k_1, a igrač k_2 dobiva $10 - k_1$ ili (b) ako $k_1 > k_2$ igrač 1 gobiva $10 - k_2$, a igrač 2 dobiva k_2 ili (c) ako $k_1 = k_2$ svaki od igrača dobiva €5. Nađite NR kao presjek skupova najboljih odgovora ili grafički. Što je bimatrica igre?
Uputa. Nacrtajte parove (u_i, v_j) isplata u ravnini i za svaki dobitak u_i prvog igrača odredite skup najboljih odgovora drugog igrača (zacrnite točke). Isto tako, za svaku vrijednost v_j odredite skup najboljih odgovora prvog igrača (zaokružite točke). Parovi strategija (profili) koji odgovaraju zacrnjenim i zaokruženim točkama su Nashove ravnoteže: $\{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

Zadatak. (Rat spolova) Donja igra poznata je u literaturi kao rat spolova. Bračni par želi zajedno provesti večer. Žena želi na balet, a muž na nogomet.

	N	B	
N	$2,1$	$0,0$	p
B	$0,0$	$1,2$	$1-p$
	q	$1-q$	

Nađite najbolje odgovore za svakog igraža za sve miješane strategije i NR.

Rješenje.
Svaka miješana strategija prvog igrača (**m**) određena je vjerojatnošću p, i svaka miješana strategija drugog igrača (**ž**) određena je vjerojatnošću q. Za zadano p najbolji odaziv **ž** je vrijednost q za koju se postiže donji maksimum

$$max_q(qv(p,N) + (1-q)v(p,B)).$$

Taj maksimum je konveksna kombinacija $v(p,N)$ i $v(p,B)$ i postiže se u jednom od ta dva broja, tj. za $q = 1$ ili za $q = 0$. Dakle, gornji maksimum jednak je

$$\max\{v(p,N), v(p,B)\}.$$

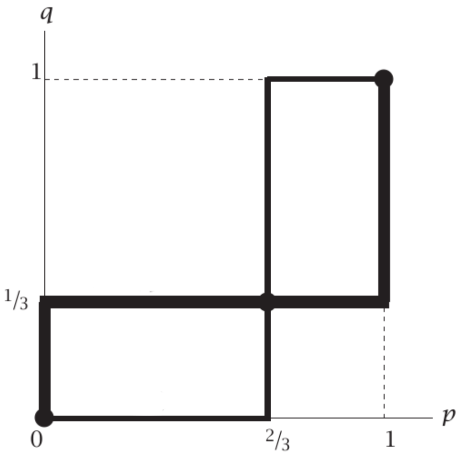
što daje, računajući očekivane korisnosti $v(p,N)=p, v(p,B)=2(1-p)$

$$\max\{p,2(1-p)\}=\begin{cases}2(1-p) & \text{za } p<\frac{2}{3} \iff q=0\\ \frac{2}{3} & \text{za } p=\frac{2}{3} \iff q\in[0,1]\\ p & \text{za } p>\frac{2}{3} \iff q=1.\end{cases}$$

Na isti način, za zadano $q\in[0,1]$, najbolji odaziv **prvog igrača (m)** je

$$max\{q,1-q\}=\begin{cases}1-q & \text{za } q<\frac{1}{3} \iff p=0\\ \frac{1}{3} & \text{za } q=\frac{1}{3} \iff p\in[0,1]\\ 2q & \text{za } q>\frac{1}{3} \iff p=1.\end{cases}$$

Dakle, skup najboljih odaziva **ž** za $p\in[0,\frac{2}{3})$ je čista strategija B, za $p=\frac{2}{3}$ najbolji odgovor čine sve miješane strategije, a za $p\in(\frac{2}{3},1]$ najbolji odgovor je čista strategija N. Skup najboljih odaziva **m** za $q\in[0,\frac{1}{3})$ je čista strategija B, , za $q=\frac{1}{3}$ najbolji odgovor čine sve miješane strategije, a za $q\in(\frac{1}{3},1]$ najbolji odgovor je čista strategija N (v. sliku na sljedećem slajdu).



Slika 1: Najbolji odazivi za igru *rat spolova*. Nashova ravnoteža je profil miješanih strategija $(\frac{2}{3}N + \frac{1}{3}B, \frac{1}{3}N + \frac{2}{3}B)$.

Zadatak. Dokažite da strogo dominirana strategija nije u nosaču niti jedne miješane ravnoteže.

Zadatak. Dokažite obrat Nashovog teorema, tj. da je Nashova ravnoteža fiksna točka preslikavanja f.

Zadatak. (good-bad)

	g	b
G	$2, 2$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

NR: (G, g), (B, b), $(\frac{1}{3}G + \frac{2}{3}B, \frac{1}{3}g + \frac{2}{3}b)$.

Zadatak. (Pismo-glava, par-nepar)

	p	g
P	$1, -1$	$-1, 1$
G	$-1, 1$	$1, -1$

NR: $(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}G, \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}g)$.

Zadatak.(Varijanta par-nepar)
U ovom primjeru[6] 1. igrač je nogometaš koji puca penal, a 2. igrač je golman koji brani. Isplate su empirijske vjerojatnosti pogotka za sve profile strategija $\{L, D\}$.

	L	D
L	$0.58, -0.58$	$0.95, -0.95$
D	$0.93, -0.93$	$0.70, -0.70$

Uočite još uvijek veliku vjerojatnost pogotka i ako golman izaber 'pravu' stranu gola. Jedina Nashova ravnoteža je

$$(p \cdot L + (1-p) \cdot R, q \cdot L + (1-q) \cdot R)$$

za $q = 0.42$ i $p = 0.39$. Pucači su uglavnom 'desno-nogi' što se vidi i iz same bimatrice isplata.

[6] Ignacio Palacios-Huerta, *Beautiful Game Theory: How Soccer Can Help Economics, Princeton UP, 2014*

Zadatak. Dokažite teorem:

Teorem (Nash)

Za simetričnu ravnotežu s dva igrača vrijedi

$$(\sigma, \tau) \text{ je NR} \iff (\tau, \sigma) \text{ je NR.}$$

Dokaz.

Zbog simetrije, dovoljno je dokazati (σ, τ) je NR $\implies$ (τ, σ) je NR.

Označimo igrače s A, B i $\Sigma := \Sigma_A = \Sigma_B$. Neka je (σ, τ) NR. Tada $\forall \tau' \in \Sigma$

$$u(\tau, \sigma) = v(\sigma, \tau) \geq v(\sigma, \tau') = u(\tau', \sigma)$$

tj. τ je najbolji odaziv za σ. Isto tako je $\forall \sigma' \in \Sigma$

$$v(\tau, \sigma) = u(\sigma, \tau) \geq u(\sigma', \tau) = v(\tau, \sigma')$$

pa je σ najbolji odaziv za τ. Dakle, (τ, σ) NR. $\square$

Zadatak. (Prijava nesreće) U pozadini ove igre je realna situacija u kojoj očevici zločina (ili nesreće) odlučuju o tome hoće li prijaviti zločin ili ne misleći da će to učiniti netko drugi. Igra je simetrična. Isplata bilo kom igraču je 0 ako niti jedan ne prijavi slučaj, 5 ako on prijavi (bez obzira na ostale) i 10 ako svi ostali prijave, a on ne. Strategije očevidaca su: $\{Da, Ne\}$.

Iz analize igre proizlazi paradoks da što je više očevidaca to je manja vjerojatnost da će slučaj biti prijavljen.

• **Dva igrača**. Napišite bimatricu isplata, nađite simetričnu Nashovu ravnotežu (σ, σ) ako je $\sigma = (p, q)$. Kolika je vjerojatnost q ne prijavljivanja zločina ako se očevici ravnaju po simetričnoj miješanoj ravnoteži?
• ***n* igrača**. 1. Ako svi koriste vjerojatnost q za *Ne*, koja je vjerojatnost da svi osim jednog odaberu *Ne*? Koja je vjerojatnost da bar jedan odabere *Da*?
2. Izračunajte isplatu igrača koji bira *Ne* u ovisnosti od q.
3. Koristite teorem o jednakosti isplata na nosaču i izračunajte q.
4. Koja je vjerojatnost da nitko ne prijavi slučaj? Kako ona ovisi o n?

Zadatak. Tri igrača $\{A, B, C\}$ imaju strategije $\{U, D\}$, $\{L, R\}$ i $\{l, r\}$ respektivno. Matrice isplata su:

Igrač B

Igrač A		L	R
	U	$4, 4, 4$	$0, 0, 1$
	D	$0, 2, 1$	$2, 1, 0$

Tablica 5.1: Isplate za l-strategiju igrača C

Igrač B

Igrač A		L	R
	U	$2, 0, 0$	$1, 1, 1$
	D	$1, 1, 1$	$2, 2, 2$

Tablica 5.2: Isplate za r-strategiju igrača C

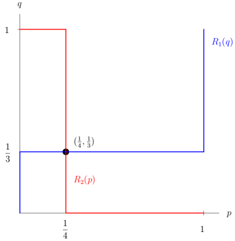
1. Nađite sve čiste Nashove ravnoteže.
2. Pretpostavimo da igrač C prvi izabire svoju strategiju, a ostali igrači prate što je odabrao. Ovisno o tome, igrači 1 i 2 igraju jednu od igara iz gornjih tablica. Što se očekuje od igrača 3 i zašto? Da li je dobivena lista strategija Nashova ravnoteža iz simultane igre?

Zadatak. Nađite skupove najboljih odgovora (i nacrtajte ih) za igru

Igrač B

		L	R
Igrač A	U	$4, -4$	$-1, 1$
	D	$0, 1$	$1, 0$

Rj.



Zadatak. Promatrajmo bimatričnu igru (A, B) s isplatama

$$u(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \quad \text{i} \quad v(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j.$$

Ako supstituiramo $p_m = 1 - (\sum_{i=1}^{m-1} p_i)$ i $q_n = 1 - (\sum_{j=1}^{n-1} q_j)$ onda su isplate funkcije od parametara $p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}$. Svako rješenje (p, q) sustava

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = 0,\ \forall i = 1, \dots, m-1, \quad \frac{\partial v}{\partial q_j} = 0,\ \forall i = 1, \dots, n-1, \tag{6}$$

koje zadovoljava

$$\forall i, j\ p_i \geq 0,\ \ q_j \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m-1} p_i \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n-1} q_j \leq 1 \tag{7}$$

je Nashova ravnoteža.

Primijenite formulu (6) na igru *Š*-*P*-*K*.

Igrač B

		$Š$	P	K	
	$Š$	$0, 0$	$1, -1$	$-1, 1$	p_1
Igrač A	P	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$	p_2
	K	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$	$1 - p_1 - p_2$
		q_1	q_2	$1 - q_1 - q_2$	

Rješenje. $p_{-m} \mapsto u(p_{-m}, q_{-n})$ je linearna funkcija i može poprimati maksimum jedino ako je konstanta (primijetite da nema uvjeta na varijablu). Isto je tako i za funkciju $q_{-n} \mapsto v(p_{-m}, q_{-n})$. Uvjet (6) daje sustav od $m-1$ jednadžbi za q_{-n} i $n-1$ jednadžbi za p_{-m}. Sustav ne mora nužno imati rješenje. Ako ima, označimo ga s (p^*_{-m}, q^*_{-n}) i ako ono zadovoljava (7), onda je svaki p najbolji odgovor za q^* i svaki q je najbolji odgovor za p^*, a to ima za posljedicu da je (p^*, q^*) Nashova ravnoteža.

U slučaju *Š-P-K*, rješenje je jedno jedino[7] i simetrično. Isplate su

$$\begin{aligned} u(p,q) &= 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2 \\ v(p,q) &= -3p_1q_2 + 3p_2q_1 + p_1 + p_2 - q_1 + q_2. \end{aligned}$$

Tražimo p koji maksimizira $u(p,q)$ za zadani q:

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} = 3q_2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial p_2} = -3q_1 + 1 = 0.$$

[7] Dokažite! Iskoristite teorem o nosaču najboljeg odaziva.

Tražimo q koji maksimizira $v(p, q)$ za zadani p:

$$\frac{\partial v}{\partial q_1} = 3p_2 - 1 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial q_2} = -3p_1 + 1 = 0.$$

Rješenje $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ zadovoljavaju uvjet (7) pa je (p, q) Nashova ravnoteža.

Zadatak. Nađite bimatričnu igru čiju Nashovu ravnotežu ne možemo izračunati na način opisan u prethodnom zadatku. Na tom primjeru pokažite da se NR ne nalaze u unutrašnjosti simpleksa nego na njegovom rubu.
Uputa. Probajte s bimatricama koje nemaju isti broj redaka i stupaca i/ili gdje je prisutna dominacija.

Zadatak. Dokažite da u svakoj bimatričnoj igri $(S_A \times S_B, u \times v)$

$$\max_{p \in \Sigma_A} \min_{q \in \Sigma_B} u(p, q) = \max_{p \in \Sigma_A} \min_{s \in S_B} u(p, s),$$

tj. $val(U)$ se postiže na nekoj čistoj strategiji $s \in S_B$ drugog igrača.

Zadatak. Svaka 2×2 bimatrična igra (bez slabe dominacije) je jedna od sljedeća 4 tipa igara:

1. oba igrača imaju dominantnu strategiju (*dilema zatvorenika*),
2. samo jedan igrač ima dominantnu strategiju (*racionalne svinje*),
3. niti jedan igrač nema dominantnu strategiju i postoje 3 NR (*igra lova, bitka partnera*),
4. niti jedan igrač nema dominantnu strategiju i postoji samo jedna miješana NR (*napad-obrana*).

Literatura

McKelvey, R. D., McLennan, A. M., and Turocy, T. L. (2015). Gambit: Software Tools for Game Theory.