

# Sistematizacija kognitivne domene i samoprocjena

Lavoslav Čaklović

Revidirano 18. ožujka 2022.

<https://web.math.hr/~caklovic/eseji/>

## Sadržaj

<b>1 Taksonomska tablica. Struktura.</b>	<b>2</b>	<b>3 Vrednovanje učenikovih postignuća</b>	<b>11</b>
1.1 Pojmovi . . . . .	3	3.1 Intuitivan pristup . . . . .	11
1.2 Spoznaja, introspekcija, meta- kognicija. . . . .	4	3.2 Statistička analiza kognitivnih dimenzija. . . . .	12
<b>2 Praktična primjena</b>	<b>7</b>	3.2.1 Rezultati CA analize . . .	13
2.1 Primjer iz prakse . . . . .	8	3.2.2 Određivanje vrijednosti ćelija putem analize ko- respondencije. . . . .	16
2.1.1 Opis predmeta . . . . .	8	<b>4 Metoda potencijala</b>	<b>17</b>
2.1.2 Kategorizacija procesa. . .	9	<b>5 Komentari</b>	<b>19</b>
2.1.3 Provjera znanja i sposob- nosti. . . . .	9	<b>6 Opravdanost sistematizacije</b>	<b>20</b>
2.2 Neke poteškoće u kategorizaciji procesa. . . . .	10		

## Sažetak

U ovom eseju raspravlja se o sistematizaciji i klasifikaciji znanja u kontekstu obrazovanja. Najpoznatija sistematizacija je ona Bloomova o kojoj se dosta pisalo u obrazovnoj literaturi ali bez konkretnih i praktičnih savjeta kako i na koji način ona može pomoći u ocjenjivanju. Ta sistematizacija je svojevrsan dogovor obrazovnih stručnjaka i teoretičara čiji je primarni cilj bio olakšati razmjenu informacija o rezultatima učenja (ispitivanja) među univerzitetima i školama u SAD. Napori grupe ljudi na čelu s Benjaminom S. Bloomom objavljeni su 1956. god., a reviziju te *originalne taksonomije* napravili su Anderson and Krathwohl (2001) koja se u literaturi naziva *revidirana taksonomija*.

Za razliku od originalne Bloomove taksonomije koja je po svojoj strukturi jednodomenzionalna, revidirana taksonomija povezuje kognitivne procese, kao jednu dimenziju i razine znanja kao drugu dimenziju spoznaje. I jedna i druga dimenzija izražavaju stupanj spoznaje, tj. stupanj spoznaje se reflektira u načinu na koji kreiramo

svoje misli i u objektima koje ta misao obuhvaća (tablica 1). Na prvi pogled, predložena taksonomija je prirodna, prihvatljiva i zgodna zamisao ali bez nekih teorijskih osnova. Ona je prvenstveno praktična, ali nosi u sebi određene ideje koje nisu do kraja istražene.

Ovdje ćemo ići korak dalje i detaljnije analizirati nove mogućnosti koje ta tablica kao forma nosi u sebi. Ispitati ćemo koristnost tih ideja i u organizaciji nastave i njihovu primjenjivost u vrednovanju i samovrednovanju znanja studenata i učenika.

U navedenoj klasifikaciji znanja javljaju se pojmovi kao što su: *znanje, postignuća, kognitivni procesi, vještine*. . . koji su neprecizni i nerazumljivi van konteksta i nose u sebi neke skrivene pretpostavke i uvjerenja. Bez obzira na to, statistička analiza subjektivnih postignuća, o kojoj će biti riječi, zahtijeva samo hijerarhijsko uređene predodžbe za svaku dimenziju u tablici znanja. Analiza pokazuje da su nazivi nezgrapno odabrani jer studenti, kao sudionici testa samospoznaje, ne razumiju značenje riječi kojima se tablica služi. Koji su razlozi tog nerazumijevanja je tema za sebe, jedan od razloga može biti u lošem prijevodu engleskih termina.

Moja osobni interes za taksonomiju pokrenut je idejom koju je vrijedilo ispitati, a to je da je u namjeru 'mjerenja nečega' unešena dimenzionalnost i to već samom namjerom. O kontekstu 'mjerenja znanja' to bi značilo da popunjavanje dvodimenzionalne taksonomske tablice nekim ciljevima ili brojevima skriva u sebi neku jednodimenzionalnu skalu, a mi ne znamo kako bi ju imenovali.

U eseju se pokazuje da je tako i to na dva načina: (1) statističkom *analizom korespondencije* i (2) *metodom potencijala*.

*Analiza korespondencije* može se zamisliti kao uzajamna transformacija koordinata u prostorima određenim kategorijskim vrijednostima stupaca i redaka tablice. Ako je rezultat transformacije matrica bliska dijagonalnoj onda kategorijske vrijednosti korespondiraju.

*Metoda potencijala* je primarno prilagođena ulaznim podacima u formi grafa preferencija, a namjera joj je da iz parcijalnih usporedbi među nekim objektima odredi njihov prioritet. Ta se ideja može primijeniti i na tablične strukture u formi iterativnog procesa u kojem se isprepliću operatori *mjerenja* i *baždarenja*.

Rezultati obiju analiza na uzorcima "taksonomskog testa" samospoznaje provedenim na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu daju identične rezultate. Taksonomska tablica kao generator ocjene predstavlja pedagošku novost i zahtijeva daljnje istraživanje i provjeru u samom nastavnom procesu. Kad se usvoji, može olakšati ispitivanje i praćenje učenikovog napretka, a definitivno može zaustaviti eroziju petica našeg obrazovnog sustava i otkloniti stres kod ocjenjivanja učenicima, roditeljima i nastavnicima.

Ako je netko od čitatelja otvoren za suradnju, posjedujem razvijen softver za analizu koji se može mijenjati i nadograditi po potrebi.

## 1 Taksonomska tablica. Struktura.

*Mi još nismo razvili sustav obrazovanja koji nije sustav indoktrinacije.*

Doris Lessing, dobitnica Nobelove nagrada za literaturu (2007)

Taksonomska tablica je forma klasifikacije znanja i vještina pogodna za bolje razumijevanje složenosti nastavnog procesa i njegovog lakšeg dizajniranja. Postoje tri taksonomske tablice znanja i vještina u obrazovanju: (1) za kognitivnu domenu, (2) za psiho-motornu domenu i (3) za afektivnu domenu. Ovdje ćemo se pozabaviti samo tablicom kognitivne domene jer oko 80% obrazovnih ciljeva spada u tu domenu. Osim toga, autorovo profesionalno djelovanje je u okviru te domene.

## 1.1 Pojmovi

U tablici 1 je prikazana dvodimenzionalna struktura kognitivne domene. Jednu dimenziju čini *razine spoznaje*, ukratko *znanje* (eng. Knowledge), a drugu dimenziju čine *kognitivni*

Tablica 1: Taksonomska tablica kognitivne domene (Anderson and Krathwohl, 2001)

Znanje (Knowledge)	Kognitivni procesi					
	1. Pamti Remembers	2. Razumije Understands	3. Primjenjuje Applies	4. Analizira Analyzes	5. Vrednuje Evaluates	6. Kreira Creates
A. Činjenice (Factual)						
B. Koncepti (Conceptual)		C1,C2			C4	
C. Procedure (Procedural)		C5	C1,C2		C1	
D. Introspekcija (Metacognitive)			C6	C3		

*procesu*. Procesu u tablici su hijerarhijski<sup>1</sup> uređeni u smislu da se razlikuju po složenosti, npr. *Pamti* je manje složen proces od procesa *Razumije* koji je manje složen od *Primjenjuje* itd. Kategorije znanja, ima ih 4, navedene su kao nazivi redaka tablice. Nazivi tih kategorija na hrvatskom jeziku imaju formu imenice, npr. *Koncepti* umjesto *Konceptualno znanje*, kako to stoji u engleskom originalu, iz jednostavnog razloga što termin *Konceptualno znanje* opisuje nešto fluidno i nedovoljno jasno. To je vrlo općenit pojam kojeg je, kao takvog, bolje izbjeći, tim više što mi je namjera približiti tu tablicu i njene potencijale svim sudionicima obrazovanja koliko je to moguće više, pa i samim učenicima i studentima.

Namjera kreatora tablice je bila, pretpostavljam, da te kategorije budu hijerarhijski uređene kao je što je slučaj s procesima. To bi značilo da *Koncepti* pretpostavljaju poznavanje *Činjenica* i da *Procedure* pretpostavljaju razumijevanje *Konceptata*. Raspravu o tome koliko mu je u tome uspjelo ostavljam za neku drugu priliku. Za introspekciju je smiono tvrditi

<sup>1</sup>Nazivi kategorija u tablici 1 nose i originalne engleske nazive iz razloga što se prevodenjem na hrvatski lako izgubi prvotni hijerarhijski uređaj. Napomenimo da navedene kategorije kognitivnih procesa nisu isključive jer *razumije* zadire u *primjenjuje* što se vidi iz tablice 3 u kojoj je kognitivni podproces 2.7 *Obrazlaže* kompleksniji od kognitivnog podprocesa 3.1 *Izvršava*. Iz tog razloga je teško govoriti o kognitivnim procesima u smislu *kategorije* ili *klase* koje isključuju jedna drugu.

Tablica 2: Razine znanja u revidiranoj Bloomovoj taksonomiji.

- A. Činjenice** – Poznavanje činjenica i/ili osnovnih elemenata (terminologija, pojmovi). Osnove za upoznavanje s obrazovnom temom (disciplinom) i rješavanje problema.
- B. Koncepti** – Razumijevanje funkcionalnog odnosa osnovnih elemenata unutar veće strukture (hipoteze, teorije, modeli, strukture).
- C. Procedure** – Kako učiniti nešto. Utvrđivanje pretpostavki za korištenje specifične procedure (algoritma, tehnike, metode).
- D. Introspekcija<sup>a</sup>** – Samopromatranje, svijest o vlastitim misaonim procesima i vlastitoj spoznaji. Strateško znanje.

<sup>a</sup>U originalnoj verziji stoji termin 'metakognicija' koji se često objašnjava kao 'mišljenje o mišljenju'. Objekt mišljenja nije mišljenje već sadržaj naše dostupne memorije koji se puni ovisno o našem interesu. Ono što nismo unijeli u memoriju, a možda smo trebali, nećemo spoznati mišljenjem već introspekcijom i uvećavanjem sposobnosti opažanja. To se postiže meditativnom praksom, a ne mišljenjem. U tom smislu 'mišljenje o mišljenju', kako je to netko unio u hrvatsku terminologiju, je ne samo nedorečen nego i besmislen termin. Introspekcijom se mijenjaju navike i to je dugotrajan proces.

Introspekcija u kontekstu savladavanja konkretnog nastavnog sadržaja je opažanje vlastitih postupaka i doseg poznatih metoda, a to nadopunjava dosadašnje spoznaje i sugerira nove mogućnosti. Pojam 'metakognicija' je relativno kasno ušao u taksonomiju (Flavell, 1979).

da je to forma znanja, ali je ona neizostavna na putu ka znanju i spoznaji. To je proces koji se razlikuje od procesa navedenih u prvom retku tablice, ako ni u čemu drugome onda u zastupljenosti svjesnosti u tom procesu.

Kategorije A-C opisuju stupanj i oblik dostupnosti sadržaja memorije, a D je dinamički proces subjektivnog doživljaja sadržaja spoznaje. Procedure P1–P6 čine tehniku ovladavanja gradiva koja se može uvježbati na dobro odabranim primjerima. Zadatak nastavnika i obrazovnog sustava u cjelini je da ponudi te primjere.

Tablice 2 i 3 ovdje navodim onako kako ih vidi naša obrazovna literatura uz neke izmjene koje ću pokušati opravdati. U obrazovnoj literaturi te se tablice navode bez dublje argumentacije i rasprave i ja ih shvaćam kao mentalnu strukturu za lakše prihvaćanje nečeg pametnijeg što će doći, a to "pametno" nikako da dođe.

## 1.2 Spoznaja, introspekcija, metakognicija.

Spoznaji i shvaćanju prethode mentalni procesi kao što je učenje, rješavanje problema, odlučivanje, pristup memoriji i zahtijeva pažnju — jednom riječju, zahtijeva procesiranje informacija.

Literalno značenje introspekcije je uvid. To je sposobnost svjesnog pristupanja mentalnim

Tablica 3: Struktura kognitivnih procesa i glagoli koji pobliže opisuju pojedine procese, a koriste se u formulaciji ciljeva.

<p><b>1. Pamti</b> – Prepoznaje<sup>a</sup> ili dovlači znanje iz dugotrajne memorije.</p> <p>1.1 Prepoznaje</p> <p>1.2 Prisjeća</p>	<p><b>3. Primjenjuje</b> – Pronalazi ili koristi postupak za postizanje cilja.</p> <p>3.1 Izvršava</p> <p>3.2 Implementira</p>
<p><b>2. Razumije</b> – Formira značenje iz izrečene, napisane ili grafički oblikovane poruke.</p> <p>2.1 Interpretira</p> <p>2.2 Tumači</p> <p>2.3 Klasificira</p> <p>2.4 Rezimira</p> <p>2.5 Zaključuje</p> <p>2.6 Uspoređuje</p> <p>2.7 Obrazlaže</p>	<p><b>4. Analizira</b> – Razgrađuje sadržaj na sastavne dijelove, otkriva njihov međusobni odnos i odnos prema ukupnoj strukturi ili namjeni.</p> <p>4.1 Razlikuje</p> <p>4.2 Organizira</p> <p>4.3 Pripisuje</p> <p><b>5. Vrednuje</b> – Prosuđuje na temelju kriterija i uvaženih normi.</p> <p>5.1 Procjenjuje</p> <p>5.2 Kritizira</p> <p><b>6. Kreira</b> – Povezuje dijelove u skladnu cjelinu ili proizvod (formu).</p> <p>6.1 Razvija</p> <p>6.2 Planira</p> <p>6.3 Sintetizira</p>

<sup>a</sup>Navedeni glagoli u ovoj tablici su minimalni u smislu njihovog broja. Razni autori koriste i druge glagole i njihove sinonime. Naišao sam i na slučajeve kad su neki od ovdje navedenih glagola svrstani u drugu kategoriju. Bez obzira kakve glagole koristili, ti procesi trebaju biti provjerljivi.

procesima i iskustvu. Introspekcijom provjeravamo razumijemo li neku tvrdnju, emociju i jesmo li blizu nekom rješenju ili ne. Sve do kraja 19. st. introspekcija se smatrala glavnom metodom u proćavanju ljudskog uma kao oblik direktnog promatranja mentalnih<sup>2</sup> "ćinjenica" (Wundt (1901), James (1890), Tichener (1901)). Introspekcija je napuštena kao metoda istraćivanja subjektivnih iskustava iz glavnog razloga što tada nije bilo objektivnih mjernih instrumenata kao što je EEG i MEG.

Metakognicija je sposobnost reguliranja vlastitih mentalnih procesa. Aktivnosti oko pripreme za ispit, praćenje vlastitog napretka i vrednovanje trenutnog znanja u odnosu na

<sup>2</sup>Auguste Comte u *Lecture on Positive Philosophy* (1842), Vol. 1, str. 31-32 prigovara kako to da isti organ moće promatrati samog sebe. John Stuart Mill u *Auguste Comte and Positivism* (1865), str. 68-69 mu odgovara da je to moguće putem memorije u kojoj su utisci još svježi. Za modernu neuroznanost to je sasvim prihvatljivo jer pojedini dijelovi mozga "promatraju" druge dijelove, npr. ćeoni rećanj sposoban je sakupiti informacije iz svih djelova mozga. Bez obzira na takvu strukturu mozga, ćini se da je introspekcija korisna ako koristi podatke iz kratkotrajne memorije.

željeno postignuće su u osnovi metakognitivni procesi. Kognitivne strategije pomažu u ostvarivanju ciljeva, a metakognitivne u procjeni postignutog stanja u odnosu na zadani cilj.

Biggs (1987) koristi termin *metaučenje*<sup>3</sup> za studentovu svjesnost i kontrolu nad vlastitim procesima učenja. Drugi termini koji se u literaturi koriste su *self-managment* (spoznaje), *deuterolearning*<sup>4</sup> (sekundarno učenje), *mindfulness* (svjesna pažnja). Mnoštvo definicija, termina i analiza o tome što je metakognicija uzrok je zbunjenosti u literaturi (Jaušovec, 2011).

Student je uglavnom svjestan sadržaja kojeg treba savladati i što se od njega očekuje, ali nije uvijek svjestan fenomena učenja kao takvog što uključuje i svjesnost motiva i namjera ("Što želim time postići?") i svjesnost svojih ograničenja ("Ovo zahtijeva neko predznanje, moram to malo bolje istražiti.") i svjesnost dubine svoje spoznaje ("Ne razumijem to baš dobro. Bilo bi korisno još jednom sve ponovno proći."). Ljudi često zaboravljaju imena onih koje su upravo upoznali i kojima su se predstavili. Mnogi su toga svjesni ali se nisu pitali kako poboljšati taj svoj 'nedostatak'. Jedan od načina je, koristiti asocijativnu tehniku prepoznavanja imena u skupu imena ljudi koje već poznajete ("Aha, poznajem jednog Tomicu. Pohađali smo tečaj gitare na Firulama."). Takvo uvježbavanje je uvod u samoregulaciju.

Studenti pokazuju nedostatak svojih metasposobnosti kad odabiru strategije djelovanja koje nisu u skladu s njihovim motivima i interesima ili kad zabrazde u neku metodu učenja koja evidentno ne donosi uspjeh (ne uče na greškama).

Zapravo nema učenika koji se nije zapitao "Zašto je to tako?" i čemu služi to što uči. "Zašto?" je početak metakognitivnih procesa. Pitanje "Zašto?" je dokaz da učenik želi proširiti granice svog interesa, ali mu je potrebno uvjerenje i argumenti da je u stanju zakoračiti u nekom smjeru. Ako je nastavnik učenikovo "Zašto?" interpretirao kao svoju vlastitu nesposobnost pružanja smisla toga što predaje onda ni sam nije siguran u svoje znanje. "Zašto?" nema granica i ono je vječno i suštinsko pitanje koje treba njegovati.

*Metakognitivno znanje* uključuje spoznaju o vlastitim (ljudskim) potencijalima i ograničenjima u spoznavanju, specifičnošću zadatka kojeg obavlja i kontekstualnog okruženja tog zadatka (ciljevi, mogućnost i tehnike postizanja tih ciljeva). *Metakognitivno iskustvo* je osnova metakognitivnog znanja i ono može biti kognitivno i/ili emocionalno. Ovako opisana metakognicija je nešto detaljnija od one najčešće koja se odnosi na regulaciju vlastitog kognitivnog procesa kod obavljanja specifičnog zadatka.

Neki autori primjećuju da metakognitivne teorije zanemaruju razliku između strategija za obavljanje specifičnog zadatka i znanja o tome je li specifična strategija pogodna za rješavanje nekog problema. Ovaj drugi aspekt metakognicije odnosi se na meta razinu praćenja i naziva se *epistemička*<sup>5</sup> *spoznaja*. Takva spoznaja je izrazito važna komponenta kreativnog rješavanja problema u kojem nema jednoznačnog korektnog rješenja. Kreativni

---

<sup>3</sup>eng. *metalearning*

<sup>4</sup>δεύτερος (deúteros), gr. drugi, sekundarni (od dva).

<sup>5</sup>*epistēmē* (ἐπιστήμη), gr. znati, razumjeti.

problemi dozvoljavaju tri razine kognitivne obrade. (1) Na prvoj razini pojedinac uočava i shvaća problem. (2) Na drugoj razini uključuju se metakognitivni proces za praćenje prve razine spoznaje. To uključuje, osim razumijevanja problema, i moguće strategije rješavanja istog. (3) Treća razina je upravo *epistemička spoznaja*, tj. znanje o tome kada i kako određena strategija treba biti primijenjena.

Sve tri razine učenik može doživjeti putem individualnog rada ili u grupnim radionicama. Evo jednog primjera kako to radi njemačka industrija koja se susreće s tehničkim i organizacionim problemima u svojoj djelatnosti. Neki od tih problema, prezentiraju se nadarenim učenicima srednjih škola koji ih rješavaju svojim ograničenim i neopterećenim znanjem u ograničenom vremenskom periodu od 5 dana. Voditelj grupe nadgleda njihov napredak bez ulaženja u resprave o metodama i njihovoj upotrebljivosti. Na kraju perioda učenici prezentiraju svoje rezultate. Vrijedne i inovativne ideje stručnjaci razrađuju kasnije u svojim laboratorijima.

## 2 Praktična primjena

*Često se govori i piše da je učenje cilj obrazovanja. To nije istina. Stvaran cilj je postati — postati dobrom osobom i postati sposobnijim nego smo bili. Učenje je samo način za postizanje cilja i opasno je brkati sredstvo i cilj.*

Marc Prensky (pisac i edukator)

Pojašnjenje znanja u klasifikaciji dano je u tablici 2, a procesa u tablici 3. Taksonomska tablica 1 je već popunjena ciljevima konkretnog predmeta podučavanja, a to je predmet *Teorija igara* koji se podučava na 2. godini diplomskog studija na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Ovo iznosim kao primjer i čitatelj koji je upoznat dobro s temom o kojoj se raspravljam slobodno može zanemariti ovaj odjeljak.

Moja prva reakcija na taksonomsku tablicu je bila da u klasifikaciji znanja, ako je to uopće moguće učiniti, postoji jedna istaknuta dimenzija samo što tu dimenziju ne znamo imenovati i interpretirati u nama poznatim jezičnim terminima. Uvakav dvodimenzionalni prikaz znanja je način na koji s pozicije kompleksnosti i slojevitosti možemo potpunije izraziti naše poimanje znanja i razine spoznaje u kontekstu obrazovanja.

Navedena tablica odnosi se na kognitivnu domenu. U principu bi svaki nastavni predmet trebao imati svoju vlastitu tablicu koja u suštini ne mora biti klasifikacija znanja nego je prilagođena onom izražaju kojeg predmet podučava. To se posebno odnosi na tjelesnu i zdravstvenu kulturu, književni i umjetnički izražaj itd.

Ako detaljnije proučite literaturu u kojoj se spominje taksonomska tablica onda većina rasprava tu završava. Takva tablica nema nikakvu epistemološku vrijednost i zapravo je stvar dogovora određene grupacije ljudi da pojednostave organizaciju nastave i razmjenu informacija kod prelaska učenika iz jedne škole u drugu. Korisna je onoj grupi ljudi koji

žive i rade u istom ili sličnom obrazovnom okruženju.

Ovdje ćemo učiniti korak dalje i dati analizu tablice koja bi mogla poslužiti praćenju učeničkog napretka tokom godine na način da to bude bez stresa i za učenika i za nastavnika i da bude onemogućeno uplitanje roditelja u ocjenjivanje njihovih mezimaca.

Taksonomska tablica pomaže nastavnicima da preciziraju ciljeve nastavnih jedinica (predmeta), kako bi studentima bilo jasno što se od njih očekuje po završetku nastave. Nastavniku je nakon toga lakše odrediti pitanja koja ispituju studentov stupanj ovladavanja gradivom (znanje) i studentove sposobnosti korištenja tog znanja (primjena). Evo primjera.

## 2.1 Primjer iz prakse

### 2.1.1 Opis predmeta

Predmet *Teorija igara* predaje se na završnoj godini diplomskog studija matematike smjer *Računarstvo i matematika* i *Financijska i poslovna matematika* (40–50 studenata) i njegova svrha je upoznati studente s principima odlučivanja i modeliranja specifičnih situacija u ekonomiji i društvenim znanostima kao strateške ili ekstenzivne igre. Potrebna predznanja su linearna algebra i vektorski prostori, osnove konveksne analize i optimizacija. Korisno je, ali ne nužno, poznavati terminologiju i osnove mikroekonomije. Predavanja i vježbe (2+1) se održavaju u predavaonici s projektorom. Problemi za domaću zadaću (dodatni) nisu obavezni, ali se formuliraju na predavanju. Student koji riješi problem dobiva mogućnost prezentirati ga. Konzultacije su nadopuna predavanju u trajanju od 2 sata tjedno.

**Usvojeni procesi.** Po završetku predmeta student će biti u stanju:

- C1. Objasniti ulogu svakog pojedinog aksioma teorije korisnosti u konstrukciji funkcije korisnosti i primijeniti tu funkciju u analizi tablice odlučivanja.
- C2. Razumjeti princip dominacije u nalaženju Nashove ravnoteže.
- C3. Primijeniti teorem o separaciji na grafičku analizu matičnih igara.
- C4. Razumjeti razlike i sličnosti raznih ravnoteža (Nashova, korelirana) vezano uz socijalnu korisnost.
- C5. Argumentirati smisao najboljeg odgovora i primijeniti ga u proceduri iscrpnog pretraživanja Nashove ravnoteže.
- C6. Analizirati pretpostavke Kakutanijevog (ili Ky Fanovog, ili Browderovog) teorema za razne oblike funkcije korisnosti i dokazati egzistenciju Nashove ravnoteže pomoću tog teorema.

**Činjenična znanja.** Spomenuti procesi zahtijevaju neka činjenična znanja u formi *definicija, teorema i primjera*. To su:

1. Primjeri nekih opće poznatih i karakterističnih (bimatričnih i matičnih) igara, zajedno sa skupovima najboljih odaziva i ravnotežama.
2. Pojam lutrije, aksiomi teorije korisnosti i tablica odlučivanja. Uloga afine transformacije korisnosti na Nashovu ravnotežu.



3. Karakterizacija nosača strategije iz skupa najboljeg odgovora (princip indiferentnosti).
4. Teorem separacije dva konveksna skupa i egzistencija Nashove ravnoteže matrice igre.
5. Banachov, Kakutanijev i Ky Fanov teorem (bez dokaza) te primjena na egzistenciju Nashove ravnoteže (studentski projekti).
6. Mediatori (ugovori) i korelirana ravnoteža.
7. Ekstenzivna igra, indukcija unazad (Zermelov teorem), strategijska forma ekstenzivne igre.

### 2.1.2 Kategorizacija procesa.

Cilj C1 zahtijeva od studenta razumijevanje aksioma i njihovu važnost (koncept) u konstrukciji funkcije korisnosti (procedura) i vrednuje alternative iz tablice odlučivanja. Odgovarajuća polja u taksonomskoj tablici su B2, C3 i C5.

Cilj C2 zahtijeva razumijevanje fundamentalnog principa racionalnosti (činjenica, polje B2) i računanje Nashove ravnoteže (procedura, polje C3).

Cilj C3 zahtijeva kompleksno razumijevanje separacije i njene uloge u matematici i raspravu o broju Nashovih ravnoteža u konkretnoj situaciji (polje D4).

Cilj C4 zahtijeva uspoređivanje dva različita koncepta (polje B5).

Cilj C5 stavljam u polje C2 u taksonomskoj tablici.

Cilj C6 traži od studenta da iz oblika funkcije korisnosti prepozna pretpostavke teorema i nađe općenitije igre na koje se Kakutanijev teorem može primijeniti. Kakutanijev teorem mogli bi svrstati u strateško znanje, a teorija igara je samo jedan dio njegove primjene (polje D3). U taksonomskoj tablici 1 ciljevi kolegija raspoređeni su u odgovarajuća polja. Iz dobivenog rasporeda može se zaključiti da se radi o zahtjevnom kolegiju koji traži duboko predznanje i visoke kognitivne sposobnosti.

I ciljevi i stupnjevi znanja su u ovom primjeru, ilustracije radi, nešto reducirani kako bi se zadržala jasnoća izlaganja. Osim toga svake godine se sadržaj kolegija mijenja (oko 20 %).

### 2.1.3 Provjera znanja i sposobnosti.

Provjera znanja i sposobnosti ima za cilj sakupiti dovoljno sadržaja, ako se to tako može nazvati, na temelju kojeg će se donijeti ocjena. Provjera znanja koristi sljedeće metode: kolokvije (2+popravni), završni ispit (pismeni+usmeni), projektni zadatak (neobavezan), rješavanje problema (neobavezno), individualni rad (neobavezno). Kolokviji i završni pismeni ispit rezultiraju bodovima i na njima se provjerava usvojenost kognitivnih procesa putem zadataka. Projektni zadaci i riješeni problemi uvažavaju se na završnom usmenom ispitu, a prethodno se tijekom prezentacije projekta bilježi stupanj usvojenosti procesa. Broj bodova svakog zadatka određuje se na osnovi uspoređivanja zadataka prema: kompleksnosti računa, njegovoj složenosti i prema činjeničnom znanju potrebnom za rješavanje

zadatka. Takav postupak provodim već godinama, još od vremena dok nisam znao za taksonomsku tablicu i Bloomovu terminologiju.

Postignuće ciljeva provjerava se pismenim putem rješavanjem konkretnih zadataka. Zадaci su koncipirani tako da svi ciljevi budu provjereni, neki i na više načina (u više zadataka). Što se formiranja težine zadataka na pismenom ispitu tiče, ona je funkcija: (1) kompleksnosti računa, (2) složenosti misaonog procesa i (3) količine činjeničnih sadržaja. U istu svrhu može se iskoristiti i taksonomska tablica, s tom razlikom što je taksonomska tablica kompliciranija za razumjeti i nemam s njom dovoljno iskustva da bih mogao tvrditi da je korisnija za tu svrhu.

Činjenična znanja se provjeravaju na usmenom ispitu pred pločom. Kako ću kao profesor znati je li student usvojio neku definiciju ili pojam? Student piše definiciju na ploču i ako je definicija korektna, pitam ga zašto je baš tako definiran pojam i je li postoji alternativna (ekvivalentna) definicija i kako možemo provjeriti je li neki konstrukt zadovoljava svojstvo koje se definira ili ne. Ako definicija nije korektna, provjeravam je li student ipak razumije definiciju u konkretnoj situaciji, možda se ne umije korektno izraziti jer nije ovladao matematičkom terminologijom<sup>6</sup>. Ako razumije definiciju u nekoliko konkretnih situacija onda od njega zahtijevam da ponovo pogleda svoj tekst na ploči i tražim da ga korigira. Ako je definicija na ploči nekorektna, a student ne navodi niti primjere koji bi pokazali njegovo razumijevanje tog pojma pitam ga je li znade neki teorem u kojem se pojam pojavljuje, bilo u premisi ili tvrdnji. U tom trenutku student najčešće izjavljuje da ne zna i da nije dovoljno učio.

Ako je student ispitivan na takav način rijetko kad će okrivljavati drugog za svoje neznanje. Ako je pak student izuzetno dobar onda mu treba pružiti priliku da to svoje znanje i pokaže. Mnogi profesori olako dijele petice, a to ima za posljedicu da studenti gube (ili ne stiču) vlastite kriterije što se kvalitete znanja tiče, a oni dobri nemaju priliku pokazati to znanje i osjetiti zadovoljstvo znanja.

## 2.2 Neke poteškoće u kategorizaciji procesa.

Graduacija znanja u taksonomskoj tablicu na činjenično, konceptualno, proceduralno i metakognitivno je, što se studija matematike tiče, kontekstualno ovisno jer pojedina znanja za studente nižih godina mogu biti proceduralna, a postaju činjenična na višim godinama jer čine osnovu struke<sup>7</sup>. Iz tog razloga nije sasvim jasno kako kategorizirati određeni cilj kolegija: u činjenično ili proceduralno znanje. Sa stanovišta struke uvrstili bi ga u proceduralno, a sa stanovišta predmeta u činjenično znanje. Čini se da takva taksonomija ima ograničenu primjenu u nastavi, i orijentirana je prvenstveno na osnovnu i srednju školu gdje se formira način mišljenja učenika i gdje se ne ulazi dublje u specijalizirana

---

<sup>6</sup>Bila je situacija kad je student izmislio vlastite oznake i terminologiju. Zamolio sam ga da na ploči ispiše odgovore na postavljena pitanja. Zatim smo čitali riječ po riječ kako bih ja shvatio što on želi reći. Nakon pola sata smo našli grešku u njegovom zaključivanju i on je nevoljko pristao da dođe na usmeni dio ispita kad korektno savlada terminologiju kojom se sporazumijevaju svi matematičari svijeta.

<sup>7</sup>Što se ocjenjivanja tiče, nepoznavanje činjeničnih znanja iz kolegija prethodnika smatra se nedovoljnim za prolaz ali se tolerira (kompenzira) na usmenom ispitu ako se konstatira da se radi o previdu ili omašci.

područja i koncepte. Dakle,

kategorizacija ciljeva je kontekstualno (predmetno) ovisna.

Druga primjedba, koja mi se čini glavnim uzrokom gore spomenute poteškoće, je način na koji je provedena kategorizacija dviju varijabli: *znanje* i *proces*. *Znanje* kao koncept je danas analiziran i raspravljan u filozofiji, znanosti, obrazovanju i ima fundamentalno epistemološko određenje. *Proces* je pojam prisutan već duže vrijeme u matematici, u novije vrijeme u računarstvu i srodnim znanostima, ali kao 'misaoni proces' nije jasno što bi to trebalo biti. Osim toga,

spomenuta klasifikacija misaonih procesa je lingvistički kontekstualna, definirana 'dopustivim' glagolskim konstrukcijama, 'kategorije' nisu čak niti isključive, a njihova uređenost (u smislu međusobnog odnosa) se lako gubi prevođenjem na drugi jezik.

Treća primjedba odnosi se na primjenjivost takve taksonomije na specifična područja. Na primjer, kad kažem da "*student 5. godine studija matematike razumije dokaz teorema*", to znači da: (1) zna korektno iskazati teorem bez pomoći, (2) razumije pretpostavke i logičku strukturu dokaza, (3) analizira ulogu i važnost svake pretpostavke, (4) razmatra mogućnost poopćenja i (5) vrednuje primjenjivost teorema u raznim situacijama. Drugim riječima,

termin 'razumije' u ovom kontekstu uključuje i više kognitivne procedure taksonomske tablice od *Understands*..

Sve dok ne postane imuna sve navedene primjedbe ovakva taksonomija ostaje na razini dogovora. Objektivnost nekog koncepta poprima smisao tek kad postane imun na prozvoljnosti koje su posljedica slučaja (neodređenosti), hira ili impulsa i što nije po nužnosti, razumno ili principijelno.

### 3 Vrednovanje učenikovih postignuća

*Grupa djece, ostavljena s kompjutorom i bez pomoći odraslih, će kroz devet mjeseci postići iste standarde kao i svaka uredska sekretarica.*

Sugata Mitra, kreator *Škole u oblaku*

#### 3.1 Intuitivan pristup

Taksonomsku tablicu moguće je nadograditi do mjernog instrumenta učenikovog znanja i sposobnosti za određeni sadržaj učenja. Dovoljno je vrednovati svaku ćeliju *c* tablice, očitati popis učenikovih postignuća, npr. (A1, A1, A4, A4, A4, B2, D4) za zadane cjeline tog sadržaja i mjeru njegovih postignuća izračunati formulom

$$2v(A1) + 3v(A4) + v(B2) + v(D4),$$

gdje je  $v(\cdot)$  funkcija vrijednosti na skupu ćelija tablice. Pitanje je kako odrediti proceduru određivanja funkcije  $v(\cdot)$ ?

Najjednostavnija mogućnost je odrediti vrijednosti na skali *procesa* ( $p\_skala$ ) i na skali *znanja* ( $z\_skala$ ) npr.

A	B	C	D
0	2	4	6

P1	P2	P3	P4	P5	P6
5	6	7	8	9	10

i tablicu vrijednosti ćelija izračunati pomoću formule

$$v(c_{ij}) = z\_skala(i) + p\_skala(j),$$

gdje je  $i$  indeks retka,  $j$  indeks stupca ćelije  $c$  i reskalirati vrijednosti tablice tako da maksimalna vrijednost bude, na primjer, 100, a minimalna 5. Brojevi su dodatno zaokruženi na cijeli broj.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
A	5	14	22	31	40	48
B	22	31	40	48	57	65
C	40	48	57	65	74	83
D	57	65	74	83	91	100

Broj bodova za gore navedena učenikova postignuća je sada

$$2 * 5 + 3 * 31 + 1 * 31 + 1 * 83 = 217.$$

Prvi komentar koji se nameće sam po sebi je da su vrijednosti  $z\_skale$  i  $p\_skale$  dane unaprijed, od nekog autoriteta, i da su nezavisne, što je neprirodno jer nam intuicija govori da one to nisu. Zavisnost je prisutna, ali nije jasno kako ju izraziti. Jedan od načina kako bi se mogla utvrditi ta zavisnost je provesti proceduru vrednovanja učenikovih postignuća za određeni nastavni sadržaj, u nekom razredu (školi, gradu, državi) i meditirati nad tim podacima.

### 3.2 Statistička analiza kognitivnih dimenzija.

*Nije pitanje misle li strojevi, pitanje je čine li to ljudi.*

B. F. Skinner (bihejviorist)

U ovom odjeljku pokazuje se da je dvodimenzionalnost strukture znanja zapravo varka. Na to upućuje statistička analiza odgovora grupe studenata na pitanje kako oni percipiraju

sami sebe i kako procjenjuju vlastito znanje. Takvo testiranje provodim već tri godine i ovdje iznosim rezultate tih pilot istraživanja. Jedna od poteškoća koja možda umanjuje vrijednost tih istraživanja je da studenti ne razumiju u potpunosti, prema njihovom vlastitom priznanju, značenja termina u tablici.

Pod statističkom analizom kognitivnih dimenzija podrazumijeva se analiza tablice kontingencije (frekvencija) para kategorijskih varijabli. Varijable, u ovom slučaju su to *kognitivni procesi* (1–6) i *kategorije znanja* (A–D) u tablici 4. Frekvencije, u pojedinačnim ćelijama tablice, mogu se dobiti na razne načine, a jedan od načina, ovdje korišten, je procjena vlastitih kognitivnih sposobnosti od strane studenata. To znači da svaki student procjenjuje svoje znanje i vještine na način da označi ćeliju tablice koja korespondira njegovom znanju i stupnju procesiranja tog znanja. Dobivena tablica frekvencije je polazna tablica za analizu. Najčešće korištena metoda za analizu tablice kontingencije danas je *Analiza korespodencije (CA)* (Greenacre, 1984), (Benzécri, 1973) i ona omogućava kvantitativno povezivanje kategorijskih varijabli.

U tablici 4 dani su rezultati anketiranja studenata iz kolegija *teorije igara* o njihovim vlastitim kognitivnim sposobnostima na kraju semestra, a što se tiče znanja stečenog na tom kolegiju. U svakoj ćeliji tablice nalazi se broj studenata koji su sebe svrstali u tu ćeliju pri čemu su

Tablica 4: Frekvencija upotrebe taksonomskih ćelija. (Studenti PMF-MO)

Znanje	Kognitivni procesi					
	1. Pamti	2. Razumije	3. Primjenjuje	4. Analizira	5. Vrednuje	6. Kreira
A. Činjenice	9	3				
B. Koncepti	3	11	3	1	1	
C. Procedure	1	1	8	10	8	2
D. Introspekcija				3	8	9

se neki studenti svrstali u više ćelija po vlastitom nahodanju. Uočljiva je dijagonalna dominantnost te matrice frekvencija.

Isto takvu tablicu može kreirati i nastavnik, nakon što je sakupio sve moguće informacije o njemu. Analiza obiju tablica dala bi, naslućujem, kolika je razlika u percepciji ovladanosti gradiva iz perspektive nastavnika i perspektive studenata. Dodatno bi se obrazovni ciljevi kolegija mogli ubaciti u tablicu kontingencije već kod njegovog kreiranja i napraviti CA analiza. Odstupanje rezultata te analize od rezultata analize samoprocjene (ili nastavničke tablice) moglo bi se zaključiti jesu li studenti dorasli sadržaju kolegija i onome što se od njih na kolegiju traži.

### 3.2.1 Rezultati CA analize

Tablica kontingencije povezuje dvije kategorijske varijable i u svakoj ćeliji te tablice stoji broj entiteta koji spadaju u konkretnu kategoriju retka i konkretnu kategoriju stupca. Analiza

takve tablice provodi se CA analizom koja je sastavni modul programskog paketa R za obradu statističkih podataka. Nekoliko je biblioteka (modula) iz tog paketa koji obavljaju *analizu korespodencije*, a ovdje je korišten paket *ac*.

Za bolje razumijevanje širine primjene CA navodim jedan primjer iz biologije, a to je analiza rasprostranjenosti nekih vrsta paukova u Hrvatskoj. Jedan pristup je taj da se Hrvatska podijeli na staništa i za svako stanište se izbroji koliko paukova, od svake vrste, živi na tom staništu. Svako stanište ima svoje karakteristike koje ga određuju u kontekstu našeg problema. To može biti: (A) vlažnost tla, (B) vrsta tla, (C) dnevna/noćna prosječna temperatura, (D) nadmorska visina. . . . Tablica kontingencije sadrži broj svake vrste pauka za svako stanište.

U našem slučaju ulazna tablica za analizu je tablica 4.

Prvi korak u analizi korespodencije je tzv.  $\chi^2$  *dekompozicija* (tablica 5) koja pokazuje "dimenzionalnost" podataka u tablici kontigencije. Ta dimenzionalnost je uvijek manja od  $\min\{r, s\}$  gdje je  $r$  broj redaka, a  $s$  broj stupaca tablice. U našem slučaju je varijabilitet podataka, što se u CA analizi naziva *inercijom*, objašnjen s 84.54247 % s dvije "nove varijable". Nove varijable u prethodnoj rečenici su pod nazivnicima jer se radi o dva para novih varijabli, jedan par je prostoru redaka, a drugi par je u prostoru stupaca. Ako je čitatelj upoznat s *SVD* dekompozicijom matrice onda će mu biti razumljivo što govorim. Iz tablice vidi se da su podaci prikazivi u 3D prostoru, a 2D aproksimacija objašnjava 85%

Tablica 5:  $\chi^2$  dekompozicija

	%
D1	0.5981142
D2	0.8454247
D3	1.0000000

inercije. Ispis  $\chi^2$ -dekompozicije je standardni dio softverskog paketa.

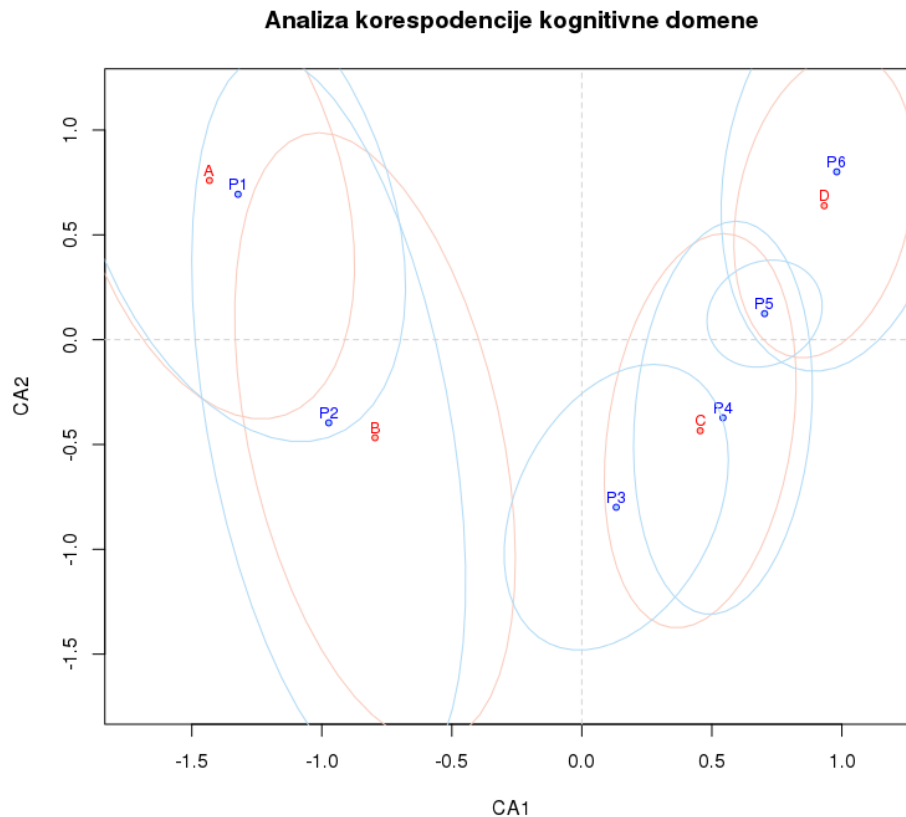
Na slici 1 dan je biplot prvih dviju dimenzija. Biplot znači da su na istoj slici prikazane i kategorije  $\{A, B, C, D\}$  iz prostora redaka i kategorije  $\{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$  iz prostora stupaca. Na slici je vidljivo da su  $A$  i  $P1$  blizu jedan drugog. To ima svoje značenje i može se ineterpretirati da "se vole" kao što bi pauk  $P1$  volio obitavati na staništu  $A$ . Ta slika nosi pregršt informacija ali bi nas njihovo iznošenje odvelo u "višu matematiku" — nas ovog trena zanima ona prva interpretacija dobivenih rezultata.

Evidentno je da

Slika 1 pokazuje jaku korespodenciju među kategorijskim varijablama *Znanje* i *Kognitivni procesi*.

slika 1 pokazuje 'efekt luka' ili *arch effect* što je posljedica nelinearnosti među podacima. Jedan od načina analize takvih podataka sugerira nelineranu transformaciju (polinomialnu) druge dimenzije CA2, u literaturi poznata kao *Detrended Correspondence Analysis*

Slika 1: Biplot klasične analize korespondencije tablice 4



(DCA) (Hill and Gauch, 1980). Rezultati DCA prikazani su na slici 2. Tu sliku možemo dobiti iz prve slike "peglanjem" parabole na kojoj aproksimativno leže kategorije.

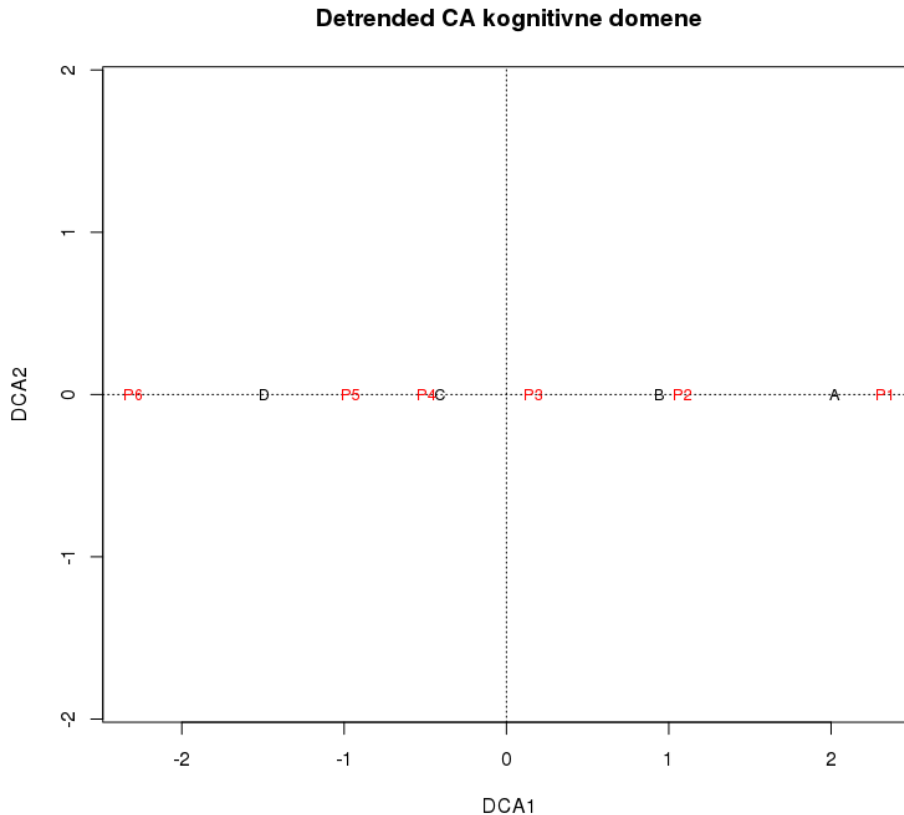
Iz slike 2 može se sada očitati kvantificirana skala na dimenziji *znanje* i dimenziji *proces*. Vrijednosti pojedinih kategorija na tim skalama dani su u tablici 6, čitajući s desna na lijevo. Orijehtacija osi na slici je stvar dogovora, a računalo ne zna prirodu podataka ako mu se to ne kaže. Skale su dodatno translirane tako da minimalne vrijednosti budu jednake 0.

Tablica 6: Skale vrijednosti kategorijskih dimenzija *znanja* i *procesa* dobivenih analizom korespondencije.

znanje				proces					
A	B	C	D	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0	1.08	2.44	3.52	0	1.25	2.17	2.83	3.30	4.64

Navedene vrijednosti kategorijskih vrijednosti 'znanja' i 'procesa' ovisne su o ulaznim podacima, a to su ovdje bile subjektivne procjene studenata o postignutom stupnju vlastitog znanja. Polazna tablica može biti, kao što već ranije komentirano, i tablica zacrtanih ciljeva

Slika 2: Biplot *detrended CA* tablice kontigencije 4.



svih obrazovnih sadržaja onako kako ih vidi nastavnik ili grupa nastavnika.

**Zaključak.** Ono što nam je dala *CA* analiza je skala vrijednosti kategorijskih varijabli *znanje* i *proces*. Rekonstrukcija vrijednosti ćelija tablice je moguća na više načina: množenjem zbrajanjem, uvažavanjem dodatnih težina samih varijabli (v. odjeljak 3.2.2).

### 3.2.2 Određivanje vrijednosti ćelija putem analize korespondencije.

Vrijednosti skala *znanja* i *postignuća* dobiveni u tablici 6 mogu se iskoristiti za računanje vrijednosti svake ćelije u taksonomskoj tablici i to na sljedeći način. Vrijednost ćelije  $v(i, j)$  definiramo kao produkt

$$v(c_{ij}) = z\_skala(i) + p\_skala(j), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Na primjer, vrijednost ćelije  $(B, P3)$  jednaka je  $1.08 + 2.17 = 3.25$ . Dodatno se mogu postaviti zahtjevi da maksimalna vrijednost ćelija, to je vrijednost ćelije  $(D, P6)$ , bude zadani broj (na primjer 20) i da se vrijednosti nakon toga zaokruže na cijeli broj. Posljedica takvih zahtjeva je tablica 7 desno.

**Primjer.** Pretpostavimo da su učenikova postignuća tokom godine zapisana u taksonomskoj tablici 7 lijevo. Ciljevi, njih ukupno 21, nisu eksplicitno imenovani u tablici,



već su zastupljeni kao jedinični doprinos ćeliji. Agregirana vrijednost učenikove tablice

Tablica 7: Popunjena taksonomska tablica učenika na kraju godine (lijevo) i vrijednosti ćelija tablice (desno). U prvom retku tablice su procesi, ukupno ih ima 6.

Frekvencija postignuća							Vrijednosti ćelija						
	P1	P2	P3	P4	P5	P6		P1	P2	P3	P4	P5	P6
A	3	3					A	0	3	5	7	8	11
B	3	1	3	1	1		B	3	6	8	10	11	14
C	2	1	2	1			C	6	9	11	13	14	17
D							D	9	12	14	16	17	20

postignuća iznosi

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 13 = 125.$$

Vrijednost ćelija taksonomske tablice može biti definirana i kao umnožak vrijednosti na skalama *znanja* i *postignuća* ili na neki treći način, ovisno o preferencijama nastavnika donositelja odluke.

Metrika taksonomske tablice zasnovana na statističkoj analizi je posljedica zacrtanih ciljeva u organizaciji nastave, a ne proizvoljnih i neosnovanih ideja. Takav pristup je zanimljiv jer daje vrijednosti procesa i kategorija znanja kao posljedicu koja proizlazi iz osobnog ili kolektivnog iskustva kreatora nastave.

Prednost taksonomske tablice kao generatora bodova (ocjene) je ta što je svaka provjerena ćelija rezultat učenikovog napora tijekom godine i nije prikladno, zaobilazeći takve rezultate, bez argumenata dijeliti odlične ocjene učenicima na zahtjev njihovih roditelja ili samih učenika.

## 4 Metoda potencijala

U teoriji odlučivanja se reci  $\{A, B, C, D\}$  tablice doživljavaju kao objekti koje treba vrednovati u odnosu na stupce  $\{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$  kao kriterije (atribute) uz pomoć podataka iz tablice. Za potrebe takvog vrednovanja dodatno je potrebno poznavati važnosti kriterija koji se izražavaju u formi stohastičkog vektora. To je klasičan problem tabličnog odlučivanja koji se može rješavati na razne načine.

*Metoda potencijala* ide korak dalje i u navedenoj tablici gleda na retke kao kriterije pomoću kojih se vrednuju stupci putem podataka iz tablice. Na taj način dobili smo dva problema odlučivanja: (1) prema stupcima i (2) prema recima.

Problem ovdje je što reci (stupci) nemaju unaprijed dane težine.

Prvi problem odlučivanja, tj. prema stupcima nazivamo *mjerenjem*, a drugi problem odlučivanja, tj. prema recima nazivamo *baždarenjem*. U *mjerenju* mjerimo retke u odnosu na

stupce koji igraju ulogu mjernog instrumenta, a rezultati mjerenja su zapisani u odgovarajućem stupcu. Rezultat mjerenja je agregirana mjera objekta (retka).

Kod *baždarenja*, na poznatim objektima (recima) testiramo izmjerenu vrijednost za svaki pojedini metar u stupcu. Rezultat *baždarenja* je neka vrijednost za svaki metar (stupac) koja govori u prilog njegovoj preciznosti.

Mjerenje nazivamo *primarnim*, a baždarenje *dualnim* postupkom. Označimo s  $m : w \mapsto m(w)$  perator mjerenja, a s  $b : v \mapsto b(v)$  operator baždarenja. I jedan i drugi operator stohastičkom vektoru pridružuju stohastički vektor, ali djeluju na različitim prostorima.

Ako je  $r$  broj redaka, a  $s$  broj stupaca tablice kontingencije onda je  $m : \Sigma^s \rightarrow \Sigma^r$ , a  $b : \Sigma^r \rightarrow \Sigma^s$ , gdje je  $\Sigma^r$  oznaka za skup stohastičkih vektora dimenzije  $r$ . Kompozicije  $\Psi = m \circ b$  i  $\Phi = b \circ m$  su operatori koji poprimaju vrijednosti u istom skupu na kojem su definirani.

**Teorem 4.1.** *Uz blage uvjete na podatke u tablici, postoji jedinstvena točka  $w_0 \in \Sigma^s$  za koju je*

$$\Phi(w_0) = w_0 \quad (\text{fiksna točka}).$$

*Štoviše, za svaku vektor  $w$ , iteracijski niz  $\Phi^n(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  konvergira prema  $w_0$ ,*

$$\Phi^n(w) \rightarrow w_0$$

*i brzina konvergencije ne ovisi o  $w$ . Isto i za  $\Psi$ .*

Za dokaz vidi Čaklović (2011).

**Konstrukcija skale.** Teorem omogućava konstrukciju skale u prostoru stupaca tako da se odabere proizvoljan stohastički vektor  $w_0 \in \Sigma^s$  i računa se niz vektora

$$w_1 = \Phi(w_0), \dots, w_n = \Phi(w_{n-1}) \dots$$

Taj niz konvergira fiksnoj točki preslikavanja  $\Phi$ , označimo ju s  $w$ . Zatim se računa tzv. *potencijal*  $X$  od  $w$  formulom

$$X = \exp(w)$$

koji predstavlja mjernu skalu na kategoriji stupaca. Eksponencijalna funkcija  $\exp$  u formuli računa se po komponentama. Suma komponenti vektora  $X$  jednak je 0, a ako je potrebno, potencijalu  $X$  se može dodati konstanta tako da najmanja komponenta od  $X$  poprima vrijednost 0.

Moguće je ponoviti isti postupak za operator  $\Psi$ , ali je umjesto toga dovoljno računati  $v = m(w)$ , gdje je  $w$  fiksna točka operatora  $\Phi$ . Nije teško zaključiti da je  $v$  fiksna točka za  $\Psi$ . Skala na kategoriji redaka je dana kao potencijal

$$Y = \exp(v).$$

Rezultat rangiranja metodom potencijala dan je u sljedećoj tablici, a vrijednosti ćelija taksonomske tablice su dane, reskalirane na skali 0–20, u tablici 8 — usporedi s tablicom 7 dobivenom preko CA. Vrijednosti ćelija su izračunate preko taksimetrike.

A	B	C	D
0.177	0.198	0.254	0.370

P1	P2	P3	P4	P5	P6
0.091	0.108	0.128	0.159	0.224	0.290

Tablica 8: Vrijednosti ćelija taksonomske tablice dobivene metodom potencijala. Radi usporedbe s tablicom 4 vrijednosti su reskalirane na skali od 0 do 20.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
A	0	1	2.1	3.9	7.6	11.4
B	0.9	1.9	3.1	4.8	8.5	12.3
C	3.4	4.4	5.6	7.3	11	14.8
D	8.6	9.6	10.7	12.5	16.2	20

I površan pogled na tablicu 8 i druge tablice istog tipa ukazuje da su vrijednosti kategorija znanja i kategorije procesa ne samo strogo rastuće već i da razlika vrijednosti susjednih kategorije također raste. Ta brzina rasta može se prilagoditi promjenom vrijednosti određenih parametara u metodi potencijala.

Čini se razumnim da se kod reskaliranja postave neki uvjeti: (1) jedan od njih je da vrijednost u gornjem lijevom kutu tablice bude pozitivna. Ovako kako sada stoji nije motivirajuće da se znanje, makar i bilo elementarno, vrednuje nulom. (2) Vrijednost nekih kategorijskih vrijednosti, na primjer ( $B, P_3$ ), bilo bi dobro fiksirati na neku vrijednost kao standard-prosjek koja bi stajala u nekom odnosu između 0 i 20, a što je stvar dodatne analiza i kalibracija.

**Poveznica između CA i metode potencijala.** Ne postoji poveznica, ali postoji analogija. CA u svojoj početnoj verziji također je imala sličan iterativni postupak ali je operator bio linearan, dok je u metodi potencijala operator u igri nelinearan.

## 5 Komentari

**Komentar 1.** Razumijevanje i uvođenje takve tablice u obrazovni proces zahtijeva popriličan napor od strane nastavnog osoblja i budućih studenata i mnogo praktičnog iskustva. Kad se jednom usvoji, iskazivanje procijenjenog učenikovog znanja u formi tablice je manje stresno i za učenika i za nastavnika, a tablica se može upotpunjavati nakon razgovora s učenicom, nakon analize nekog teksta ili pokusa, ili nakon klasičnih formi ispitivanja znanja kao što su testovi i domaće zadaće. Grupni i/ili samostalni projekti kao oblici učenja su dobar izvor informacija za popunjavanje taksonomske tablice ali ih je teško ocijeniti ocjenama kao u klasičnom obliku ocjenjivanja (1-5).

Statistička analiza tablice nudi još jedan zanimljiv zaključak. Ona pokazuje da je procjena znanja putem taksonomske tablice u suštini jednodimenzionalna ali tu latentnu dimenziju nije lako imenovati.

**Komentar 2.** Podaci jedne, od tri grupe studenata koje su bile podvrgnute samoprocjeni stečenog znanja nisu dali tako dobre rezultate. U raspravi o poteškoćama prilikom popunjavanja tablice studenti su izjavili da ne razumiju dovoljno razliku između pojmova: *Primjenjuje*, *Analizira* i *Vrednuje*, a za pojam *Metakognitivno* mnogi nikada nisu ni čuli. Većina studenata je izbjegavala polja s tim epitetima, neki su čak predložili da se ti pojmovi izbace iz tablice. Možda ne bi bilo loše da se u hrvatskoj verziji tablice koriste termini u duhu hrvatskog jezika koji su svima razumljivi.

**Komentar 3.** Moram priznati da mi je usvajanje Bloomove terminologije i razumijevanje smisla cijele procedure oduzelo dosta vremena, a i sada, nakon dugotrajnih razgovora sa studentima i pozamašnog broj napisanih linija kôda za obradu podataka i njihove analize imam osjećaj da je u nastavnoj praksi cijela procedura teško primjenjiva bez dubljeg razumijevanja i uvježbanosti od strane nastavnika i bez popratnog informatičkog sustava koji olakšava prikupljanje podataka.

## 6 Opravdanost sistematizacije znanja u obrazovnom procesu

Klasifikacija znanja koju zastupaju Bloom i njegovi istomišljenici u službi je poimanja obrazovanja koje bi trebao razvijati kompetencije i razvijati znanja koja vode rješavanju problema. Osveštavanje procesa spada u više kognitivne funkcije i kao takvo je teško prepoznatljivo, ne samo od subjekta mišljenja, u ovom slučaju učenika<sup>8</sup>, već i od strane njegovih nastavnika. Takvi kognitivni procesi neodvojivi su od sadržaja i individualnog iskustva koje taksonomija zanemaruje i potcjenjuje, a to je još izrazitije u umjetničkom području i književnosti nego u matematici i prirodoslovnom području.

Kompetencija je uvijek usredotočena na umijeće i primjenu. Što god da se upotrebljava za postizanje kompetencije, bez obzira na sadržaj, sve će se to u odnosu prema umijeću nužno interpretirati kao sredstvo koje se može zamijeniti sličnim funkcionirajućim sredstvima (Liessmann, 2019). Opasnost takvog pristupa leži u mogućnosti da se nastavnički studiji koji su uglavnom pod okriljem neke znanstvene discipline svedu pod primat pedagogije i didaktike kojoj više nije cilj posredovanje stručnih znanja. Nije teško zaključiti da takav pogled na obrazovanje vodi ka njegovoj eroziji.

Sve što je rečeno o taksonomiji u ovom odjeljku navodi na razmišljanje da taksonomija u obrazovanju ima svoje mjesto i ulogu jedino ako su nastavni sadržaji dobro osmišljeni, međusobno se prožimlju, a nastavnici njeguju kulturu znanja i istinski su motivirani za takav posao.

Kakvu ulogu u tom procesu ima ocjena? Ocjena nije potrebna učenicima nego onima koji iz nastavnog procesa izvlače korist i zapošljavaju diplomante koji su ovladali zacrtanim znanjem i umijećima. Takva ocjena je uljez u obrazovnom sustavu. Vrhunac te suprotnosti je ocjena koja je izgubila smisao vlastitog postojanja time što je izgubila moć razlikovanja

---

<sup>8</sup>što pokazuju i ankete (v. komentare na str. 19) provedene na studentskoj populaciji.

učeničke populacije inflacijom petica. Unutar samog obrazovnog procesa ocjena ima ulogu i filtera i poticaja. Što se filtera tiče dovoljne su dvije ocjene: 'zadovoljio' i 'nije zadovoljio', a što se tiče poticanja učenika na rad i učenje, to se može riješavati i na drugačiji način.

Taksonomska tablica kao generator ocjene predstavlja pedagošku novost i zahtijeva daljnje istraživanje i provjeru u samom nastavnom procesu. Nisam siguran da je današnji obrazovni sustav spreman odreći se tradicionalnog ocjenjivanja samo tako, a to govori u prilog tome da bi taksonomska tablica mogla odigrati svoju ulogu u prijelaznom periodu odumiranja ocjene.

*We don't need no education  
We don't need no thought control  
No dark sarcasm in the classroom  
Teachers leave them kids alone  
Hey teacher leave them kids alone  
All in all it's just another brick in the wall  
All in all you're just another brick in the wall*

Pink Floyd, "Another Brick In The Wall (II)"

## Literatura

- Anderson, L. W. and Krathwohl, D. (2001). *A taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman, New York.
- Benzécri, J.-P. (1973). *L'Analyse des données: I & II. La Taxonomie*. Dunod, Paris.
- Biggs, J. B. (1987). *Study Process Questionnaire Manual. Student Approaches to Learning and Studying*. Melbourne.
- Čaklović, L. (2011). Conflict Resolution. Risk-As-Feelings Hypothesis. *Labsi Working Papers*, (35):1–16. (<http://www.labsi.org/wp/labsi35.pdf>).
- Greenacre, M. (1984). *Theory and Applications of Correspondence Analysis*. Academic Press, London.
- Hill, M. O. and Gauch, H. G. (1980). Deterrended correspondence analysis, an improved ordination technique. *Vegetatio*, 42:47–58.
- Jaušovec, N. (2011). Metacognition. In Runco, Mark, A. and Pritzker, Steven, R., editors, *Encyclopedia Of Creativity*. Academic Press, London.
- Liessmann, K. P. (2019). *Obrazovanje kao izazov*. Školska knjiga, Zagreb. Naslov izvornika: *Bidung Als Provokation*, Wien 2017.