

Vedska matematika

Lavoslav Čaklović
caklovic[at]math.hr

[https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/vedska.
matematika.pdf](https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/vedska.matematika.pdf)

26. ožujka 2025.

Sadržaj

1 Uvod

Izvor

2 Malo povijesti

Broj nula

Aryabhata

Brahmagupta

Konceptualizacija. Broj

Potruga za definicijom

Suvremeni pojam broja

Prirodni brojevi

Śūnyatā

Zapisivanje brojeva

Numerali

Arapski brojevi

Brahmi

Mezopotamija

3 Decimalni zapis broja

Potpisivanje

Kod zbrajanja

Kod množenja

4 Nikhilam sutra

Množenje

Zadaci

Računanje komplementa

Kvadriranje

Neki specijalni slučajevi

Množenje s 9, 99...

Dijeljenje

Dijeljenje s 9

5 Ūrdhva – tiryagbhyām

Množenje dvoznamenkastih brojeva

6 Parāvartya – Yojayet

Dijeljenje

Što je Vedska matematika?

Vedska matematika nudi mnoštvo načina množenja brojeva i rješavanja jednačbi ovisno o njihovoj strukturi i njihovom međusobnom odnosu. Iskazani su u obliku 16 sūtri i njihovih posljedica.

Što je Vedska matematika?

Vedska matematika nudi mnoštvo načina množenja brojeva i rješavanja jednačbi ovisno o njihovoj strukturi i njihovom međusobnom odnosu. Iskazani su u obliku 16 sutri i njihovih posljedica.

Na pitanje čemu potreba za takvo računanje danas kad računalo to može napraviti puno brže i bez greške, moj je odgovor jednostavan?

Što je Vedska matematika?

Vedska matematika nudi mnoštvo načina množenja brojeva i rješavanja jednačbi ovisno o njihovoj strukturi i njihovom međusobnom odnosu. Iskazani su u obliku 16 sutri i njihovih posljedica.

Vedska matematika ne nudi jednu tehniku množenja brojeva već duboko zadire u razne algebarske identitete koji se mijenjaju ovisno o situaciji. Primjena tih sutri razvija senzibilitet za broj kao najapstraktniju strukturu ove civilizacije.

Što je Vedska matematika?

Vedska matematika nudi mnoštvo načina množenja brojeva i rješavanja jednačbi ovisno o njihovoj strukturi i njihovom međusobnom odnosu. Iskazani su u obliku 16 sutri i njihovih posljedica.

Vedska matematika ne nudi jednu tehniku množenja brojeva već duboko zadire u razne algebarske identitete koji se mijenjaju ovisno o situaciji. Primjena tih sutri razvija senzibilitet za broj kao najapstraktniju strukturu ove civilizacije.

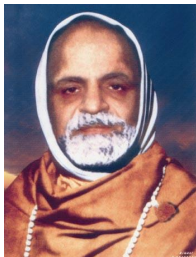
Pomnožiti dva broja je svakodnevna potreba jednako tako kao što je to i hrana. Senzibilitet za hranu daje vašem životu smisao koji nemate ako vam uzimanje hrane služi samo da bi utažili glad. Vedska matematika razvija senzibilitet za broj i algebru.

Što je Vedska matematika?

Vedska matematika nudi mnoštvo načina množenja brojeva i rješavanja jednačbi ovisno o njihovoj strukturi i njihovom međusobnom odnosu. Iskazani su u obliku 16 sutri i njihovih posljedica.

Brojevi i operacije nad njima u najširem smislu odražavaju odnose među pojavama. Operacije nad brojevnim nastale su kako bi reprezentirali te odnose, bez obzira, radi li se o fizičkom kretanju ili složenim simetrijama u geometriji ili proteinskim strukturama.

Literatura



Vedic Mathematics
or
Sixteen simple Mathematical
Formulae from the Vedas
by
Jagadguru Śaṅkarācārya
Śrī Bhāratī Kṛṣṇa Tīrthaji Mahārāja
(1884 – 1960)

O knjizi

Prvo izdanje. Varanasi, 1965, Motilal Banarsidass

Prema riječima samog autora tih šesnaest sutri na kojima se temelji knjiga čine dio *Pariśiṣṭu*¹ *Athavavede*.

Metode su potpuno nekonvencionalne i oni koji su ukorijenjeni u konvencionalnim metodama podsvjesno odbijaju vidjeti logiku u tim nekonvencionalnim metodama.

¹*Pariśiṣṭa* je tekst koji je nadopuna na mnogo starije tekstove. Vrijeme nastanka ovih nadopuna nije poznato.

Aryabhata

Aryabhata² (500. g. n.e.) je koristio broj nula za oznaku mjesta u decimalnom zapisu broja (brojeve je označavao slovima). Današnja oznaka za nulu dolazi od simbola kruga s istaknutim centrom što simbolizira prazninu (śūnyatā) u budističkoj filozofiji.

²Indijski matematičar i astronom (476–550). Njegovi matematički rukopisi pokrivaju područja: algebre, ravninske i sferne trigonometrije. Sumirao je redove potencija ($\sum_n n^2$ i $\sum_n n^3$) i izradio tablicu sinusa nekih kuteva. Ta tablica je stigla u Evropu preko arapskih i latinskih prevoditelja i stoljećima slovila kao najpreciznija tablica za efemeride u Evropi. Izračunao je opseg Zemlje u iznosu od 39968.06km što je za 106.9588 km manje od današnje vrijednosti. Njegovi astronomski radovi su izgubljeni, ali ih spominje Perzijski kroničar Indije tog doba i filozof Al-Bīrūnī. Formulirao je relativnost u gibanju: *Kao što čovjek u čamcu koji se giba vidi stacionarne objekte na obali kako se gibaju unatrag, tako se i fiksne zvijezde vide sa Zemlje kao da se gibaju prema zapadu.* Znao je vrijednost broja π na 5 značajnih znamenki 3.1416. Neki historičari intepretiraju da je implicitno znao da je π iracionalan što je kasnije dokazao Lambert (1761). Al-Khwarizmi spominje tu aproksimaciju u svojoj algebri. Zastupao je geocentrički planetarni sustav, iako je razmatrao i mogućnost heliocentričkog sustava. Izračunao je sideralnu godinu na 365 dana 6 sati i 12m i 30s što je greška od današnje vrijednosti za 3m 20s.

Brahmagupta

Postanak nule kao *neutralnog elementa* u odnosu na zbrajanje, a ne kao oznaku mjesta u brojevnom zapisu, pripisuje se indijskom matematičaru i astronomu Brahmagupti³ (628. g. n.e.).

³Indijski matematičar i astronom (598–668). Prvi je zapisao firmulu za rješenja kvadratne jednadžbe, a broj π je aproksimirao s $\sqrt{10}$. Izračunao je duljinu 1 godine kao 365 dana 6 sati 12 minuta i 9 sekundi. Nedavno su pronađeni rukopisi, 300 godina stariji od Brahmagupte, u kojima je oznaka za nulu.

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.
- Frege⁴ (19. st.).
 - Broj nije apstrahiran od stvari, nije svojstvo stvari u onom smislu u kojem su to boja, težina ili čvrstoća (tj. broj nije kvaliteta, op. autora). Još ostaje pitanje u čemu se nešto iskazuje kada se navodi broj.

⁴Njemački filozof, logičar i matematičar

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.
- Frege⁴ (19. st.).
 - Broj nije apstrahiran od stvari, nije svojstvo stvari u onom smislu u kojem su to boja, težina ili čvrstoća (tj. broj nije kvaliteta, op. autora). Još ostaje pitanje u čemu se nešto iskazuje kada se navodi broj.
 - Broj nije ništa fizikalno, ali ni išta subjektivno, nije nikakva predodžba.

⁴Njemački filozof, logičar i matematičar

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.
- Frege⁴ (19. st.).
 - Broj nije apstrahiran od stvari, nije svojstvo stvari u onom smislu u kojem su to boja, težina ili čvrstoća (tj. broj nije kvaliteta, op. autora). Još ostaje pitanje u čemu se nešto iskazuje kada se navodi broj.
 - Broj nije ništa fizikalno, ali ni išta subjektivno, nije nikakva predodžba.
 - Izrazi "mnoštvo", "skup", "gomila" zbog svoje neodređenosti nisu prikladni da posluže za objašnjenje broja.

⁴Njemački filozof, logičar i matematičar

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.
- Frege⁴ (19. st.).
 - Broj nije apstrahiran od stvari, nije svojstvo stvari u onom smislu u kojem su to boja, težina ili čvrstoća (tj. broj nije kvaliteta, op. autora). Još ostaje pitanje u čemu se nešto iskazuje kada se navodi broj.
 - Broj nije ništa fizikalno, ali ni išta subjektivno, nije nikakva predodžba.
 - Izrazi "mnoštvo", "skup", "gomila" zbog svoje neodređenosti nisu prikladni da posluže za objašnjenje broja.
 - U pogledu "jedan" i "jedinice" ostaje pitanje kako ograničiti proizvoljnost našeg shvaćanja za koje se čini da briše svaku razliku između jednog i drugog.

⁴Njemački filozof, logičar i matematičar

Jedinica vs. jedno

- Navya-Nyāya školi (Indija, 13. st.). Broj je kvaliteta koja se združeno pojavljuje — *Vyāsajya-vṛtti-dharma*. Kvaliteta nakupine.
- Frege⁴ (19. st.).
 - Broj nije apstrahiran od stvari, nije svojstvo stvari u onom smislu u kojem su to boja, težina ili čvrstoća (tj. broj nije kvaliteta, op. autora). Još ostaje pitanje u čemu se nešto iskazuje kada se navodi broj.
 - Broj nije ništa fizikalno, ali ni išta subjektivno, nije nikakva predodžba.
 - Izrazi "mnoštvo", "skup", "gomila" zbog svoje neodređenosti nisu prikladni da posluže za objašnjenje broja.
 - U pogledu "jedan" i "jedinice" ostaje pitanje kako ograničiti proizvoljnost našeg shvaćanja za koje se čini da briše svaku razliku između jednog i drugog.
 - Omeđenost, nepodijeljenost, nerazloživost nisu upotrebljiva obilježja onoga što izražavamo rječju "jedno".

⁴Njemački filozof, logičar i matematičar

Nedoumice. Simbolika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Euklidovo shvaćanje broja)}$$

- U raspravama u 19. st. znak '+' interpretira se kao 'i' čime se nudi interpretacija broja kao nakupina "jedinica".

Nedoumice. Simbolika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Euklidovo shvaćanje broja)}$$

- U raspravama u 19. st. znak '+' interpretira se kao 'i' čime se nudi interpretacija broja kao nakupina "jedinica".
- Oznaka '+' se često i krivo interpretirala kao algebarska operacija, koja zapravo nije ni definirana, jer nije definiran niti pojam broja.

Nedoumice. Simbolika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Euklidovo shvaćanje broja)}$$

- U raspravama u 19. st. znak '+' interpretira se kao 'i' čime se nudi interpretacija broja kao nakupina "jedinica".
- Oznaka '+' se često i krivo interpretirala kao algebarska operacija, koja zapravo nije ni definirana, jer nije definiran niti pojam broja.
- Štoviše, oznaka '1' nosi i značenje broja i predmeta iz grupe istovrsnih predmeta, za koje nije jasno je li ih treba razlikovati ili ne.

Nedoumice. Simbolika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (Euklidovo shvaćanje broja)}$$

- U raspravama u 19. st. znak '+' interpretira se kao 'i' čime se nudi interpretacija broja kao nakupina "jedinica".
- Oznaka '+' se često i krivo interpretirala kao algebarska operacija, koja zapravo nije ni definirana, jer nije definiran niti pojam broja.
- Štoviše, oznaka '1' nosi i značenje broja i predmeta iz grupe istovrsnih predmeta, za koje nije jasno je li ih treba razlikovati ili ne.
- Ono što također zbunjuje u gornjem simboličkom zapisu je znak '=' jer nije jasno kako bismo ga trebali interpretirati.

Simbolika vs. aritmetika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Drugim riječima, ako dopuštamo da broj nastaje spajanjem različitih predmeta, onda dobivamo gomilu u kojoj su predmeti s onim svojstvima po kojima se razlikuju, a to nije broj.

Simbolika vs. aritmetika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Drugim riječima, ako dopuštamo da broj nastaje spajanjem različitih predmeta, onda dobivamo gomilu u kojoj su predmeti s onim svojstvima po kojima se razlikuju, a to nije broj.

Ako pak broj želimo stvoriti spajanjem jednakih predmeta onda se to neprestano spaja u jedno te nikada ne dolazimo do množine. Ako s 1 označimo svaki predmet koji treba brojati tada ono što je različito dobiva isti znak.

Simbolika vs. aritmetika

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Drugim riječima, ako dopuštamo da broj nastaje spajanjem različitih predmeta, onda dobivamo gomilu u kojoj su predmeti s onim svojstvima po kojima se razlikuju, a to nije broj.

Ako pak broj želimo stvoriti spajanjem jednakih predmeta onda se to neprestano spaja u jedno te nikada ne dolazimo do množine. Ako s 1 označimo svaki predmet koji treba brojati tada ono što je različito dobiva isti znak.

Ako te 'jedinice' ipak razlikujemo i označavamo ih s $1 + 1' + 1''$ tada one postaju neupotrebljive za aritmetiku.

Suvremeni pojam broja. Frege

- Nositelji broja su *pojmovi* (*koncepti*, *predodžbe*), a ne objekti. *Koncept* ili *nepotpuni izraz*, argumentu pridjeljuje jednu od vrijednosti $\{T, F\}$; T – istina, F – laž. (Prst moje ruke.)

Suvremeni pojam broja. Frege

- Nositelji broja su *pojmovi* (*koncepti*, *predodžbe*), a ne objekti. *Koncept* ili *nepotpuni izraz*, argumentu pridjeljuje jednu od vrijednosti $\{T, F\}$; T – istina, F – laž. (Prst moje ruke.)
- " $(\cdot) > 1$ " označava koncept "*veći od 1*" koji pridjeljuje svakom broju većem od 1 vrijednost T , a svakom drugom vrijednost F .
"Ivan je tužan" govori da objekt označen kao Ivan 'spada u domenu koncepta' " $(\cdot)$ je tužan."

Suvremeni pojam broja. Frege

- Nositelji broja su *pojmovi* (*koncepti*, *predodžbe*), a ne objekti. *Koncept* ili *nepotpuni izraz*, argumentu pridjeljuje jednu od vrijednosti $\{T, F\}$; T – istina, F – laž. (Prst moje ruke.)
- " $(\cdot) > 1$ " označava koncept "*veći od 1*" koji pridjeljuje svakom broju većem od 1 vrijednost T , a svakom drugom vrijednost F .
"Ivan je tužan" govori da objekt označen kao Ivan 'spada u domenu koncepta' " $(\cdot)$ je tužan."
- Sve objekte iz domene nekog koncepta f kojima koncept pridružuje vrijednost T Frege naziva *proširenjem od f* u oznaci: ϵ_f .

Suvremeni pojam broja. Frege

- Nositelji broja su *pojmovi* (*koncepti*, *predodžbe*), a ne objekti. *Koncept* ili *nepotpuni izraz*, argumentu pridjeljuje jednu od vrijednosti $\{T, F\}$; T – istina, F – laž. (Prst moje ruke.)
- " $(\cdot) > 1$ " označava koncept "*veći od 1*" koji pridjeljuje svakom broju većem od 1 vrijednost T , a svakom drugom vrijednost F .
 "Ivan je tužan" govori da objekt označen kao Ivan 'spada u domenu koncepta' " $(\cdot)$ je tužan."
- Sve objekte iz domene nekog koncepta f kojima koncept pridružuje vrijednost T Frege naziva *proširenjem od f* u oznaci: ϵ_f .
- Jednakobrojčanost koncepata $\#f = \#g$, ako postoji 1-1 korespodencija između njihovih proširenja, a *sâm broj koji pripada konceptu f , u oznaci $\#f$, je proširenje koncepta "jednako ϵ_f "*.

Još o konceptu

Frege o konceptu

Ako objektima pridjelimo epitete 'teško' ili 'lako' onda je predmet koji nosi taj epitet neodređen jer 'teško' ne ističe taj predmet ako ga prije toga ne označimo ili imenujemo. Isto je i s izjavom: "Svi kitovi su sisavci." Na prvi pogled se čini da se radi o životinjama, ali to nije istina jer "kitovost" nema određenje svo dok se ne ukaže na konkretnu⁵ životinju. "Kit" je neodređeni pojam koji ne imenuje nikakvo pojedino biće. Sabirajuća snaga koncepta daleko nadmašuje ujedinjujuću snagu apercepcije⁶.

⁵U tom smislu je "kitovost" nepotpuni izraz je zahtijeva argument (op. autora). Usporedi s pojmom *izravna percepcija* na str. 47 eseja *Upoznaj samoga sebe*.

⁶ad- + latinski *perceptio* — (razjašnjavanje, bistrenje, poimanje, shvaćanje), općenito, razjašnjavanje osjetilnih sadržaja, njihovo uzdizanje do veće jasnoće i razgovijetnosti u svijesti; konačna, jasna faza percepcije u kojoj postoji prepoznavanje, identifikacija i razumijevanje njezina sadržaja. (Hrvatska enciklopedija)

Fregeova konstrukcija prirodnih brojeva

Ljudi obično zamišljaju broj *nula* kao naputak da: "*košara ne sadrži niti jednu jabuku*". Pitanje je kako to izraziti "logičkom rečenicom".

U Fregeovoj filozofiji matematike to je, grubo rečeno, koncept objekata koji nisu identični samom sebi, preciznije: *koncept nula* je proširenje koncepta jednakobrojčanog konceptu ne-identičan-sebi-samom u oznaci

$$\emptyset := C_0 = [\lambda x : x \neq x].$$

Nadalje,

$C_1 = [\lambda x : x = \#C_0]$ proširenje koncepta "jednako $\in \emptyset$ "

$C_2 = [\lambda x : x = \#C_0 \vee x = \#C_1]$ proširenje koncepta "jednako $\in C_1$ "
itd.

i uvodimo oznake za njima pridružene brojeve:

$$0 = \#C_0, 1 = \#C_1, 2 = \#C_2, 3 = \#C_3, \text{ itd.}$$

Śūnyata. Praznina

Madhyamaka Budizam (Nāgarjunā)

Odsustvo inherentnog postojanja. Svaka pojava proizlazi ovisno o drugim pojavama jer su uzročno povezane i stoga ne posjeduju nezavisnost i autonomiju.

Śūnyata. Praznina

Yogācāra budizam

Odsutnost dualnosti između percipiranog objekta i subjekta koji percipira. Nepostojanje dualnosti je ujedno i postojanje nepostojanja.

Śūnyatā nije niti postojanje niti nepostojanje, niti različito niti identično.

Śūnyata. Praznina

Theravāda budizam

Oblik percepcije (način gledanja na iskustvo) koja ništa ne dodaje niti oduzima sirovim podacima fizičkih i mentalnih pojava.

Ona je prazna od pretpostavki koje inače dodajemo iskustvu kako bi mu dali neki smisao.

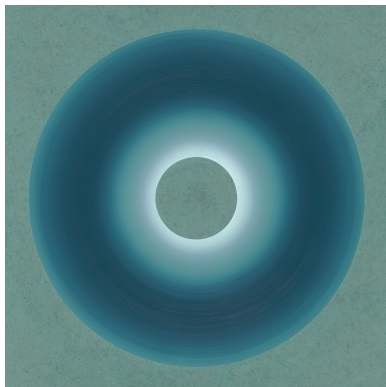
Śūnyata. Praznina

Zen



Śūnyata. Praznina

Moderna verzija



Śūnyata. Praznina

Frege

$$\{x \mid x \neq x\}$$

Śūnyata. Praznina

Frege

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$$

Rimljani su uveli skraćenice u obliku slova za određene brojeve:

$$M = \text{CCCCCCCCC},$$

tako da možemo jednostavnije pisati:

[illegible]

Razlog uvođenja numerala je više nego očit. Zapisivanje i obrazlaganje računa je nečitko i oduzima vrijeme pogotovo ako se to radi na kamenu ili glinenim pločicama.

Arapski brojevi

Arapski brojevi su oznake za brojeve koje su u Evropu donijeli Arapi, razvili su ih Indijci, a njihova upotreba se rasprostranila nakon što ih je Fibonacci⁷ 1202. g. koristio u svojoj knjizi o aritmetici *Liber Abaci*.

Evo oznaka za arapske brojeve:

• = 1 jedan

•• = 2 dva

••• = 3 tri

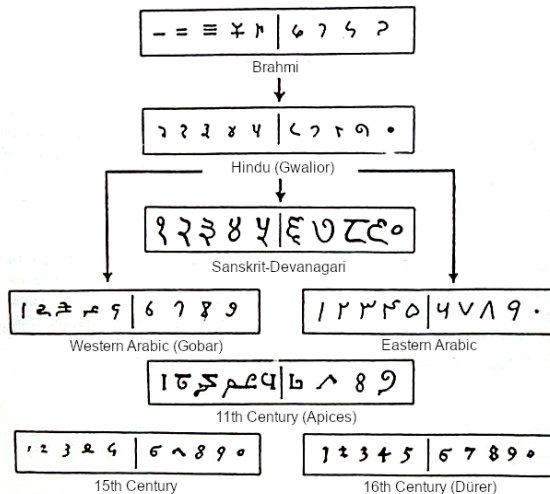
.....

•••••••••• = 9 devet

•••••••••••• = 10 deset ... itd.

⁷Leonardo Fibonacci (1170–1250 (oko)), talijanski matematičar rođen u Pisi. Prenio je u Evropu indijsko-arapski brojevni sustav.)

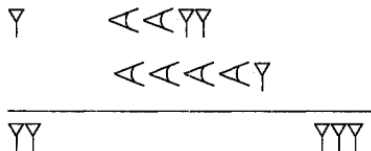
Razvoj znakova za brojeve. Brahmi 3 st. p.n.e.



Mezopotamija

Sumerani su, u kasnijoj fazi, koristili i pozicioni zapis broja na istovjetan način kao što mi činimo danas, s tom razikom što su razmakom označili granicu između dva mjesta. Tako na primjer, zbroj brojeva $82 + 41$ zapisuje se kao

Slika: Zapis i zbrajanje brojeva u Mezopotamiji.



U prvom redu stoji $80 = 60 + 22$, a u drugom 41. Razmak je imao dvojaku funkciju, kao separator u pozicionom zapisu broja i kao oznaka mjesta što je dodatno izazivalo pomutnju.

Decimalni zapis broja

$$\overset{TSDJ}{2053}.\overset{ds}{76}$$

$$\begin{aligned} 2053.76 &= 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$34 = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \quad 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 = 100010$$

decimalni zapis binarni zapis

Zbrajanje (u našim školama)

$$\begin{array}{r}
 17935 \\
 79 \\
 \hline
 631 \\
 \hline
 15 \\
 13 \\
 15 \\
 17 \\
 \hline
 18645
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 17935 \\
 79 \\
 \hline
 631 \\
 \hline
 17151315 \\
 \hline
 18645
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 17935 \\
 79 \\
 \hline
 631 \\
 \hline
 18645
 \end{array}$$

Oznaka: $5_23 = (5 + 2) \cdot 10 + 3 = 73$

Množenje (u našim školama)

$$\begin{array}{r}
 236 \times 47 \\
 \hline
 1692 \\
 9440 \\
 \hline
 11102
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 236 \times 47 \\
 \hline
 944 \cdot \\
 1652 \\
 \hline
 11092
 \end{array}$$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = ?$

$$\begin{array}{r} \overset{x}{(10)} \quad 15 \\ \quad \quad 13 \\ \hline \hline \end{array}$$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = ?$

$$\begin{array}{r} \overset{x}{(10)} \quad 15 \quad \quad 5 \text{ (a)} \\ \quad \quad 13 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = ?$

$$\begin{array}{r}
 \overset{x}{(10)} \quad 15 \qquad \qquad 5 \text{ (a)} \\
 \quad \quad 13 \qquad \qquad 3 \text{ (b)} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

 $x = 10$ (radna baza), $a = 5$, $b = 3$ $x + a = 15$, $x + b = 13$ $x + a + b = 18$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = ?$

$$\begin{array}{r}
 \overset{x}{(10)} \quad 15 \\
 \quad \quad 13 \\
 \hline
 18_0 \quad / \quad 15 \text{ (ab)}
 \end{array}$$

Diagram showing the Nikhilam sutra calculation for 15×13 . The base $x = 10$ is indicated. The numbers 15 and 13 are shown. The differences from the base are 5 (a) and 3 (b). The product is 180, and the sum of the differences is 15 (ab).

$$x = 10 \text{ (radna baza), } a = 5, b = 3$$

$$x + a = 15, x + b = 13$$

$$x + a + b = 18$$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = ?$

$$\begin{array}{r}
 \overset{x}{(10)} \quad 15 \\
 \quad \quad 13 \\
 \hline
 18_0 \quad / \quad 15 \text{ (ab)} \\
 \hline
 18_0 \quad /_1 \quad 5
 \end{array}$$

Diagram showing the Nikhilam sutra calculation for 15×13 . The base $x = 10$ is indicated. The numbers 15 and 13 are shown. The differences from the base are 5 (a) and 3 (b). The product is calculated as 18_0 (the product of the base and the sum of the differences) and 5 (the product of the differences).

 $x = 10$ (radna baza), $a = 5$, $b = 3$ $x + a = 15$, $x + b = 13$ $x + a + b = 18$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = 195$

$$\begin{array}{r}
 \overset{x}{(10)} \quad 15 \\
 13 \\
 \hline
 18_0 \quad / \quad 15 \text{ (ab)} \\
 \hline
 19_0 \quad / \quad 5
 \end{array}$$

$\swarrow + \quad 5 \text{ (a)}$
 $\searrow \quad 3 \text{ (b)}$

$x = 10$ (radna baza), $a = 5$, $b = 3$
 $x + a = 15$, $x + b = 13$
 $x + a + b = 18$

Nikhilam sutra

Produkt: $15 \times 13 = 195$

$$\begin{array}{r}
 \overset{x}{(10)} \quad 15 \quad \swarrow + \quad 5 \text{ (a)} \\
 \quad \quad 13 \quad \searrow \quad 3 \text{ (b)} \\
 \hline
 18_0 \quad / \quad 15 \text{ (ab)} \\
 \hline
 19_0 \quad / \quad 5
 \end{array}$$

$x = 10$ (radna baza), $a = 5$, $b = 3$

$x + a = 15$, $x + b = 13$

$x + a + b = 18$

Objašnjenje

$$\begin{array}{ccccccc}
 15 & & 13 & & 10 & & 18 & & 15 \\
 (x + a) & (x + b) & = & x & (x + a + b) & + & ab.
 \end{array}$$

Nikhilam (bis). $15 \times 13 = ?$

Nikhilam (bis). $15 \times 13 = 195$

(10)	15	5	
	13	3	
	18 ₀	/ 15	18 desetica plus 15 jedinica
	18 ₀	/ ₁ 5	18 desetica plus 1 desetica + 5 jedinica
	19 ₀	/ 5	19 desetica plus 5 jedinica

Nikhilam (bis). $15 \times 13 = 195$

(10)	15	5	
	13	3	
	18 ₀	/ 15	18 desetica plus 15 jedinica
	18 ₀	/ ₁ 5	18 desetica plus 1 desetica + 5 jedinica
	19 ₀	/ 5	19 desetica plus 5 jedinica

(10)	15	5
	13	3
	18	/ ₁ 5
	19	/ 5

Nikhilam (bis). $15 \times 13 = 195$

(10)	15	5	
	13	3	
	18 ₀	/ 15	18 desetica plus 15 jedinica
	18 ₀	/ ₁ 5	18 desetica plus 1 desetica + 5 jedinica
	19 ₀	/ 5	19 desetica plus 5 jedinica

(10)	15	5	
	13	3	
	18	/ ₁ 5	
	19	/ 5	

(10)	15	5	
	13	3	
	19	/ 5	(1 pamtim)

Oznaka: $3/24$ u bazi 10 iznosi $(30 + 20) + 4 = 54$.

Vježba. $93 \times 98 = ?$

$$\begin{array}{r}
 (100) \quad 93 \quad -7 \\
 \quad \quad 98 \quad -2 \\
 \hline
 \quad \quad 91 \quad / \quad 14 \\
 \hline
 \quad \quad 91_{00} / 14 \\
 \hline
 \end{array}$$

Vježba. $93 \times 98 = 9114$

$$\begin{array}{r}
 (100) \quad 93 \quad -7 \\
 \quad \quad 98 \quad -2 \\
 \hline
 \quad \quad 91 \quad / \quad 14 \\
 \hline
 \quad \quad 91_{00} \quad / \quad 14 \\
 \hline
 \quad \quad 9114
 \end{array}$$

Vježba. $47 \times 52 = ?$

Vježba. $47 \times 52 = ?$

Formula

$$(x - a)(x + b) = x(x - a + b) - ab$$

$$\begin{array}{r}
 (50) \quad \begin{array}{r} 47 \quad -3 \\ 52 \quad 2 \\ \hline 49 \quad / \quad \bar{6} \\ \hline 49_{50} \quad / \quad \bar{6} \quad (49 \text{ pedesetica}) \\ \hline 245_0 \quad / \quad \bar{6} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Oznaka: $\bar{6} := -6$ — negativan broj

Vježba. $47 \times 52 = 2444$

Formula

$$(x - a)(x + b) = x(x - a + b) - ab$$

$$\begin{array}{r}
 (50) \quad 47 \quad -3 \\
 \quad 52 \quad 2 \\
 \hline
 \quad 49 \quad / \quad \bar{6} \\
 \hline
 \quad 49_{50} \quad / \quad \bar{6} \quad (49 \text{ pedesetica}) \\
 \hline
 \quad 245_0 \quad / \quad \bar{6} \\
 \hline
 \quad 2444
 \end{array}$$

Oznaka: $\bar{6} := -6$ — negativan broj

Vježba. $47 \times 52 = 2444$

Formula

$$(x - a)(x + b) = x(x - a + b) - ab$$

$$\begin{array}{r}
 (50) \quad 47 \quad -3 \\
 52 \quad 2 \\
 \hline
 49 \quad / \quad \bar{6} \\
 \hline
 49_{50} \quad / \quad \bar{6} \quad (49 \text{ pedesetica}) \\
 \hline
 245_0 \quad / \quad \bar{6} \\
 \hline
 2444
 \end{array}$$

ili

$$\begin{array}{r}
 (50) \quad 47 \quad -3 \\
 52 \quad 2 \\
 \hline
 49 \quad / \quad \bar{6} \\
 \times \frac{1}{2} \quad / \quad \\
 \hline
 24.5_{00} \quad / \quad \bar{6} \\
 \hline
 2444
 \end{array}$$

Oznaka: $\bar{6} := -6$ — negativan broj

Vježba. $11112 \times 9998 = 111097776$

$$\begin{array}{r}
 (10000) \quad 11112 \quad \quad 1112 \\
 \quad \quad 9998 \quad \quad - 2 \\
 \hline
 \quad \quad 11110_{0000} / \overline{2224} \\
 \quad \quad 11109_{0000} / \overline{7776} \\
 \hline
 \quad \quad 111097776
 \end{array}$$

Računanje komplementa

Svaki od 9 zadnji od 10

Svaku znamenku oduzmi od 9, a zadnju (jedinicu) od 10.

Objašnjenje.

$$100 - ab = 10(9 - a) + 10 - b$$

$$1000 - abc = 100(9 - a) + 10(9 - b) + 10 - c$$

$$10000 - abcd = 1000(9 - a) + 100(9 - b) + 10(9 - c) + 10 - d$$

Primjer:

$$1000 - 685 = 315; \quad 1000 - 128 = 872$$

$$100 - 02 = 98; \quad 100 - 01 = 99; \quad 100 - 00 = 9/10 = 10$$

$$10000 - 150 = 10000 - 0150 = 9850$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = ?$.

$$\begin{array}{r}
 (40) \quad 41 \quad 1 \\
 41 \quad 1 \\
 \hline
 42 \quad / \quad 1 \\
 \times 4 \quad / \\
 \hline
 168_0 \quad / \quad 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

$$\begin{array}{r}
 (40) \quad 41 \quad 1 \\
 41 \quad 1 \\
 \hline
 42 \quad / \quad 1 \\
 \times 4 \quad / \\
 \hline
 168_0 \quad / \quad 1 \\
 \hline
 1681
 \end{array}$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

$$\begin{array}{r}
 (40) \quad 41 \quad 1 \\
 41 \quad 1 \\
 \hline
 42 \quad / \quad 1 \\
 \times 4 \quad / \\
 \hline
 168_0 \quad / \quad 1 \\
 \hline
 1681
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (10) \quad 15 \quad 5 \\
 15 \quad 5 \\
 \hline
 15+5 \quad / \quad 25 \\
 \hline
 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

$$\begin{array}{r}
 (40) \quad 41 \quad 1 \\
 \hline
 41 \quad 1 \\
 \hline
 42 \quad / \quad 1 \\
 \times 4 \quad / \\
 \hline
 168_0 \quad / \quad 1 \\
 \hline
 1681
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (10) \quad 15 \quad 5 \\
 \hline
 15 \quad 5 \\
 \hline
 15+5 \quad / \quad 25 \\
 \hline
 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (10) \quad 16 \quad 6 \\
 \hline
 16 \quad 6 \\
 \hline
 16+6 \quad / \quad 36 \\
 \hline
 22_0 \quad /_3 \quad 6 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

$$\begin{array}{r}
 (40) \quad 41 \quad 1 \\
 \hline
 41 \quad 1 \\
 \hline
 42 \quad / \quad 1 \\
 \times 4 \quad / \\
 \hline
 168_0 \quad / \quad 1 \\
 \hline
 1681
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (10) \quad 15 \quad 5 \\
 \hline
 15 \quad 5 \\
 \hline
 15+5 \quad / \quad 25 \\
 \hline
 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\
 \hline
 225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (10) \quad 16 \quad 6 \\
 \hline
 16 \quad 6 \\
 \hline
 16+6 \quad / \quad 36 \\
 \hline
 22_0 \quad /_3 \quad 6 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$

$$18^2 = \underbrace{260}_{(18+8) \cdot 10} + \underbrace{64}_{8 \cdot 8} = 324,$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

(40) $ \begin{array}{r} 41 \quad 1 \\ 41 \quad 1 \\ \hline 42 \quad / \quad 1 \\ \times 4 \quad / \\ \hline 168_0 \quad / \quad 1 \\ \hline 1681 \end{array} $	(10) $ \begin{array}{r} 15 \quad 5 \\ 15 \quad 5 \\ \hline 15+5 \quad / \quad 25 \\ \hline 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\ \hline 225 \end{array} $	(10) $ \begin{array}{r} 16 \quad 6 \\ 16 \quad 6 \\ \hline 16+6 \quad / \quad 36 \\ \hline 22_0 \quad /_3 \quad 6 \\ \hline 256 \end{array} $
---	---	---

$$18^2 = \underbrace{260}_{(18+8) \cdot 10} + \underbrace{64}_{8 \cdot 8} = 324, \quad 19^2 = 280 + 81 = 361$$

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

(40) $ \begin{array}{r} 41 \quad 1 \\ 41 \quad 1 \\ \hline 42 \quad / \quad 1 \\ \times 4 \quad / \\ \hline 168_0 \quad / \quad 1 \\ \hline 1681 \end{array} $	(10) $ \begin{array}{r} 15 \quad 5 \\ 15 \quad 5 \\ \hline 15+5 \quad / \quad 25 \\ \hline 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\ \hline 225 \end{array} $	(10) $ \begin{array}{r} 16 \quad 6 \\ 16 \quad 6 \\ \hline 16+6 \quad / \quad 36 \\ \hline 22_0 \quad /_3 \quad 6 \\ \hline 256 \end{array} $
---	---	---

$$18^2 = \underbrace{260}_{(18+8) \cdot 10} + \underbrace{64}_{8 \cdot 8} = 324, \quad 19^2 = 280 + 81 = 361$$

Pravilo: $(1a)^2 = 1a + a + a^2$.

Kvadriranje. Vježba. $41 \times 41 = 1681$.

(40) $\begin{array}{r} 41 \quad 1 \\ 41 \quad 1 \\ \hline 42 \quad / \quad 1 \\ \times 4 \quad / \\ \hline 168_0 \quad / \quad 1 \\ \hline 1681 \end{array}$	(10) $\begin{array}{r} 15 \quad 5 \\ 15 \quad 5 \\ \hline 15+5 \quad / \quad 25 \\ \hline 20_0 \quad /_2 \quad 5 \\ \hline 225 \end{array}$	(10) $\begin{array}{r} 16 \quad 6 \\ 16 \quad 6 \\ \hline 16+6 \quad / \quad 36 \\ \hline 22_0 \quad /_3 \quad 6 \\ \hline 256 \end{array}$
---	--	--

$$18^2 = \underbrace{260}_{(18+8) \cdot 10} + \underbrace{64}_{8 \cdot 8} = 324, \quad 19^2 = 280 + 81 = 361$$

Pravilo: $(1a)^2 = 1a + a + a^2$. Što ako radna baza nije 10?

Kvadriranje dvoznamenkastog broja

Razlika kvadrata

$$x^2 = (x - y)(x + y) + y^2 \quad (\times 2)$$

Primjer 1.

$$97^2 = (97 - 3)(\underbrace{97 + 3}_{100}) + 3^2 = 94_{00} / 9 = 9409$$

Primjer 2.

$$54^2 = 58_{50} / 16 = 29_{00} / 16 = 2916$$

Kvadriranje broja koji završava s 5

Razlika kvadrata

$$x^2 = (x - y)(x + y) + y^2 \quad (x2)$$

$$\begin{aligned} (a5)^2 &= (10a + 5)^2 = (10a + 5 + 5)(10a + 5 - 5) + 25 \\ &= 100a(a + 1) + 25 \quad (\text{zbog } (x2)) \end{aligned}$$

Primjer.

$$\begin{aligned} 75^2 &= 56_{00}/25 = 5625, \\ 125^2 &= \underbrace{12}_{15/6} \cdot \underbrace{13}_{15/6} / 25 = 15625. \end{aligned}$$

Množenje s 9

$$9a = 10(a - 1) + 10 - a \quad (\text{ako je } a \leq 10) \quad (9-1)$$

$$9a = 10(a - 10) + 100 - a \quad (\text{ako je } 10 < a \leq 100) \quad (9-2)$$

(9-1)	D	J
$9 \cdot 1 = 0$	9	
$9 \cdot 2 = 1$	8	
$9 \cdot 3 = 2$	7	
$9 \cdot 4 = 3$	6	
$9 \cdot 5 = 4$	5	
$9 \cdot 6 = 5$	4	
$9 \cdot 7 = 6$	3	
$9 \cdot 8 = 7$	2	
$9 \cdot 9 = 8$	1	
$9 \cdot 10 = 9$	0	

(9-2)	D	J
$9 \cdot 11 = 1$	89	99
$9 \cdot 12 = 2$	88	108
$9 \cdot 13 = 3$	87	117
$9 \cdot 14 = 4$	86	126
$9 \cdot 15 = 5$	85	135
$9 \cdot 16 = 6$	84	144
$9 \cdot 17 = 7$	83	153
$9 \cdot 18 = 8$	82	162
$9 \cdot 19 = 9$	81	171
$9 \cdot 20 = 10$	80	180

Množenje s 99

$$99a = 100(a - 1) + 100 - a \quad (\text{ako je } a \leq 10) \quad (99-1)$$

$$99a = 100(a - 10) + 1000 - a \quad (99-2)$$

(99-1) S	J
$99 \cdot 1 = 0$	99
$99 \cdot 2 = 1$	98
$99 \cdot 3 = 2$	97
$99 \cdot 4 = 3$	96
$99 \cdot 5 = 4$	95
$99 \cdot 6 = 5$	94
$99 \cdot 7 = 6$	93
$99 \cdot 8 = 7$	92
$99 \cdot 9 = 8$	91
$99 \cdot 10 = 9$	90

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\frac{24}{9} = \frac{20}{9} + \frac{4}{9}$$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned}\frac{24}{9} &= \frac{20}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned}\frac{24}{9} &= \frac{20}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{9+1}{9} + \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned}\frac{24}{9} &= \frac{20}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{9+1}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned}\frac{24}{9} &= \frac{20}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 \cdot \frac{9+1}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \\ &= 2 + \frac{6}{9} \left(\text{prva} + \frac{\text{zbroj}}{9} \right)\end{aligned}$$

Dijeljenje s 9

Primjer. $24 \div 9 = ?$

$$\begin{aligned}
 \frac{24}{9} &= \frac{20}{9} + \frac{4}{9} \\
 &= 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{4}{9} \\
 &= 2 \cdot \frac{9+1}{9} + \frac{4}{9} \\
 &= 2 + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \\
 &= 2 + \frac{6}{9} \left(\text{prva} + \frac{\text{zbroj}}{9} \right)
 \end{aligned}$$

Zaključak. $24 \div 9 = 2$ ostatak 6 ili $24 = 2 \cdot 9 + 6$.

Poopćenje. Rekurzija kod djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

Dvoznamenkasti broj xy zapisujemo kao $10x + y$ ($24 = 10 \cdot 2 + 4$)

Zaključak:

$$(10x + y) \div 9 = x \text{ i ostatak } (x + y) \text{ ako je } x + y < 9.$$

Ako ne, ponavljamo postupak $x \div y$.

Oznaka (x/y) x – rezultat dijeljenja, y – ostatak

$$z = x \cdot 9 + y \quad \text{prirodni brojevi i } y < 9$$

$$z \div 9 = x + \frac{y}{9} = x + y \div 9 =: x/y$$

Primjeri. xy dvoznamenkast.

Pravilo djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$23 \div 9 =$$

$$2/5 \quad (5 = 2 + 3)$$

↑

vodeću znamenku prepisem

Primjeri. xy dvoznamenkast.

Pravilo djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$23 \div 9 = 2 \text{ ostatak } 5$$

$$2/5 \quad (5 = 2 + 3)$$

↑

vodeću znamenku prepisem

Primjeri. xy dvoznamenkast.

Pravilo djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$23 \div 9 = 2 \text{ ostatak } 5$$

$$2/5 \quad (5 = 2 + 3)$$

↑

vodeću znamenku prepisem

$$74 \div 9$$

$$7/11$$

$$8/2$$

Primjeri. xy dvoznamenkast.

Pravilo djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$23 \div 9 = 2 \text{ ostatak } 5$$

$$2/5 \quad (5 = 2 + 3)$$

↑

vodeću znamenku prepisem

$$74 \div 9$$

$$\hline 7/11$$

$$8/2$$

$$99 \div 9$$

$$\hline 9/18$$

$$11/0$$

Primjeri. xy dvoznamenkast.

Pravilo djeljenja s 9.

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$23 \div 9 = 2 \text{ ostatak } 5$$

$$2/5 \quad (5 = 2 + 3)$$

↑

vodeću znamenku prepíšem

$$74 \div 9$$

$$\hline 7/11$$

$$\hline 8/2$$

$$99 \div 9$$

$$\hline 9/18$$

$$\hline 11/0$$

$$09/9$$

$$\hline 0/9$$

$$\hline 1/0$$

Primjer: $328 \div 9$ ($x = 32, y = 8$)

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$32/8 \quad 32 + 8 \div 9 \quad (32 > 9)$$

$$+3/5 \quad 3 + (3 + 2) \div 9 \quad (32 \div 9)$$

$$35/13 = 36/4 \quad (36 \text{ ostatak } 4)$$

Primjer: $328 \div 9$ ($x = 32, y = 8$)

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$\begin{array}{r} 32/8 \quad 32 + 8 \div 9 \quad (32 > 9) \\ +3/5 \quad 3 + (3 + 2) \div 9 \quad (32 \div 9) \\ \hline 35/13 = 36/4 \quad (36 \text{ ostatak } 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32/8 \quad (\text{bis}) \\ +3/5 \\ (3 + 2) \downarrow \downarrow (3 + 2 + 8) \\ \hline 35/13 = 36/4 \end{array}$$

Primjer: $328 \div 9$ ($x = 32, y = 8$)

$$\frac{xy}{9} = x + \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \quad y \text{ znamenka jedinica}$$

$$\begin{array}{r} 32/8 \quad 32 + 8 \div 9 \quad (32 > 9) \\ +3/5 \quad 3 + (3 + 2) \div 9 \quad (32 \div 9) \\ \hline 35/13 = 36/4 \quad (36 \text{ ostatak } 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32/8 \quad (\text{bis}) \\ +3/5 \\ (3 + 2) \downarrow \downarrow (3 + 2 + 8) \\ \hline 35/13 = 36/4 \end{array}$$

Primjer. $1852 \div 9 = ?$ $1 \ 8 \ 5/2 \quad 185 + 2 \div 9$
 (račun ostataka mod 9) $1 \ 8/5 \quad 18 + 5 \div 9$
 $2 \oplus 5 \oplus 8 \oplus 1 = 17$ $1/8 \quad 1 + 8 \div 9$
 $0/1 \quad 1 \div 9$

 $1 \ 914/17 = 205/7$

Ūrdhva – tiryagbhyām

Množenje. Vertikalno i unakrsno

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

x^2	x	1
	a	b
	c	d
ac	$ad + bc$	bd

Primjer: 14×12

10^2	10	1
	1	4
	1	2
1	6	8

10^2	10	1	
	4	8	
	4	7	
16	60	56	
2	2	5	6

48 (skraćeno)
47
166056
2256

Parāvartya – Yojayet. Dijeljenje

Zadatak: $x^3 + 2x^2 + 2x + 5 \div (x + 2) = x^2 + 2$ ostatak 1.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 2x^2 + 2x + 5) \div (x + 2) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 \\
 -x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 0x^2 + 2x + 5 \\
 -2x - 4 \\
 \hline
 1 \text{ ostatak}
 \end{array}$$

Zadatak: $1225 \div 12$ ($x = 10, y = 2$, pišem samo koeficijente)

$$\begin{array}{r}
 12 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \\
 -2 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \text{ ostatak}
 \end{array}$$