Teorija vrednovanja. Agregacija

Lavoslav Čaklović
PMF-MO

FOI, 12. prosinca 2014.

Sadržaj

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?
- U čemu je prednost modela?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?
- U čemu je prednost modela?
- Što je cilj svega toga?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?
- U čemu je prednost modela?
- Što je cilj svega toga?
- Najveća prepreka u ljudskom (i osobnom) napretku?

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?
- U čemu je prednost modela?
- Što je cilj svega toga?
- Najveća prepreka u ljudskom (i osobnom) napretku?

  Percepcija !

Pitanja za razmišljanje

- Što je vrednovanje? Tko to radi? Mogu li i ja?
- Zašto ne *Decision making*? **Teorija vrednovanja gotovo svega!**
- Što se tu još ima reći? Gdje su granice?
- Koja je metoda (softver) najbolja? Zašto vjerujemo strojevima?
- Što je racionalnost? Imaju li emocije tu svoje mjesto?
- Zašto (ne)volimo matematiku?
- U čemu je prednost modela?
- Što je cilj svega toga?
- Najveća prepreka u ljudskom (i osobnom) napretku?

Percepcija ! Nepoznavanje ciljeva !

Borda (1784) i Condorcet (1785)

1. mjesto	a	a	b	b	c
2. mjesto	b	c	a	c	b
3. mjesto	c	b	c	a	a
listića (23)	5	4	2	4	8

Tablica 1 : Grupni profil.

– Najviše prvih mjesta ima kandidat a (zatim c pa b).

1

Borda (1784) i Condorcet (1785)

1. mjesto	a	a	b	b	c
2. mjesto	b	c	a	c	b
3. mjesto	c	b	c	a	a
listića (23)	5	4	2	4	8

Tablica 1 : Grupni profil.

- Najviše prvih mjesta ima kandidat a (zatim c pa b).
- Međutim, 12 glasača (više od 50%) želi vidjeti a na posljednjem mjestu.

1

Borda (1784) i Condorcet (1785)

1. mjesto	a	a	b	b	c
2. mjesto	b	c	a	c	b
3. mjesto	c	b	c	a	a
listića (23)	5	4	2	4	8

Tablica 1 : Grupni profil.

- Najviše prvih mjesta ima kandidat a (zatim c pa b).
- Međutim, 12 glasača (više od 50%) želi vidjeti a na posljednjem mjestu.
- Borda predlaže metodu koja uvažava rang kandidata na svakom listiću (1. mj. 2 boda, 2. mj. 1 bod, 3. mj. 0 bodova): $a \to 20$, $b \to 25$, $c \to 24$.

1

Borda (1784) i Condorcet (1785)

1. mjesto	a	a	b	b	c
2. mjesto	b	c	a	c	b
3. mjesto	c	b	c	a	a
listića (23)	5	4	2	4	8

Tablica 1 : Grupni profil.

- Najviše prvih mjesta ima kandidat a (zatim c pa b).
- Međutim, 12 glasača (više od 50%) želi vidjeti a na posljednjem mjestu.
- Borda predlaže metodu koja uvažava rang kandidata na svakom listiću (1. mj. 2 boda, 2. mj. 1 bod, 3. mj. 0 bodova): $a \to 20$, $b \to 25$, $c \to 24$.
- Condorcet uspoređuje kandidate u parovima[1]: $m(c, b) = 12$, $m(c, a) = 12$, $m(b, a) = 14 \implies c \succ b \succ a$.

[1] $m(x, y)$ – broj listića na kojima x dominira y.

Relacija preferencije

$(S, \succcurlyeq)$ — *slaba preferencija* (potpuna, tranzitivna)

Definicija (Ordinalna funkcija vrijednosti)

$V : S \to \mathbb{R}$ nazivamo *ordinalnom* funkcijom preferencije ako

$$a \succcurlyeq b \iff V(a) \geqslant V(b).$$

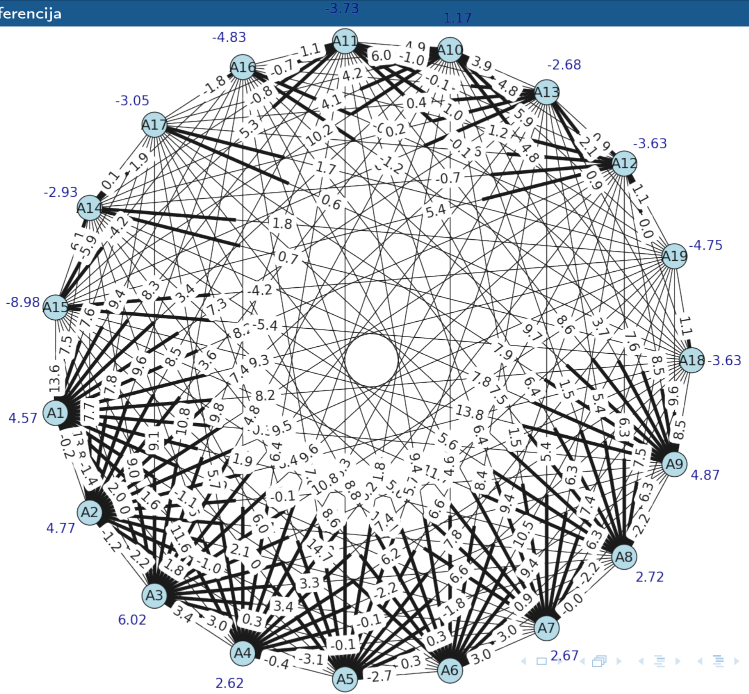
$(S_e, \succcurlyeq_e)$ — *slaba preferencija* na skupu zamjena

Definicija (Izmjeriva funkcija vrijednosti)

$V : S \to \mathbb{R}$ nazivamo *izmjerivom* funkcijom preferencije ako

$$(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d) \iff V(a) - V(b) \geqslant V(c) - V(d).$$

Slaba preferencija



Teorem reprezentacije

Donositelj odluke u praksi donosi **preferencije** $\succcurlyeq$ i želi ih **reprezentirati brojem**.

Teorem reprezentacije

Donositelj odluke u praksi donosi **preferencije** $\succcurlyeq$ i želi ih **reprezentirati brojem**.

Drugim riječima: želi dokazati teorem reprezentacije:

Teorem (Teorem reprezentacije)

Ako $\succcurlyeq$ ***zadovoljava uvjete*** *(a)...(x) onda* ***postoji*** *ordinalna (izmjeriva) funkcija vrijednosti koja je u skladu sa zadanom relacijom.*

Teorem reprezentacije

Donositelj odluke u praksi donosi **preferencije** $\succcurlyeq$ i želi ih **reprezentirati brojem**.

Drugim riječima: želi dokazati teorem reprezentacije:

Teorem (Teorem reprezentacije)

*Ako $\succcurlyeq$ **zadovoljava uvjete** (a)...(x) onda **postoji** ordinalna (izmjeriva) funkcija vrijednosti koja je u skladu sa zadanom relacijom.*

Životne situacije su kompliciranije u smislu da relacija:

– nije tranzitivna

Teorem reprezentacije

Donositelj odluke u praksi donosi **preferencije** $\succcurlyeq$ i želi ih **reprezentirati brojem**.

Drugim riječima: želi dokazati teorem reprezentacije:

Teorem (Teorem reprezentacije)

*Ako $\succcurlyeq$ **zadovoljava uvjete** (a)...(x) onda **postoji** ordinalna (izmjeriva) funkcija vrijednosti koja je u skladu sa zadanom relacijom.*

Životne situacije su kompliciranije u smislu da relacija:

- nije tranzitivna
- nije potpuna

Teorem reprezentacije

Donositelj odluke u praksi donosi **preferencije** $\succcurlyeq$ i želi ih **reprezentirati brojem**.

Drugim riječima: želi dokazati teorem reprezentacije:

Teorem (Teorem reprezentacije)

Ako $\succcurlyeq$ ***zadovoljava uvjete*** *(a)...(x) onda* ***postoji*** *ordinalna (izmjeriva) funkcija vrijednosti koja je u skladu sa zadanom relacijom.*

Životne situacije su kompliciranije u smislu da relacija:

- nije tranzitivna
- nije potpuna
- postoji više od jedne relacije preferencije među kojima postoji sukob interesa (grupna odluka).

Recipročna matrica

Rezultati uspoređivanja u parovima mogu se zapisati u matricu
$A = (a_{ij})$, gdje je
$a_{ij} \neq 0$ — relativna težina i-tog objekta u usporedbi s j-tim.

Definicija (Konzistentna matrica)

Reći ćemo da je matrica $A = (a_{ij})$ **konzistentna** ako je

$$a(i,j)a(j,k) = a(i,k) \quad \text{za svako } i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Recipročna matrica

Rezultati uspoređivanja u parovima mogu se zapisati u matricu $A = (a_{ij})$, gdje je
$a_{ij} \neq 0$ — relativna težina i-tog objekta u usporedbi s j-tim.

Definicija (Konzistentna matrica)

Reći ćemo da je matrica $A = (a_{ij})$ **konzistentna** ako je

$$a(i,j)a(j,k) = a(i,k) \quad \text{za svako } i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{1}$$

Teorem (Konzistentnost recipročne matrice)

Pozitivna i recipročna matrica A je konzistentna ako i samo ako postoje pozitivni brojevi $w_i > 0, i = 1,\ldots,n$ tako da vrijedi

$$a(i,j) = \frac{w_i}{w_j}. \tag{2}$$

Teorem (Nužni uvjet konzistentnosti matrice)

Neka je A konzistentna matrica i $w > 0$ pripadni vektor koji zadovoljava $a(i,j) = \frac{w_i}{w_j}$. Tada je w svojstveni vektor od A

$$Aw = nw.$$

Ako je $\prod_j w_j = 1$, onda je w geometrijska sredina stupaca matrice A, tj.

$$w_i = \left(\prod_j a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Teorem motivira dvije metode: (1) metodu geometrijske sredine i (2) metodu svojstvenog vektora[2].

[2] Saaty (1996)

Stohastička preferencija

S — skup objekata.
Svakom paru objekata iz S pridružimo vjerojatnost p_{ab} koja se interpretira kao naklonost donositelja odluke da izabere a ako mu je ponuđen izbor između a i b.
$p_{aa} = \frac{1}{2}, \forall a \in S$ — dogovor. Stavljamo zahtjev

$$p_{ab} + p_{ba} = 1.$$

Definiramo relaciju

$$a \succcurlyeq b \iff p_{ab} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Teorem (Konzistentnost stohastičke preferencije)

Pretpostavke: $p_{ab} \neq 0, \forall a, b$ *zadovoljava uvjet konzistentnosti*

$$\frac{p_{ab}}{p_{ba}} \cdot \frac{p_{ca}}{p_{ac}} = \frac{p_{cb}}{p_{bc}}, \quad \text{za svako } a, b, c \in S. \tag{3}$$

Tada je $\succcurlyeq$ *relacija slabe preferencije i postoji realna funkcija* V *tako da je*

$$p_{bc} = \frac{V(b)}{V(b) + V(c)}. \tag{4}$$

Nadalje,

$$a \succcurlyeq b \iff V(a) \geqslant V(b),$$

i funkcija $v(a) = \ln(V(a))$ *je izmjeriva funkcija vrijednosti, tj.*

$$(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d) \iff v(a) - v(b) \geqslant v(c) - v(d), \tag{5}$$

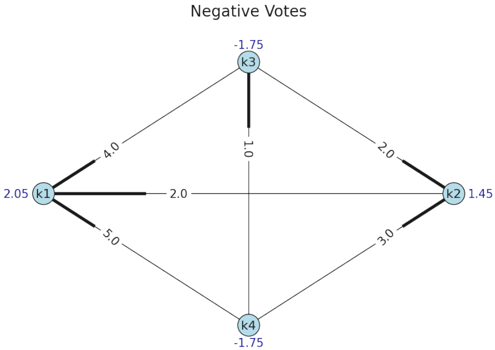
gdje je $(a \leftarrow b) \succcurlyeq_e (c \leftarrow d) \iff p_{ab} \geqslant p_{cd}$.

Glasački listić. Kolačići

	kandidati			
glasač	k1	k2	k3	k4
1	3	2	$*$	1
2	5	4	1	$*$
3	4	5	$*$	$*$
4	4	4	$*$	1
5	4	2	$*$	-1
rang	1	2	3	3

$* = 0$ bod[3], max $= 10$ bod

potencijal			
k1	k2	k3	k4
2.05	1.45	-1.75	-1.75



[3] $*$ se može interpretirati i kao *missing data*.

Agregacija

Agregirati znači ujediniti individualne preferencije u kolektivnu.

individua $\equiv$ atribut, pojedinac, kriterij

kolektiv $\equiv$ grupa, zajednički cilj, socijalna preferencija

Agregacija

Agregirati znači ujediniti individualne preferencije u kolektivnu.
individua $\equiv$ atribut, pojedinac, kriterij
kolektiv $\equiv$ grupa, zajednički cilj, socijalna preferencija

Teorem (Arrow 1963)

Neka je A skup kandidata, $\#(A) > 2$, S skup glasača, $n := \#(S) > 1$, i $\mathcal{P}$ skup svih linearnih uređaja na skupu A.

Agregacija

Agregirati znači ujediniti individualne preferencije u kolektivnu.
individua $\equiv$ atribut, pojedinac, kriterij
kolektiv $\equiv$ grupa, zajednički cilj, socijalna preferencija

Teorem (Arrow 1963)

Neka je A skup kandidata, $\#(A) > 2$, S skup glasača, $n := \#(S) > 1$, i $\mathcal{P}$ skup svih linearnih uređaja na skupu A.

Ako socijalna preferencija $\mathcal{S} : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$ zadovoljava aksiom nezavisnosti i Paretov aksiom onda je $\mathcal{S}$ diktatorstvo, tj. socijalni uređaj jednak je nekom individualnom uređaju bez obzira na glasački profil.

Agregacija

Agregirati znači ujediniti individualne preferencije u kolektivnu.
individua $\equiv$ atribut, pojedinac, kriterij
kolektiv $\equiv$ grupa, zajednički cilj, socijalna preferencija

Teorem (Arrow 1963)

Neka je A skup kandidata, $\#(A) > 2$, S skup glasača, $n := \#(S) > 1$, i $\mathcal{P}$ skup svih linearnih uređaja na skupu A.

Ako socijalna preferencija $\mathcal{S} : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$ zadovoljava aksiom nezavisnosti i Paretov aksiom onda je $\mathcal{S}$ diktatorstvo, tj. socijalni uređaj jednak je nekom individualnom uređaju bez obzira na glasački profil.

'Potraga za demokracijom': **Utilitaristički pristup** — preferencije se izražavaju na nekoj skali.

Agregacija

Agregirati znači ujediniti individualne preferencije u kolektivnu.
individua $\equiv$ atribut, pojedinac, kriterij
kolektiv $\equiv$ grupa, zajednički cilj, socijalna preferencija

Teorem (Arrow 1963)

Neka je A skup kandidata, $\#(A) > 2$, S skup glasača, $n := \#(S) > 1$, i $\mathcal{P}$ skup svih linearnih uređaja na skupu A.

Ako socijalna preferencija $\mathcal{S} : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$ zadovoljava aksiom nezavisnosti i Paretov aksiom onda je $\mathcal{S}$ diktatorstvo, tj. socijalni uređaj jednak je nekom individualnom uređaju bez obzira na glasački profil.

'Potraga za demokracijom': **Utilitaristički pristup** — preferencije se izražavaju na nekoj skali. Balinski and Laraki (2007) — Orsay experiment (**lingvistička skala**).

Dobra 'ordinalna kardinalnost'

Danski obrazovni sustav, koji se prilagodio ECTS[4] sustavu, definira ocjene kao u tablici:

klasa	postotak*	opisna ocjena	ocjena
A	10%	odlično	?
B	25%	vrlo dobro	?
C	30%	dobro	?
D	25%	zadovoljava	?
E	10%	slabo	?
F		nedovoljno	?

* postotak od broja prolaznih testova.

Klasu A dobiva student koji je po svom uspjehu u gornjih 10% studenata. Sljedećih 25% dobiva klasu B itd. . .

[4] European Credit Transfer and Accumulation System

Dobra 'ordinalna kardinalnost'

Danski obrazovni sustav, koji se prilagodio ECTS[4] sustavu, definira ocjene kao u tablici:

klasa	postotak*	opisna ocjena	ocjena
A	10%	odlično	12
B	25%	vrlo dobro	10
C	30%	dobro	7
D	25%	zadovoljava	4
E	10%	slabo	2
F		nedovoljno	0

* postotak od broja prolaznih testova.

Klasu A dobiva student koji je po svom uspjehu u gornjih 10% studenata. Sljedećih 25% dobiva klasu B itd... Ocjene 2, 4, 7, 10, 12 odražavaju intervale (postotaka) u drugom stupcu. Interval $[2, 3]$ (klasa E) je 10% duljine intervala $[2, 12]$ itd...

[4]European Credit Transfer and Accumulation System

Smislenost agregacije

$\mathcal{P}$ — skup **objekata** (rezultata mjerenja na elementima skupa S).
U praksi su to **matrice, slučajne varijable, grafovi preferencija**, ...

Definicija (Agregacija)

Agregacija (u strogom smislu[5]) na skupu $\mathcal{P}$ je n-arna operacija na $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{A} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \cdots \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}.$$

[5] U širem smislu to je skupovno preslikavanje na $\mathcal{P}^n$ koje za područje vrijednosti ima skup podskupova od $\mathcal{P}$ (nejedinstvenost).

Primjeri (ne)agregacija

(Borda) $\mathcal{P}$ — linerani uređaji. Rezultat rangiranja je funkcija $V : \{\text{skup kandidata}\} \mapsto \mathbb{R}$ (bodovanje), koju možemo interpretirati kao linearni uređaj ako na bodovnoj listi nema vezanosti **nije** agregacija.

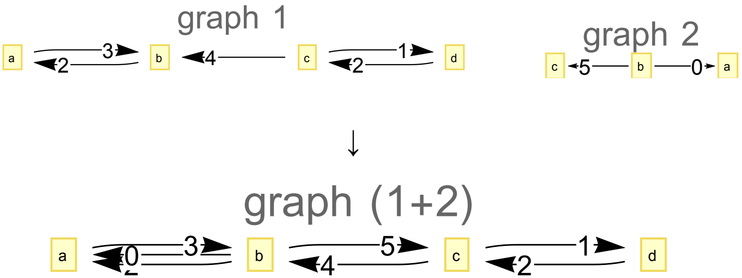
(Medijan) Keményjev medijan je permutacija koja minimizira sumu udaljenosti simetričnih razlika od skupa zadanih permutacija. Nije jedinstven. Primjer agregacije u **širem smislu**.

(Geometrijska sredina) Ako su A, B dvije pozitivne recipročne matrice i $C = A \circ B$ geometrijska sredina matrica s težinama onda je C također pozitivna recipročna matrica.

(Konveksna kombinacija) Konveksna kombinacija stohastičkih vektora **je agregacija**.

Primjeri (ne)agregacija – nastavak

(Agregacija binarnih relacija) Binarne relacije mogu se reprezentirati pomoću usmjerenih grafova. Grafovi se agregiraju dodavanjem svih lukova iz individualnih grafova. Rezultat **agregacije** je multigraf.



Tablica odlučivanja

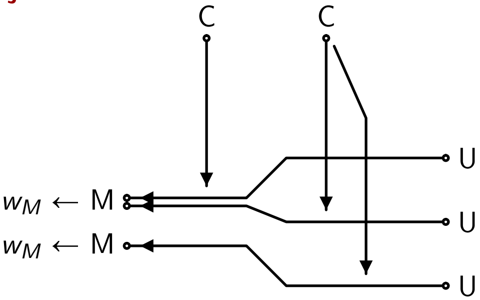
U slučaju višeatrubutnog odlučivanja tablični zapis je pogodan ako svaki atribut ima svoju funkciju vrijednosti[6].

- PROMETHEE metoda od tablice gradi graf preferencije kao završnu fazu vrednovanja[7].
- Teorija očekivane korisnosti polazi od tablice odlučivanja u kojoj se vrednuju posljedice i lutrije neovisno od akcija i stanja svijeta (korisnost).
- Metoda potencijala ne agregira stupce nego grafove koji su izvedeni iz tih stupaca. Nepostojeći podaci (*missing data*) ne predstavljaju u tome nikakvu prepreku.
- Stvarni problem u agregaciji je nepoznavanje težina atributa. U literaturi se o tome nevoljko priča.

[6] To nije tablica odlučivanja u smislu *teorije očekivane korisnosti*.
[7] Za razliku od MP kojoj je to početak.

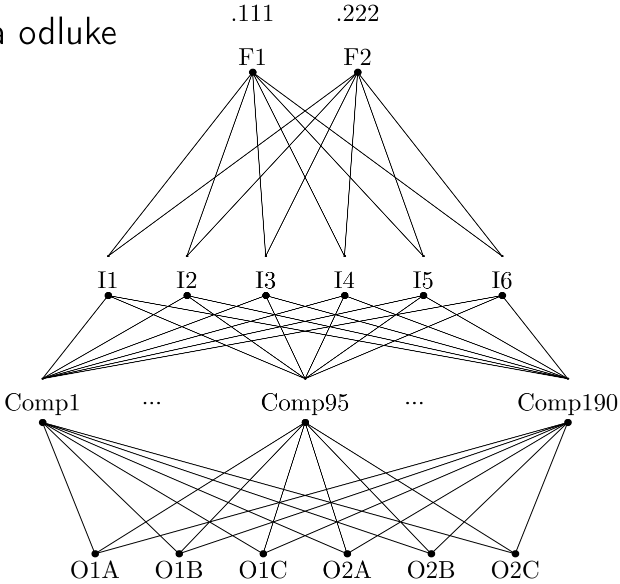
Hijerarhija odluke

Ciljno mišljenje



C – ciljevi
M – mogućnosti (za postizanje cilja)
U – uvjerenja (koja je mogućnost bolja)

Hijerarhija odluke



Slika 1 : Hijerarhijska struktura s više ciljeva.

Perronov teorem

Teorem (Perron[8], 1907)

Neka je A pozitivna matrica.

- *Tada A ima prostu pozitivnu svojstvenu vrijednost λ_{max} koja je veća po modulu od svih ostalih svojstvenih vrijednosti od A.*
- *Pripadni svojstveni vektor w ima pozitivne komponente i jedinstven je do na množenje pozitivnim brojem.*
- *λ_{max} ima max-min (min-max) karakterizaciju*

$$\lambda_{max} = \max_{x \geqslant 0} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geqslant 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

[8] Oskar Perron (1880 – 1975), njemački matematičar.

Metoda svojstvenog vektora

A — pozitivna recipročna matrica.

Ako A nije konzistentna onda se Perronov vektor uzima kao vektor 'težina' objekata.

[9] Index inkonzistentnosti.

Metoda svojstvenog vektora

A — pozitivna recipročna matrica.

Ako A nije konzistentna onda se Perronov vektor uzima kao vektor 'težina' objekata.

Varijacijski pristup:
Vektor $w > 0$ je svojstveni vektor od A ako i samo ako minimizira funkciju

$$\Phi_A(w) := \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} - 1 \right)$$

na skupu pozitivnih vektora u $\mathbb{R}^n$

[9]Index inkonzistentnosti.

Metoda svojstvenog vektora

A — pozitivna recipročna matrica.

Ako A nije konzistentna onda se Perronov vektor uzima kao vektor 'težina' objekata.

Varijacijski pristup:
Vektor $w > 0$ je svojstveni vektor od A ako i samo ako minimizira funkciju

$$\Phi_A(w) := \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} - 1 \right)$$

na skupu pozitivnih vektora u $\mathbb{R}^n$
Funkcija $\Phi_A(w)$ mjeri odstupanje[9] matrice A od skupa konzistentnih matrica.

[9] Index inkonzistentnosti.

Metoda geometrijske sredine

A — pozitivna recipročna matrica.

Ako A nije konzistentna onda se geometrijska sredina stupaca od A uzima kao vektor 'težina' objekata.

Metoda geometrijske sredine

A — pozitivna recipročna matrica.

Ako A nije konzistentna onda se geometrijska sredina stupaca od A uzima kao vektor 'težina' objekata.

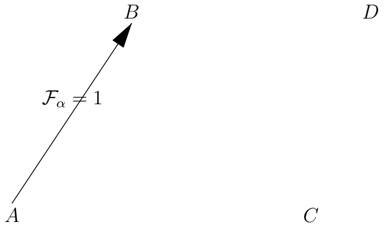
Varijacijski pristup:
Vektor $w > 0$ je geometrijska sredina stupaca matrice A ako i samo ako minimizira funkciju

$$\Psi_A(w) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\ln a_{ij} + \ln w_j - \ln w_i)^2,$$

na skupu pozitivnih vektora u $\mathbb{R}^n$.

$\Psi_A(w)$ je geometrijski indeks inkonzistentnosti.

Metoda potencijala[10]



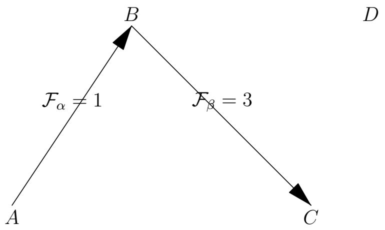
Tok preferencije $\mathcal{F}$

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



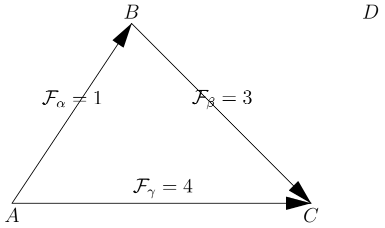
Tok preferencije $\mathcal{F}$

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

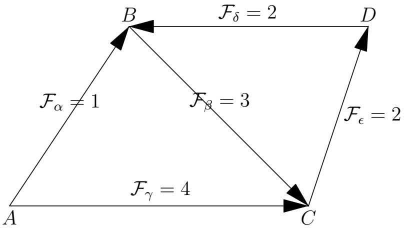
$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4

[10]MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

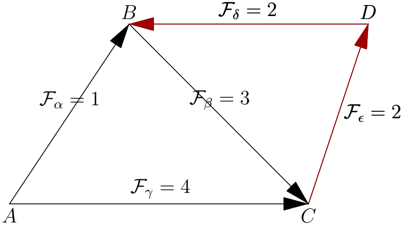
$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	−1	1	0	0	1
β	0	−1	1	0	3
γ	−1	0	1	0	4
δ	0	1	0	−1	2
ϵ	0	0	−1	1	2

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$

$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

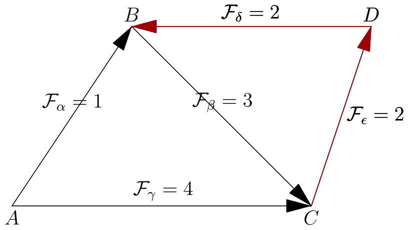
$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$

$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

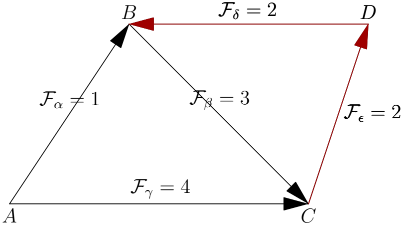
Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$
$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

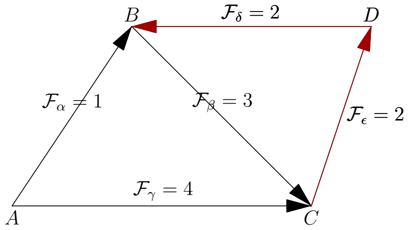
Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$
$$c \oplus \mathcal{F}_o = \mathcal{F}$$

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$
$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

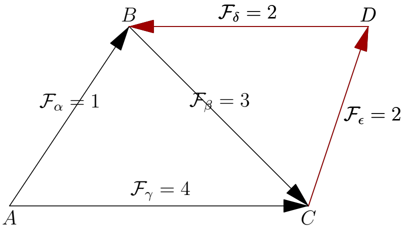
	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$
$$c \oplus \mathcal{F}_o = \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $\mathcal{F} \in R(A)$

[10]MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$
$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

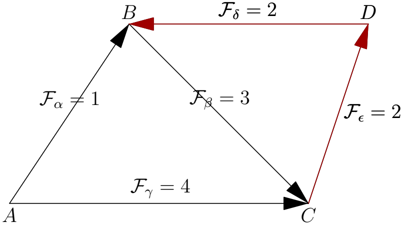
$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$
$$c \oplus \mathcal{F}_o = \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $\mathcal{F} \in R(A)$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $AX = \mathcal{F}$

[10] MetPot – download (Win)

Metoda potencijala[10]



Tok preferencije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_\alpha + \mathcal{F}_\beta - \mathcal{F}_\gamma = 0$$
$$\mathcal{F}_\epsilon + \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_\beta = 7$$

$\mathcal{F}$ ciklus DBCD nije konzistentan!

Matrica incidencije $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

	nodes$_n$				flow
arcs$_m$	A	B	C	D	$\mathcal{F}$
α	-1	1	0	0	1
β	0	-1	1	0	3
γ	-1	0	1	0	4
δ	0	1	0	-1	2
ϵ	0	0	-1	1	2

$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$
$$c \oplus \mathcal{F}_o = \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $\mathcal{F} \in R(A)$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $AX = \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ je konzistentan akko $c \perp \mathcal{F}, \forall c$

[10] MetPot – download (Win)

Potencijal grafa preferencije

A — matrica incidencije grafa, n broj čvorova, m broj lukova.
$\mathcal{F}$ — tok preferencije.

Rangiranje čvorova određeno je *potencijalom* X koji rješava jedn.

$$A^\tau AX = A^\tau \mathcal{F}.$$

Desna strana jednadžbe predstavlja razliku ulaznog i izlaznog toka u čvorovima grafa, a $L = A^\tau A$ je *Laplaceova matrica* grafa.

Potencijal grafa preferencije

A — matrica incidencije grafa, n broj čvorova, m broj lukova.
$\mathcal{F}$ — tok preferencije.

Rangiranje čvorova određeno je *potencijalom* X koji rješava jedn.

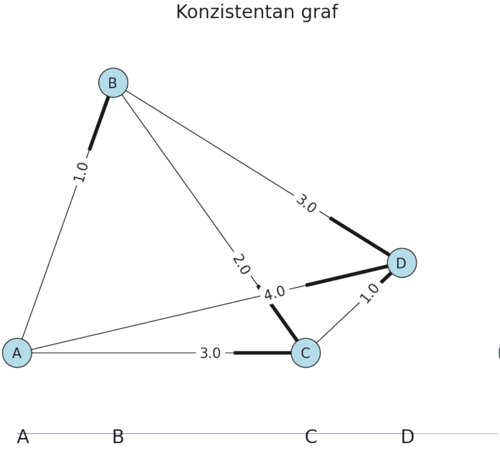
$$A^\tau AX = A^\tau \mathcal{F}.$$

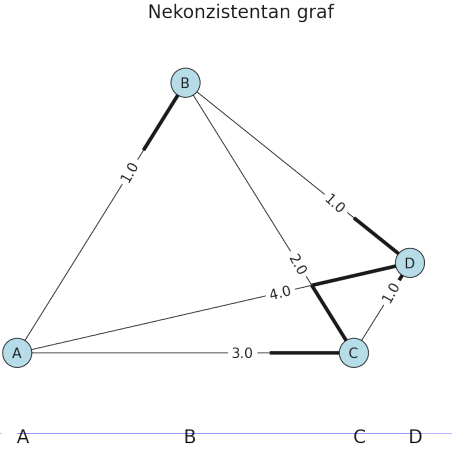
Desna strana jednadžbe predstavlja razliku ulaznog i izlaznog toka u čvorovima grafa, a $L = A^\tau A$ je *Laplaceova matrica* grafa.

Za povezan graf, matrica A je ranga $n-1$, jezgra je razapeta vektorom $\mathbb{1} = [1, 1, \ldots, 1]^\tau$. Radi jedinstvenosti X stavljamo zahtjev

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Konzistentnost (bis)





Primjena

Sustavi s povratnim vezama
To su problemi s povratnim vezama u kojima nema unaprijed definiranih prioriteta.

Dijagnoza (Dijagnoza bolesti i forenzika općenito.)
Inteligentni roboti (Komunikacija između robotima u prometu)
I/O. DEA (Data envelopment analysis)

AI – Strojno učenje

Klasifikacija (na temelju testnog uzorka)
Predviđanje (na temelju historijskih podataka)

Sinergija ili *raditi zajedno*.
U primjenama je sinergija sveprisutna.

Ocjenjivanje (Donošenje ocjene na temelju parcijalnih ispita)
Sport (Strukturna matrica sedmoboja)

Primjer iz kliničke prakse.

Žena u drugom tromjesečju trudnoće primljena je u bolnicu s abnormalno lošom krvnom slikom (anemija, nizak broj trombocita, krvnim ugrušcima, povišenim PTT[11]), nenormalnom funkcijom jetre[12] i poremećenim imunološkim sustavom (povišeni ANA[13]/ACA[14] koji upućuju na povećanu prisutnost antitijela). U prvom trenutku liječnik razmatra četiri potencijalne dijagnoze (Lupus[15], TTP[16], HELLP[17], ACA sindrom[18]). Liječnik treba donijeti odluku o prekidu trudnoće kao dijelu terapije za poboljšanje zdravlja bolesnice (Saaty and Vargas (1998)).

[11] Vrijeme zgrušavanja krvi.

[12] eng. *Abnormal liver test reflecting inflamation.*

[13] *Anti-nuclear antibodies* (ANA)

[14] *Anti-cytoplasmic antibodies* (ACA)

[15] *Lupus* je autoimuna bolest karakterizirana akutnim i kroničnim upalama raznih tkiva u tijelu.

[16] *Trombotično trombocitopenijska purpura.*

[17] H – *hemolysis*; EL – *elevated liver enzymes*; LP – *low platelet count*. HELLP sindrom se često manifestira kroz snažne bolove u gornjem dijelu trbuha i leđima. Potencijalno je smrtonosan i za majku i za dijete

[18] ACA sindrom – eng. *Anterior Cerebral Artery syndrome*, ograničena opskrba krvlju prednjom moždanom arterijom

	Lupus	TTP	HELLP	ACAsyn
Anemia	+	+	+	+
LP	+	+	+	+
ABL	−	−	+	−
BC	+	+	−	+
APTT-H	+	+	+	+
ANA-H	+	−	−	−
ACA-H	+	+	−	+

Tablica 2 : Simptomi za odabrane bolesti.

	Anemia	LP	ABL	BC	APTT-H	ANA-H	ACA-H
Anemia	+	−	+	−	−	+	+
LP	−	−	+	+	+	+	+
ABL	−	+	−	−	−	−	−
BC	−	−	−	−	+	+	+
APTT−H	−	−	−	+	−	−	+
ANA−H	−	+	−	+	+	−	+
ACA−H	−	−	−	+	+	+	−

Tablica 3 : Prateći simptomi za svaki odabrani simptom.

	Anemia	LP	ABL	BC	APTT-H	ANA-H	ACA-H
Lupus	+	+	−	+	+	+	+
TTP	+	+	−	+	+	+	+
HELLP	+	+	+	+	+	+	+
ACAsyn	+	+	−	+	+	+	+

Tablica 4 : Moguće bolesti za dane simptome.

Struktura hijerarhije kod dijagnoze

Kako nisu poznate ni težine simptoma ni težine bolesti, jasno je da će hijerarhija biti samorangirajuća i to sa sljedećim nivoima (od višeg prema nižem):

bolesti – *simptomiA* – *simptomiB* – *bolesti.*

Rezultat samorangiranja:

Za prekid	Protiv prekida
0.66	0.34

Tablica 5 : Proriteti za alternativne tretmane.

Inteligentni roboti[19] (memorija)

$$\mathcal{F}^{L}_{(L,W)} = 1, \mathcal{F}^{L}_{(W,R)} = 1, \mathcal{F}^{L}_{(L,R)} = 2. \qquad \text{(L-flow)}$$

$$\mathcal{F}^{R}_{(W,L)} = 1, \mathcal{F}^{R}_{(R,W)} = 2, \mathcal{F}^{R}_{(R,L)} = 2. \qquad \text{(R-flow)}$$

$$\mathcal{F}^{W}_{(W,L)} = 0, \mathcal{F}^{W}_{(R,W)} = 2, \mathcal{F}^{W}_{(R,L)} = 2. \qquad \text{(W-flow)}$$

hijerarhija s povratnim vezama			
1. nivo	R1L	R1W	R1R
2. nivo	R2L	R2W	R2R
3.($\equiv$ 1.) nivo	R1L	R1W	R1R

fiksna točka			
iteracija	R1L	**R1R**	R1W
1.	0.251	0.481	0.269
...	...	...	...
6.	0.228	**0.516**	0.256

[19] Čaklović (2011)

Input–output. DEA

Fak	stud	zap	publ	dipl	fin	eff-opt	ref. set	eff-pes	ref. set
A	300	40	250	200	10	1	A	1.407	D
B	300	30	200	180	20	1	B	1.750	C, D
C	100	15	70	80	15	0.857	B, E	1	C
D	800	150	100	400	80	0.580	A, B	1	C
E	600	80	500	500	65	1	E	1	C

Tablica 6 : Efikasnost fakulteta. CCR model. Optim–pesim. analiza.

Ulazne varijable su *zap, fin*, a izlazne varijable su *stud, publ, dipl*.

(u^i, v^i) — vektori optimalnih težina (ulaz, izlaz) za dmu_i.
Cross-efficiency matrix[20]

$$c_{ij} = \mathrm{eff}_j(u^i, v^i)$$

	dmu_6	dmu_7	dmu_4	dmu_8	PM-rank
dmu_6	100	91.57	100	93.08	0.299
dmu_7	80.29	100	95.07	86.27	0.244
dmu_4	100	91.57	100	93.08	0.222
dmu_8	100	100	74.74	99.65	0.235

Tablica 7 : *Cross-efficiency* matrica za efikasne dmu

Usrednjenje po recima daje drugačiji rang (?smisao?).

[20] Čaklović, Lavoslav and Hunjak, Tihomir (2012)

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \dots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \dots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f? Ako S ima puno elemenata kako iskoristiti statistiku?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f? Ako S ima puno elemenata kako iskoristiti statistiku? Što ako su x_i uređene k-torke brojeva?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f? Ako S ima puno elemenata kako iskoristiti statistiku? Što ako su x_i uređene k-torke brojeva? Što ako ne želim statistiku nego želim okriti 'egzaktno pravilo zaključivanja' (binarna stabla)?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f? Ako S ima puno elemenata kako iskoristiti statistiku? Što ako su x_i uređene k-torke brojeva? Što ako ne želim statistiku nego želim okriti 'egzaktno pravilo zaključivanja' (binarna stabla)? Što ako podaci nisu konzistentni?

Klasifikacija

Zadan je podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i n parova (*training set*):

$$\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}, y_i =: h(x_i).$$

Problem klasifikacije: Naći proširenje $f(x) : S \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ funkcije $h(x)$ koja najbolje aproksimira h.

Pitanja. Kako mjeriti bliskost (u S i u skupu funkcija)? Ima li dodatnih zahtjeva na f? Ako S ima puno elemenata kako iskoristiti statistiku? Što ako su x_i uređene k-torke brojeva? Što ako ne želim statistiku nego želim okriti 'egzaktno pravilo zaključivanja' (binarna stabla)? Što ako podaci nisu konzistentni? *Kako uključiti dodatne informacije i znanje eksperta u interaktivnoj komunikaciji stroja i čovjeka?*

Klasifikacija

	input			
training set	A	b	1	zec
training set	B	a	1	zec
training set	A	b	2	žaba
training set	B	a	2	žaba
training set	X	y	1	zec
training set	X	x	1	zec
	B	x	1	???

Što očekujemo kao odgovor u posljednjem retku?

Klasifikacija

	input			
training set	A	b	1	zec
training set	B	a	1	zec
training set	A	b	2	žaba
training set	B	a	2	žaba
training set	X	y	1	zec
training set	X	x	1	zec
	B	x	1	???

Što očekujemo kao odgovor u posljednjem retku? **zec**?

Klasifikacija

	input			
training set	A	b	1	zec
training set	B	a	1	zec
training set	A	b	2	žaba
training set	B	a	2	žaba
training set	X	y	1	zec
training set	X	x	1	zec
	B	x	1	**???**

Što očekujemo kao odgovor u posljednjem retku? **zec**?

Zadatak. Iskoristiti MCDA, osloboditi prostor za ekspertno znanje (nove kriterije). Odgovor bi trebao biti rang-lista kategorijskih vrijednosti {zec, žaba} s pripadnim rangovima.

Predviđanje

	a	target	b
x1	1	1	1
x2	-	?	4
x3	9	?	-
x4	-	?	16
x5	25	?	-
x6	-	?	36
x7	49	?	-
x8	-	?	64
x9	81	81	-

Predviđanje

	a	target	b
x1	1	1	1
x2	-	4	4
x3	9	9	-
x4	-	16	16
x5	25	25	-
x6	-	36	36
x7	49	49	-
x8	-	64	64
x9	81	81	-

Ocjenjivanje

	F	M	E		FM	ME	FE	
	5	5	5	*suma*	2	2	2	w
a	18	12	6	36	30	$*$	24	0.286
b	18	7	11	36	25	$*$	29	0.281
c	5	17	8	30	22	25	$*$	0.221
d	5	12	13	30	$*$	25	$*$	0.212

Tablica 8 : Interakcija[21] kriterija.

[21] Koalicija, sinergija

Sedmoboj. Strukturna matrica

Utjecaj motoričkih disciplina na discipline sedmoboja:

Event	AE	GS	Skill	RS	Speed	Mob	ES	SpE	StrE
100m Hurdles	-	Med	High	High	High	High	High	Med	-
High Jump	-	Low	High	High	High	High	High	-	-
Shot Putt	-	High	High	Med	Low	Med	High	-	-
Run 200m	Low	Med	Med	High	High	High	High	High	High
Long Jump	-	Low	High	High	High	High	High	-	-
Javelin Throw	-	Med	High	High	Low	High	High	-	-
Run 800m	High	-	Low	Low	Med	Low	-	-	High

AE=Aerobic Endurance
GS=Gross Strength
RS=Relative Strength
Speed=Running Speed

Mob=Mobility
ES=Explosive Strength
SpE=Speed Endurance
StrE=Strength Endurance

Komutativnost agregiranja i rangiranja

$A^{(i)}$ — poz. rec. matrice, $\mathcal{C}$ — agregacija, $\mathcal{M}$ — metoda rangiranja

$$\begin{tikzcd}
(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}) \arrow[r, "\mathcal{C}"] \arrow[d, "\times_1^m \mathcal{M}"'] & A \arrow[d, "\mathcal{M}"] \\
(w_1, \ldots, w_m) \arrow[r, "\mathcal{C}"] & w
\end{tikzcd}$$

Idealno bi bilo kad bi gornji **dijagram komutirao**, tj.

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})) = \mathcal{C}(\mathcal{M}(A^{(1)}), \ldots, \mathcal{M}(A^{(m)})).$$

Komutativnost dijagrama izražava zahtjev da je svejedno kojim redoslijedom računamo grupni vektor prioriteta w.

Teorem

Dijagram komutira ako su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{M}$ geometrijske sredine. (Dokaz $\to$)

Dokaz. Promatrajmo agregaciju $\circ$ konzistentnih matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ \frac{1}{x} & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & y \\ \frac{1}{y} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f(x,y) \\ \frac{1}{f(x,y)} & 1 \end{bmatrix}$$

gdje funkcija $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadovoljava sljedeće aksiome:

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(x,y)} \quad \text{(recipročnost)} \qquad \text{(A1)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y) \quad \text{(homogenost)} \qquad \text{(A2)}$$

$$f(x,y) = f(y,x) \quad \text{(komutativnost).} \qquad \text{(A3)}$$

Teorem

Uz gornje pretpostavke i zahtjeve f ima oblik $f(x,y) = \sqrt{xy}$, tj. agregacija je nužno geometrijska sredina matrica.

Teorem

Ako su svi grafovi[22] potpuni[23] onda dijagram komutira ako je agregacija $\mathcal{C}$ definirana kao konveksna kombinacija, a $\mathcal{M}$ metoda potencijala.

Dokaz. Ako su $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ tokovi preferencija, $A := A_1 = A_2$ pripadna matrica incidencije, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = 1/2(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$, L Laplaceova matrica grafa, X, X_1, X_2 pripadni potencijali onda je:

$$\begin{aligned}
LX_1 &= A^\tau \mathcal{F}_1, & LX_2 &= A^\tau \mathcal{F}_2 \\
2LX &= A^\tau(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2), & A^\tau \mathcal{F} &= A_1^\tau \mathcal{F}_1 + A_2^\tau \mathcal{F}_2 \quad \text{(razlika toka)} \\
2LX &= A^\tau \mathcal{F}_1 + A^\tau \mathcal{F}_2, & LX &= 1/2L(X_1 + X_2) \\
&\Longrightarrow & X &= 1/2(X_1 + X_2). \quad \square
\end{aligned}$$

[22] Nisu multigrafovi

[23] Kod nepotpunih grafova mijenja se Laplaceova matrica grafa.

Bibliografija

Balinski, M. and Laraki, R. (2007). Election by Majority Judgement: Experimental Evidence. Technical report. Laboratoire d'Econometrie 1, rue Descartes F-75005, Paris.

Saaty, T. L. (1996). *The Analytic Hierarchy Process*. RWS Publications, Pittsburgh. Prvo izdanje 1980, McGraw Hill.

Saaty, T. L. and Vargas, L. G. (1998). Diagnosis with dependent symptoms: Bayes theorem and Analytic Hierarchy Proces. *Operational Research*, 46(4):491–502.

Čaklović, L. (2011). Conflict Resolution. Risk-As-Feelings Hypothesis. *Labsi Working Papers*, (35):1–16. http://www.labsi.org/wp/labsi35.pdf.

Čaklović, Lavoslav and Hunjak, Tihomir (2012). Measuring dmu-efficiency by modified cross-efficiency approach. *Math. Commun.*, 17:559–573.