Teorija igara
Uvodni dio

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

2017

Sadržaj

Slobodna definicija igre

Igra je interakcija između agenata (ljudi) u kojoj posljedice interakcije ovise o tome što agenti poduzimaju. Svaki sudionik igre vrednuje posljedice na nekoj skali zadovoljstva (korisnost). Igračima su postavljena ograničenja u vidu mogućih izbora njihovih akcija i pravila igre. Strategija igrača ovisi o ciljevima igre, ovisno o tome što igrači maksimiziraji; osobnu ili kolektivnu korisnost.

> *"Onaj tko ne vrednuje niti traži bogatstvo, koji se ne boji gubitka niti ga zanima vlastita osobnost: taj je slobodan."*
>
> Jalaluddin Rumi

> *"Postoji razlika između igranja i igranja igara. Ovo prvo je čin zadovoljstva, a drugo – samo čin.*
>
> Vera Nazarian

Bimatrična igra $G = (S_A \times S_B, u \times v)$

Normalna (strateška) forma:

$$\begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_j & b_n \\ \hline a_1 & & & \\ a_i & & (u,v)_{ij} & \\ a_m & & & \\ \hline \end{array}$$

Tablica 1.1: Normalna forma igre s dva igrača.

1. Skup od dva igrača: $\{A, B\}$,
2. $S_A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $S_B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — *akcije* (*strategije*) igrača,
3. uređen par $\pi = (a, b)$, $a \in S_A, b \in S_B$ — *profil akcija (strategija)*,
4. $u, v : S_A \times S_B \to \mathbb{R}$ — funkcije *korisnosti* (*isplata*) pojedinog igrača.
5. Skraćeni zapis bimatrične igre je (U, V) gdje su U, V matrice isplate.

Dominacija

	b_1		b_2
a_1	$(5,5)$	$\leftarrow$	$(3,2)$
	$\uparrow$		$\updownarrow$
a_2	$(3,2)$	$\leftarrow$	$(3,1)$

alt. zapis

	b_1	b_2
a_1	$(5^*, 5^*)$	$(3^*, 2)$
a_2	$(3, 2^*)$	$(3^*, 1)$

Prvi stupac *jako dominira* drugi stupac, a prvi redak *slabo dominira* drugi redak, tj. $b_1 > b_2$ (po komponentama) i $a_1 \geq a_2$ (po komponentama).

Definicija (Nashova ravnoteža)

Profil akcija (a, b) je u ravnoteži ako

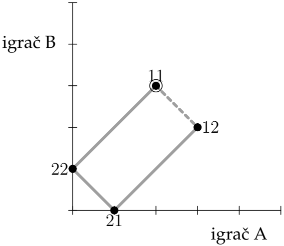
$$u(a, b) \geq u(a, b'), \forall b' \in S_B,$$
$$v(a, b) \geq v(a', b), \forall a' \in S_A.$$

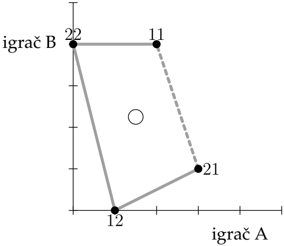
Nashova ravnoteža (NR) igre iz primjera je profil akcija (a_1, b_1).
Akcije (strategije) još nazivamo **čistim strategijama**.

Neki primjeri

	b_1		b_2
a_1	$(2,3)$	$\leftarrow$	$(3,2)$
	$\uparrow$		$\uparrow$
a_2	$(1,0)$	$\rightarrow$	$(0,1)$

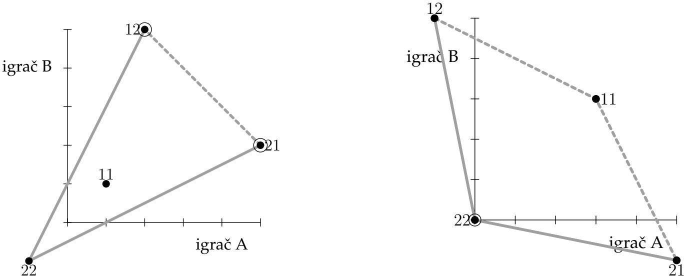
	b_1		b_2
a_1	$(2,4)$	$\leftarrow$	$(1,0)$
	$\downarrow$		$\uparrow$
a_2	$(3,1)$	$\rightarrow$	$(0,4)$





Slika 1: NR (zaokružena) postoji za prvu igru. Paretova granica (crtkano) su nedominirani parovi u $co\{(u(a), v(b)) \mid a \in S_A, b \in S_B\}$.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & & b_2 \\ \hline
a_1 & (1,1) & \rightarrow & (2,5) \\
 & \downarrow & & \uparrow \\
a_2 & (5,2) & \leftarrow & (-1,-1)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & & b_2 \\ \hline
a_1 & (3,3) & \rightarrow & (-1,5) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
a_2 & (5,-1) & \rightarrow & (0,0)
\end{array}
$$



Slika 2: Nashova ravnoteža nije nužno na Paretovoj granici.

Miješana strategija igrača je vjerojatnostna distribucija[1] na skupu mogućih izbora igrača. Oznaka: Σ_A (za igrača A) i Σ_B (za igrača B).

Na taj način Σ_A postaje standardni simpleks dimenzije $m-1$ u prostoru jednostupčanih matrica $\mathbb{R}^m$. Jednako tako i za Σ_B. Skup S_A (S_B) čistih strategija sad možemo poistovjetiti sa skupom vrhova simpleksa Σ_A (Σ_B).

Funkcije korisnosti u, v proširujemo na skup $\Sigma_A \times \Sigma_B$ po bilinearnosti:

$$u(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i u_{ij} \tau_j,$$

$$v(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i v_{ij} \tau_j,$$

Funkcije u, v nisu ništa drugo nego očekivane vrijednosti dvodimenzionalnih distribucija $U = (u_{ij})$ i $V = (v_{ij})$ s pripadnim vjerojatnostima od (σ_i, τ_j).

[1] stohastički vektor

Lokalna pohlepnost NR

Koncept *Nashove ravnoteže* sugerira da je ravnotežni profil onaj kojeg niti jedan igrač *ne može jednostrano poboljšati*. Na primjer, u igri lijevo

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & & b_2 \\
\hline
a_1 & (10,10) & \leftarrow & (9,-1) \\
 & \uparrow & & \uparrow \\
a_2 & (-1,1) & \leftarrow & (-1,-1)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & & b_2 \\
\hline
a_1 & (10,10) & \leftarrow & (9,-1) \\
 & \uparrow & & \downarrow \\
a_2 & (-1,1) & \rightarrow & (20,20)
\end{array}
$$

je (a_1, b_1) ravnotežni profil.

Lokalna pohlepnost NR

Koncept *Nashove ravnoteže* sugerira da je ravnotežni profil onaj kojeg niti jedan igrač *ne može jednostrano poboljšati*. Na primjer, u igri lijevo

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & & b_2 \\ \hline a_1 & (10,10) & \leftarrow & (9,-1) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ a_2 & (-1,1) & \leftarrow & (-1,-1) \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & b_1 & & b_2 \\ \hline a_1 & (10,10) & \leftarrow & (9,-1) \\ & \uparrow & & \downarrow \\ a_2 & (-1,1) & \rightarrow & (20,20) \end{array}$$

je (a_1, b_1) ravnotežni profil.

Igra desno ima 2 ravnotežna profila. Očito je profil (a_2, b_2) bolji za svakog igrača pojedinačno, ali se ne može do njega 'doći' iz profila (a_1, b_1) jednostanim poboljšanjem, tj. promjenom izbora samo jednog igrača.

Igrač izabire strategiju koje je dobra samo za njega, oni ne komuniciraju i nisu u stanju razmišljati 'globalno', tj. da odabiru društveno prihvatljiviju opciju.

Definicija (Igra u normalnoj formi)

Igra dva igrača (u normalnoj formi) je uređen par (Σ, U), gdje je $\Sigma = \Sigma_A \times \Sigma_B$ kartezijev produkt individualnih skupova svih miješanih strategija, a $U = (u, v)$ je uređen par individualnih funkcija korisnosti.

Definicija (Pareto)

Za uređen par strategija $(\sigma, \tau) \in \Sigma_A \times \Sigma_B$ kažemo da je *Pareto optimalan* ako nije dominiran nekim drugim parom strategija, tj. ako ne postoji $(\sigma', \tau') \in \Sigma_A \times \Sigma_B$ tako da vrijedi

$$(u(\sigma', \tau'), v(\sigma', \tau')) \succcurlyeq (u(\sigma, \tau), v(\sigma, \tau))$$

u smislu slabe dominacije vektora po komponentama.

Pareto optimalni par strategija ima smisla nazivati i **kolektivno optimalnim** jer zahtijeva nedominiranost za svakog od igrača (komponentu).

Definicija (Nashova ravnoteža)

Nashova ravnoteža je profil strategija (σ^*, τ^*) koji zadovoljava

$$u(\sigma^*, \tau^*) \geq u(\sigma^*, \tau), \forall \tau \in \Sigma_B,$$
$$v(\sigma^*, \tau^*) \geq v(\sigma, \tau^*), \forall \sigma \in \Sigma_A.$$

Drugim riječima, (σ^*, τ^*) je NR ako niti jedan igrač nema poticaj mijenjati svoju odabranu strategiju uz pretpostavku da ni ostali igrači to ne čine.

Zanimljivo je pitanje koji je najbolji odgovor igrača A na najbolji odgovor igrača B na najbolji odgovor igrača A na najbolji odgovor ... To je jedno od centralnih pitanja u algoritamskoj teoriji igara poznato kao *The best response mechanism*. Odgovor nije nimalo jednostavan jer globalno rješenje ravnoteže (σ^*, τ^*) ne mora nužno biti limes lokalno pohlepnog algoritma: *uzmi najbolji odgovor*.

Nashova ravnoteža je *stroga* ako su gornje nejednakosti stroge.
Nashova ravnoteža može se postići i na čistim strategijama.

Igre s više od 2 igrača. Oznake

- *Igrači* $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ — skup igrača, $n \in \mathbb{N}$ — broj igrača.
- *Akcije* A_i — skup akcija i-tog igrača. $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$.
- *Strategije* Σ_i — skup (miješanih) strategija i-tog igrača. $\Sigma = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$.
  Za $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ pišemo $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_n)$ i $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i})$.
  Za $a_i \in A_i$ je $\sigma_i(a_i)$ — vjerojatnost izbora akcije a_i u strategiji σ_i. Čistu strategiju $a \in A_i$ poistovjećujemo sa strategijom $\sigma_i \in \Sigma_i$ za koju je: $\sigma_i(a) = 1$. Skup $supp(\sigma) := \{a \in A \mid \sigma_i(a_i) > 0\}$ — *nosač* od σ.
- *Korisnost* Vektor korisnosti $u = (u_1, \ldots, u_n)$ na A proširujemo po multilinearnosti na skup Σ formulom

$$u_i(\sigma) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} \sigma_j(a_j). \tag{1}$$

  Očito je $\sigma_i \mapsto u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ linearna funkcija na Σ_i.

Definicija (Dominacija za miješane strategije)

Strategija $s_i \in A_i$ je *strogo dominirana* ako postoji $\sigma_i \in \Sigma_i$ tako da

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \; \forall s_{-i} \in A_{-i}. \tag{2}$$

Strategija s_i je *slabo dominirana* ako u (2) stoji $\geq$ osim za bar jedan s_{-i}.

Definicija (Dominacija za miješane strategije)

Strategija $s_i \in A_i$ je *strogo dominirana* ako postoji $\sigma_i \in \Sigma_i$ tako da

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_{-i} \in A_{-i}. \tag{2}$$

Strategija s_i je *slabo dominirana* ako u (2) stoji $\geq$ osim za bar jedan s_{-i}.

Primjer

Stupac

Redak		m	p
	a	$0, 0$	$1, -1$
	b	$-0.5, 0.5$	$1, -1$
	c	$0.5, -0.5$	$0, 0$
	d	$0, 0$	$0, 0$

Strategija d je strogo dominirana sa $\sigma = 0.5a + 0.5c$ jer je

$$u_1(\sigma, m) = 0.25 > 0 = u_1(d, m)$$

$$u_1(\sigma, p) = 0.5 > 0 = u_1(d, p).$$

Najbolji odgovor. Racionalnost

Maksimizacija (svoje) korisnosti je princip racionalnog igrača. Onaj igrač koji se ne drži tog principa ne smatra se 'iracionalnim'.

Za svaku strategiju svojih protivnika, igrač traži takvu (svoju) strategiju koja će mu donijeti najveću moguću korisnost. Takvu strategiju nazivamo *najboljim odgovorom* igrača za dane strategije suigrača.

Preciznije, σ_i je najbolji odgovor igrača i za strategije σ_{-i} svojih suigrača ako

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u(\tau, \sigma_{-i}) \; \forall \tau \in \Sigma_i.$$

Sve najbolje odgovore od σ_{-i} označimo s $\psi_i(\sigma_{-i})$. Funkcija $\sigma_{-i} \mapsto \psi_i(\sigma_{-i})$ je skupovna funkcija ili *korespodencija*. Najbolji odgovor u pravilu nije jednoznačan. Označimo nadalje, $\psi = \prod_i \psi_i$. Tada je $\psi(\sigma) \subset \Sigma$ kartezijev produkt najboljih odgovora pojedinih igrača za profile njihovih suigrača.

Definicija (Nashova ravnoteža (bis))

Profil strategija $\sigma \in \Sigma$ je Nashova ravnoteža ako $\sigma \in \psi(\sigma)$.

Definicija (Nashova ravnoteža (bis))

Profil strategija $\sigma \in \Sigma$ je Nashova ravnoteža ako $\sigma \in \psi(\sigma)$.

Primjer

Stupac

		L	C	R
	U	$2, 2$	$1^*, 4^*$	$4^*, 4^*$
Redak	M	$3^*, 3$	$1^*, 0$	$1, 5^*$
	D	$1, 1$	$0, 5^*$	$2, 3$

Najbolji odgovori:

$\psi_1(L) = \{M\}, \psi_1(C) = \{U, M\},$
$\psi_1(R) = \{U\}, \psi_2(U) = \{C, R\},$
$\psi_2(M) = \{R\},\ \psi_2(D) = \{C\}.$

$U \in \psi_1(C) \& C \in \psi_2(U) \implies (U, C)$ je NR
$U \in \psi_1(R) \& R \in \psi_2(U) \implies (U, R)$ je NR

Definicija (Nashova ravnoteža (bis))

Profil strategija $\sigma \in \Sigma$ je Nashova ravnoteža ako $\sigma \in \psi(\sigma)$.

Primjer

Stupac

		L	C	R
	U	$2, 2$	$1^*, 4^*$	$4^*, 4^*$
Redak	M	$3^*, 3$	$1^*, 0$	$1, 5^*$
	D	$1, 1$	$0, 5^*$	$2, 3$

Najbolji odgovori:

$\psi_1(L) = \{M\}, \psi_1(C) = \{U, M\},$
$\psi_1(R) = \{U\}, \psi_2(U) = \{C, R\},$
$\psi_2(M) = \{R\},\ \psi_2(D) = \{C\}.$

$U \in \psi_1(C) \& C \in \psi_2(U) \implies (U, C)$ je NR
$U \in \psi_1(R) \& R \in \psi_2(U) \implies (U, R)$ je NR

$(U, \lambda C + (1-\lambda)R),\ \lambda \in [0, 1]$ je također NR.

Literatura

McKelvey, R. D., McLennan, A. M., and Turocy, T. L. (2015). Gambit: Software Tools for Game Theory.