

Teorija relativnosti*

Lavoslav Čaklović

Revidirano 6. ožujka 2024.

Sadržaj

| | | | | | |
|----------|---|----------|------------|---|-----------|
| 1 | Specijalna teorija relativnosti | 3 | 1.2.3 | Nastajanje teorije relativnosti. | 22 |
| 1.1 | Prostor Minkowskog | 3 | 1.2.4 | Lorentzove transformacije. | 24 |
| 1.1.1 | Prostor-vrijeme u predrelativističkoj mehanici. | 3 | 1.3 | Simultanost događaja | 26 |
| 1.1.2 | Naivna teorija relativnosti | 5 | 1.3.1 | Relativistička sinkronizacija satova. | 27 |
| 1.1.3 | Dilatacija vremena. | 7 | 1.3.2 | Relativnost simultanosti | 29 |
| 1.1.4 | Lorentzova kontrakcija | 9 | 1.3.3 | Slaganje brzina | 30 |
| 1.1.5 | Četverodimenzionalni prostor-vrijeme | 12 | 2 | Opća teorija relativnosti | 30 |
| 1.2 | Uloga svjetlosti u razvoju teorije. | 17 | 2.1 | Einsteinov princip ekvivalencije | 34 |
| 1.2.1 | Brzina svjetlosti. | 18 | 2.1.1 | Gravitacija i svjetlost | 37 |
| 1.2.2 | Valna jednadžba. | 20 | 2.1.2 | Analiza dimenzija | 39 |

Sažetak

Prostor i vrijeme su koncepti koji omogućavaju izražavanje promjena. Što se prostora tiče ta promjena se izražava u metrici i u tom smislu prostor je skup objekata zajedno s metrikom. U takvom prostoru objekti ne posjeduju osobnosti i kvalitete kako mi ljudi to nazivamo, a metrika služi kako bi kvantificirali njihovu različitost.

Koncept vremena je složeniji. Promjene koje uočavamo na jednom objektu su niz sukcesivnih stanja i ta vrsta promjene je konceptualno različita od promjene položaja.

*Dokument je dostupan na web adresi <https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/> s aktivnim poveznicama.

Starenje je proces koji traje i to trajanje kao koncept je potpuno različit od promjene mjesta stanovanja.

Oblici trajanja vezani uz prostor organiziraju različite položaje tijela u niz sukcesivnih stanja, a naša osjetila ih doživljavaju kao gibanje. Specijalna gibanja koja se ponavljaju, gibanje Mjeseca oko Zemlje ili njihalo, nazivamo satom, koristimo za kvantitativno uspoređivanje sukcesije trajanja. U tom smislu je vrijeme fundamentalniji pojam od prostora. S druge strane, mehanika mjeri vrijeme putem odabranog gibanja (sata) i gledano na takav način vrijeme ne postoji bez prostora i gibanja u njemu.

Metafizički gledano, vrijeme i prostor su dvije manifestacije istog koncepta koje su uzajamno povezane. Pitanje je što je to?

Newtonova mehanika zasnovana je na nezavisnosti prostora i vremena koje je Newton apsolutizirao, vjerojatno iz razloga da račun bude jednostavniji. On je uveo toliko novih koncepata da je morao razviti i matematičku strukturu kojom bi to izrazio. Jedini koji je u to vrijeme bio bio na njegovoj razini je Leibniz.

Leibnizova kritika Newtonove mehanike polazi od koncepta prostora i vremena koji su za Newtona kontejneri u koje se smještavaju objekti i događaji, i koji postoje nezavisno od od njih. Koncept neoklasičnog prostora-vremena koji se javlja sedamdesetih godina prošlog stoljeća je samo dokaz da se klasična mehanika može zasnovati i bez nezavisnih prostora i vremena.

To je zakašnjela ideja jer prostor-vrijeme već postoji u specijalnoj teoriji relativnosti zahvaljujući Lorentzu, Poincaréu, Einsteinu i Minkowskom. Proboj iz klasične u relativističku ljusku napravila je svjetlost koju se iskoristilo kao posrednika u sinkronizaciji satova. Brzina širenja svjetlosti c već je bila poznata i postala je maksimalna moguća brzina materijalnih tijela. Štoviše, brzina svjetlosti je konstanta neovisna o promatraču, što je posljedica Michelson-Morleyevog eksperimenta.

Konstantnost brzine svjetlosti i Einsteinov princip sinkronizacije satova iz temelja su promijenili poimanje prostora i vremena i ujedinili ih u četvrodimenzijsku afinu strukturu prostora Minkowskog s indefinitnom metrikom $ds^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$. Jednadžba $ds^2 = 0$ utjelovljuje konstantnost brzine svjetlosti u geometriju prostora.

Gravitacija je ostala neobjašnjena i netaknuta specijalnom teorijom relativnosti. Ali poveznica između gravitacije i ubrzanog homogenog polja postoji već kod Newtona u formi *slabog principa ekvivalencije* (Posljedica VI, zakona gibanja Newtonove *Principie*). Einstein je u toj posljedici vidio ekvivalenciju homogenog gravitacijskog polja i ubrzanog sustava i postulirao *jaki princip ekvivalencije* koji gravitaciju lokalno uklapa u geometriju jedne općenitije strukture od prostora Minkowskog, a to je pseudo Riemannov prostor, matematički koncept koji je već bio spreman prihvatiti Einsteinove ideje.

Prva eksperimentalna potvrda opće teorije relativnosti dolazi od Eddingtona (1919) koji je izmjerio prividnu promjenu položaja dalekih zvijezda koje su za vrijeme pomrčine Sunca trebale biti, u klasičnoj slici, zaklonjene sunčevim diskom. Njihova vidljivost je omogućena, prema općoj teoriji relativnosti, zbog veće zakrivljenosti prostora u blizini veliki masa. Einsteinova teorijska predviđanja od 1.748" (2015) i Eddingtonova mjerenja od dviju ekspedicija — 1.72" ± 0.11" (Australia) i 1.98" ± 0.12 (Brazil) pokazuju prilično veliku podudarnost.

Na kraju svega nameće se pitanje mogu li se dva velika diva, Newton i Einstein uspoređivati. Ako uspoređujemo njihov utjecaj na razvoj znanosti općenito onda je Newton zaslužniji. Osim toga Newton je prošao daleko trnovitiji put. Stvorio je nove

koncepte i razvijao je matematički aparat kao rječnik za njihovo izražavanje. Einstein je već imao sve spremno.

1 Specijalna teorija relativnosti

Razumijevanje nastanka znanosti neophodno je za potpuno razumijevanje same znanosti.

Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, str. 163, 1902.

Nastajanje specijalne teorije relativnosti (STR), a zatim i opće, usko je povezano uz razvoj teorije nastanka i širenja svjetlosti. Što se optičkih pojava tiče prisutne su dvije teorije svjetlosti: (1) Prva je korpuskularna teorija svjetlosti — nosači svjetlosti su čestice koje se gibaju, (2) druga promatra svjetlost kao valnu pojavu — svjetlost je trasverzalni val.

Kad su eksperimentalno otkriveni, ogib i lom svjetlosti bili su opisivani u terminima valne prirode svjetlosti, a eter je bio potreban kao nositelj širenja valnog poremećaja. I druge teorije svjetlosti, od Newtona pa nadalje, zahtijevale su postojanje etera. Eter je okosnica objašnjenja poopćenja principa relativnosti (sustava u gibanju) sve do Maxwellovih jednadžbi oko 1900. god.

Ovdje nećemo ulaziti u detalje svih važnih eksperimenata i njihovih objašnjenja. Nastojao sam u najkraćim crtama prikazati okruženje i važnije rasprave, koje ne jenjavaju ni dan danas, kako bi čitatelj mogao bar djelomično mogao osjetiti atmosferu tog vremena. Kraj 19. i početak 20. st. vrvi novim idejama i eksperimentima ne samo u fizici već u svim aspektima ljudske kreativne misli. Specijalna teorija relativnosti nije odmah dobila pljesak znanstvene zajednice, za razliku od opće teorije relativnosti koja je bez velikog otpora naišla na odobravanje, prvenstveno od astronoma, teorijskih fizičara i matematičara koji su već ranije razvili matematičku osnovu za njeno ustoličenje.

1.1 Prostor Minkowskog

Proboj iz klasične u relativističku ljusku napravila je svjetlost koju se iskoristilo kao posrednika u sinkronizaciji satova. Brzina širenja svjetlosti c već je bila poznata i postala je maksimalna moguća brzina materijalnih tijela. Štoviše, brzina svjetlosti je konstanta neovisna o promatraču, što je posljedica Michelson-Morleyevog eksperimenta.

Konstantnost brzine svjetlosti i Einsteinov princip sinkronizacije satova iz temelja su promijenili poimanje prostora i vremena i ujedinili ih u četverodimenzionalnu afinu strukturu prostora Minkowskog s indefinitnom metrikom $ds^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$. Jednadžba $ds^2 = 0$ utjelovljuje konstantnost brzine svjetlosti u geometriju prostora.

1.1.1 Prostor-vrijeme u predrelativističkoj mehanici.

Struktura četverodimenzionalnog prostora-vremena u Newtonovoj mehanici posjeduje specifičnost da jedan sat određuje vrijeme u cijelom univerzumu. To je posljedica ap-

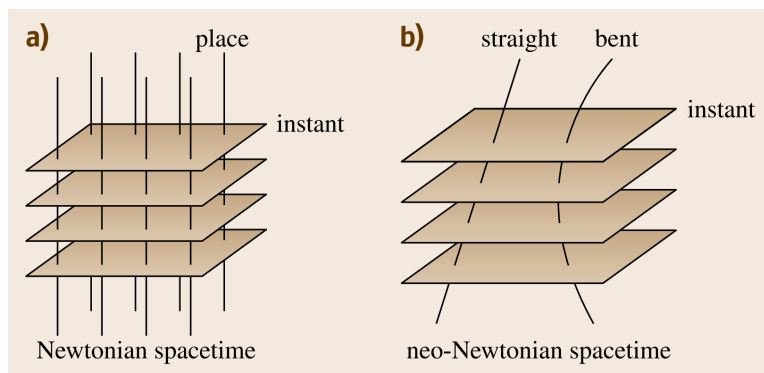
solutnosti vremena. Apsolutnost prostora ima za posljedicu, da neovisno o vremenu, događaj zauzima dio prostora opisan fiksnim koordinatnim sustavom. To znači da vrijeme možemo uzeti kao jednu koordinatnu os referentnog sustava, a za svaki odabrani vremenski trenutak, svi događaji u tom trenutku karakterizirani su svojim položajem u trodimenzionalnom euklidskom prostoru.

Drugim riječima, događaj (x_1, x_2, x_3, t) predstavljamo s 3 prostorne koordinate x_i , $i = 1, 2, 3$ i četvrtom vremenskom t . Događaji s istom vremenskom koordinatom su *simultani* i vremenska os je okomita na simultane događaje koji čine familiju paralelnih trodimenzionalnih hiperravnina okomitih na vremensku os. Linija koja povezuje sve događaje prostora-vremena s istim prostornim koordinatama čine tzv. *svjetsku liniju*. Takva linija predstavlja *stalnost prostornog položaja* u vremenu. Na slici 1 a) svjetske linije su prikazane kao vertikalni pravci.

Opisani prostor-vrijeme je čisto geometrijska konstrukcija koja dozvoljava prikaz događaja u nekom odabranom referentnom sustavu. Ona omogućava računanje udaljenosti između dva neistovremena događaja kao euklidsku udaljenost u četverodimenzionalnom prostoru, a omogućava i pojam *apsolutne brzine* između dva neistovremena događaja kao omjer njihove prostorne i vremenske udaljenosti.

Mnogo kasnije od Newtona, tek u dvadesetom stoljeću (Sklar, 1974), javlja se ideja o nešto drugačijem prostoru-vremenu koji uvažava sve moguće inercijalne referentne sustave, a time utjelovljuje i Galilejeve transformacije, zvat ćemo ga *neoklasičnim* prostorom. Neoklasični prostor ima četverodimenzionalnu afinu strukturu, a samo istovremeni događaji imaju euklidsku strukturu dok je vrijeme i dalje neovisno od prostora. Svjetske linije više nisu samo pravci paralelni s vremenskom osi već bilo koji pravac koji siječe sve paralelne simultane prostore (slika 1 b)). Afina struktura nema mogućnost mjerenja udaljenosti

Slika 1: Struktura prostora-vremena: a) Newtonova i b) neoklasična. Prostor je uskraćen za jednu dimenziju radi boljeg prikaza.



između neistovremenih događaja, to je moguće samo ako su oni istovremeni. Kosa svjetska linija predstavlja gibanje promatrača konstantnom brzinom i promatrač miruje u tom sustavu koji se giba. Pojam apsolutne brzine ovdje ne postoji, ali postoji pojam *apsolutne akceleracije* jer druga derivacija anulira relativno gibanje inercijalnih sustava.

Osim prostornih rotacija i translacija i dodavanja konstante vremenu postoji još jedna simetrija neoklasičnog prostora-vremena, a to je transformacija koja jednu familiju svjetskih linija prevodi u drugu familiju svjetskih linija, a to je upravo Galilejeva transformacija jer cijelom svemiru dodaje konstantnu brzinu.

Galilejeva grupa transformacija neoklasičnog prostora čuva strukturu tog prostora, što znači da svaki pojam koji definiramo vezano uz tu strukturu također treba biti invarijantan na grupu transformacija. Udaljenost neistovremenih događaja u neoklasičnoj slici nije moguće definirati jer Galilejeva transformacija ne čuva udaljenost neistovremenih događaja¹ Drugim riječima, udaljenost neistovremenih događaja nije *definabilna*. Postoji još jedan zahtjev na konstrukciju sata, mjerača vremena. Bez obzira na brzinu i akceleraciju kojom se giba, sat ne bi smio raditi distorziju vremena u smislu da mora mjeri apsolutni vremenski interval između dva događaja bez obzira na svoje kretanje.

1.1.2 Naivna teorija relativnosti

U većini klasičnih tekstova koji govore o specijalnoj teoriji relativnosti (STR) obično se započinje opisom Michelson-Morleyevog eksperimenta kao motivacijom, Lorentzovim transformacijama i obrazlaže se kontrakcija prostora i dilatacija vremena. U tome nema ništa netočnog niti nekorektnog. Međutim, po riječima fizičara Seana Carrolla, u takvom pristupu specijalnoj teoriji relativnosti, prostor i vrijeme se još uvijek doživljavaju odijeljeni jedno od drugog što otežava ili umanjuje naše intuitivne sposobnosti viđenja realnosti. Poslušat ćemo njegove riječi i pozabaviti ćemo se geometrijom prostora-vremena prije ostalog.

Relativistički prostor-vrijeme W je doslovce familija svih mogućih uniformnih (inercijalnih) gibanja. Takva unija pravaca ima afinu strukturu, što znači da razlike svih elemenata te strukture čine vektorski prostor. Elemente te strukture nazivamo *događajima*. Kasnije ćemo uvesti globalni koordinatni sustav u tu afinu strukturu ali metrika neće biti globalno definirana, a tamo gdje će to biti slučaj, ona neće biti niti euklidska niti definitna.

Umjesto "uniformno gibanje" mi ćemo govoriti o promatraču O . On ima svoj sat kojim mjeri vrijeme i gledajući samo na sat neće moći ustanoviti giba li se ili ne bez pomoći sa strane. Treba mu neki još neki događaj različit od njegovog položaja i vremena.

Ako već imamo pojavu koja se širi konstantnom brzinom onda bi ju mogli iskoristiti za računanje odaljenosti od jednog događaja do drugog ili od jednog mjesta u prostoru do nekog drugog. Razmišljanja poput niže navedenog slobodno možemo svrstati pod zajednički naziv *naivna teorija relativnosti* jer još nisu strukturirana u smislu strukture koju je postavio Minkowski. Einsteinova STR također spada u tu kategoriju, a o tome svjedoče i Einsteinovi komentari na predavanje Minkowskog 1908. g. na godišnjoj skupštini Njemačkog udruženja znanstvenika i fizičara. Einstein umanjuje vrijednost strukture koju, po vlastitim riječima, ne razumije.

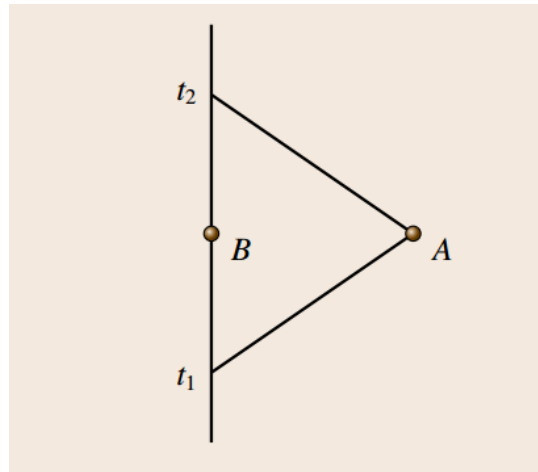
U određivanju procedure mjerenja udaljenosti teško je osloniti se na našu intuiciju jer je STR izazov za intuiciju i dan danas. Ono što je osnovno, a naglašeno je na samom

¹Može se dokazati da grupa simetrija jednoznačno određuje afinu i metričku strukturu prostora-vremena.

početku, to je sat i svjetlosni signal koji se u svim smjerovima i referentnim sustavima giba konstantnom brzinom c . Evo načina kako se uz pomoć jednog i drugog određuje simultanost događaja, a ujedno i koordinatni sustav na pravcu gibanja promatrača (Milne, 1935). Dakle, radi se o jednodimenzionalnom gibanju. Na slici 2 prikazana je vertikalna linija koja predstavlja vremensku os promatrača okomitu na pravac gibanja. Točke A, B na pravcu gibanja odredit ćemo na sljedeći način.

Po pravcu, u smjeru gibanja, promatrač u nekom trenutku t_1 na njegovom satu odašilje svjetlosni signal koji se zrcali na zrcalu (događaj A) i vraća se natrag u trenutku t_2 na

Slika 2: Sinkronizacija događaja. Radarska definicija



njegovom satu. Promatrač određuje događaj B , a to je njegov položaj u trenutku $t_0 = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$, kao događaj koji je sinkroniziran s događajem zrcaljenja. Za sinkronizirane događaje, i samo za njih, definirana je euklidska udaljenost. Događaj A i događaj A' određeni trenucima t_1 i t_2 su sinkronizirani, a događaj B je na pola puta tako da euklidska udaljenost A i B iznosi $d = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$.

Opisanu proceduru sinkronizacije nazivamo *radarskom sinkronizacijom*. Kao ishodište koordinatnog sustava promatrača O može se uzeti događaj B , a odaljenost d kao jedinična mjera na x -osi AB .

Opisana sinkronizacija je misaoni eksperiment u kojem je promatraču zadan pravac i smjer gibanja kao i mogućnost postavljanja zrcala na neko mjesto na tom pravcu. Pitanje koje se nameće samo po sebi je zašto bi trenutak t_0 bio baš na polovici vremenskog intervala $[t_1, t_2]$. Takav odabir počiva na pretpostavci da svjetlost ima istu brzinu c nakon odašiljanja i pri povratku, tj. bez obzira na smjer gibanja promatrača. Ako to nije tako onda bi t_0 mogao u principu biti bilo koji trenutak iz spomenutog vremenskog intervala. Trenutak

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_2 + t_1) \quad (\text{RS})$$

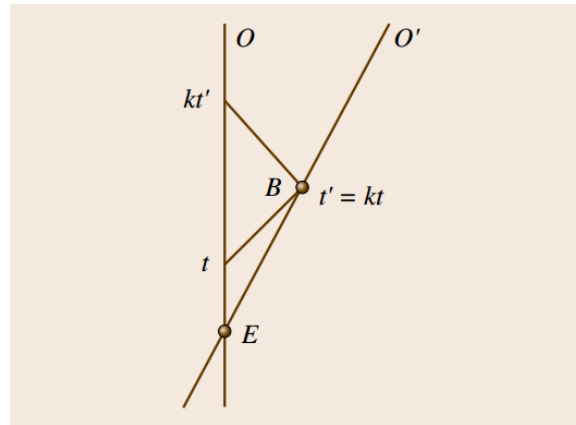
je stvar dogovora. Za gornju raspravu nije ključno da zrcalo bude na pravcu gibanja promatrača. Razmišljenje ostaje bez izmjene.

Osnovno pitanje koje se nameće je može li promatrač ustanoviti da li se giba i u kojem smjeru.

1.1.3 Dilatacija vremena.

Promatrajmo dva promatrača O i O' koji putuju konstantnim brzinama svaki po svom pravcu. Pretpostavimo nadalje da oni prolaze jedan kraj drugog (događaj E) i da su prilikom susreta sinkronizirali svoje satove na vrijednost $t = 0$ (v. sliku 3). Koristeći opisani

Slika 3: k -faktor



proces sinkronizacije jedan i drugi promatrač su u stanju uspostaviti koordinatni sustav duž svojih pravaca kretanja. Događaje na svom pravcu promatrač O će identificirati s (t, x) , a promatrač O' s (t', x') . Te koordinate zvat ćemo *inercijalnim koordinatama* sustava O odnosno sustava O' . Naš krajnji cilj je odrediti vezu između tih koordinata uz pretpostavku da jedino što promatrači registriraju je njihovo relativno gibanje.

Za početak promatrajmo signal kojeg promatrač O odašilje u trenutku t na svom satu, a promatrač O' ga registrira u trenutku $t' = kt$ na svom satu (događaj B). Broj k ovisi samo o relativnoj brzini među promatračima i ne ovisi o trenutku odašiljanja signala t što je posljedica afine strukture prostora. Iz istog razloga, ako O' vrati primljeni signal onda će ga O primiti u trenutku $kt' = k^2t$. Promatrač O sada može izračunati vrijeme događaja B i svoju udaljenost od B u tom trenutku

$$t_B = \frac{1}{2}(1 + k^2)t, \quad d_B = \frac{1}{2}c(k^2 - 1)t.$$

Također može izračunati brzinu od O'

$$v = \frac{d_B}{t_B} = \frac{c(k^2 - 1)}{k^2 + 1},$$

odakle slijedi

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} > 1.$$

Svaki promatrač za sebe računa vrijeme između događaja E i B . Za promatrača O to vrijeme je t_B , a za promatrača O' to vrijeme je $t' = kt$. Njihov omjer je

$$\frac{t_B}{kt} = \frac{(k^2 + 1)t}{2kt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma(v).$$

Faktor $\gamma(v) > 1$ nazivamo γ -faktor ili faktor dilatacije vremena. Dakle,

Vrijeme provedeno između dva događaja ovisi o promatraču. Za promatrača koji promatra gibanje to vrijeme jednako je proteklom vremenu na satu promatrača koji se giba pomnoženom s faktorom dilatacije.

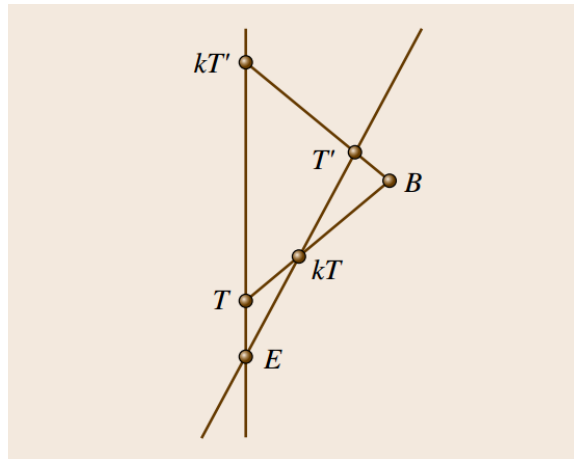
Drugim riječima vrijeme u sustavu koji se giba teče sporije nego vrijeme promatrača koji promatra gibanje.

Propozicija 1.1 (Lorentzove transformacije). Dva inercijalna koordinatna sustava određena s O i O' , gdje se O' giba u odnosu na O brzinom v , povezana su transformacijom

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dokaz. Promatrajmo skicu 4. Svjetlosni signal odaslan je iz O u trenutku T na njegovom satu, prolazi O' u trenutku kT na njegovom satu, reflektira se u B , opet prolazi O' u trenutku T' na njegovom satu i vraća se natrag u O u trenutku kT' mjereno na satu od O .

Slika 4: Lorentzova transformacija. Izvod.



U inercijalnom koordinatnom sustavu promatrača O koordinate od B su

$$t = \frac{1}{2}(kT' + T), \quad x = \frac{1}{2}c(kT' - T),$$

dok su koordinate istog događaja u inercijalnom sustavu promatrača O'

$$t' = \frac{1}{2}(kT + T'), \quad x' = \frac{1}{2}c(T' - kT).$$

Dakle,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ T' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ T' \end{pmatrix},$$

odakle slijedi

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k + k^{-1} & k - k^{-1} \\ k - k^{-1} & k + k^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Uvrstimo li vrijednost za $k = \sqrt{(c+v)/(c-v)}$ dobije se

$$k + k^{-1} = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad k - k^{-1} = \frac{2v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

odakle slijedi tvrdnja. □

Napomena. Nije teško zaključiti da za male brzine v , tj. $v \ll c$ Lorentzove transformacije postaju Galilejeve transformacije tj. kad $v/c \rightarrow 0$ onda

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

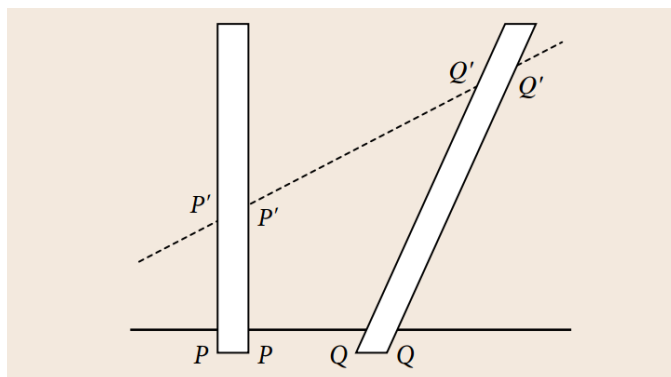
1.1.4 Lorentzova kontrakcija

Do sada smo mjerili udaljenost događaja, ali kako izmjeriti duljinu štapa na primjer? Štap u STR je dvodimenzionalna tvorevina, on postoji u vremenu intervalu i postoji u prostoru i pitanje što je to duljina takve dvodimenzionalne tvorevine?

Slika 5 je iz originalnog članka *Space and Time* samog Minkowskog, a prikazuje mirujući štap PP (lijevo) u nekom vremenskom intervalu u prostoru Minkowskog. Horizontalna os gleda u smjeru štapa, a vremenska os je okomita na štap. U trenutku $t = 0$ štap zauzima dio prostora PP na x -osi u inercijalnom sustavu promatrača O , a za sva ostala vremena to je pruga omeđena s dvije svjetske linije, Minkowski ju je nazvao *svjetska tuba*. Svjetske linije koje definiraju tubu su svjetske linije krajeva štapa gdje se pod 'krajem štapa' misli na događaj svjetske tube štapa koji ima definirane prostorne koordinate.

Desni štap QQ na slici giba se u odnosu na lijevi nekom brzinom v duž x -osi i zato je njegova svjetska tuba nagnuta u odnosu na svjetsku tubu prvog štapa gledano u inercijalnom sustavu promatrača O . Gledano u inercijalnom sustavu promatrača O' u kojem štap QQ miruje, njegova svjetska tuba je okomita na x' -os, a to je crtkana linija na slici. Duljina prvog štapa, na primjer, u sustavu O' , je duljina presjeka svjetske tube štapa i prostora

Slika 5: Štapovi u relativnom gibanju.



sinkroniziranih (istovremenih) događaja za promatrača O' , a to je udaljenost $P'P'$. Nije na odmet odmah reći da skup sinkroniziranih događaja za jednog promatrača ne mora biti (i nije) sinkroniziran za drugog promatrača, ali ako želimo vidjeti štap kao jednodimenzionalan, onda ga moramo pogledati, figurativno rečeno, kroz prozor sinkroniziranih događaja.

Obratimo pažnju sad na desni štap koji se kreće u odnosu na lijevi. Ako promatrača O' smjestimo u lijevi kraj štapa, onda je njegova tuba određena s $x' = 0$ i $x' = L$ i to je definicijska relacija za duljinu L štapa QQ u sustavu O' . Pitanje je kako promatrač O , mjeri njegovu duljinu? Promatrača O smjestit ćemo na lijevi kraj štapa što je događaj s koordinatama $t = 0, x = 0$.

Prema formulama za Lorentzovu transformaciju (10) lijevom kraju štapa pripada svjetska linija

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix}, \quad (2)$$

a desnom kraju pripada svjetska linija

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ L \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} ct' + \frac{Lv}{c} \\ vt' + L \end{pmatrix}. \quad (3)$$

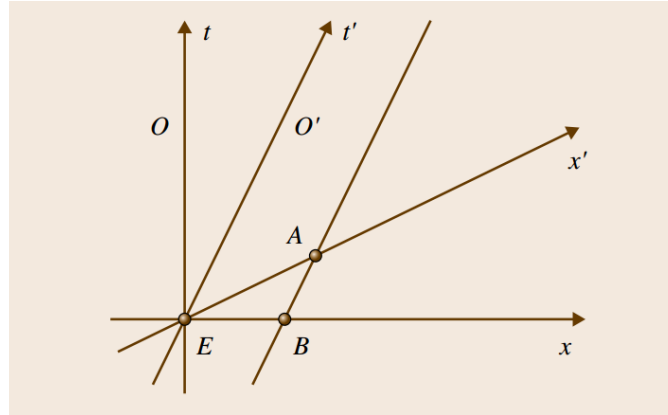
Duljina štapa QQ u sustavu O je udaljenost između događaja E i B , gdje je E na prvoj svjetskoj liniji, a B na drugoj svjetskoj liniji u trenutku $t = 0$. Koordinate od E su, prema formuli (2), ($t = 0, x = 0$), a koordinate od B računamo prema formuli (3) za t' odabrano tako da je $t = 0$. Dakle, koordinate od B su

$$t = 0, \\ x = \gamma(v) \left(-\frac{Lv^2}{c^2} + L \right) = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L\gamma(v)^{-1}. \quad (4)$$

Prema (4) promatrač O mjeri duljinu štapa u gibanju koja je kraća za faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$.

Dajemo još jednu sliku (sl. 6) koja pomaže boljem razumijevanju provedenog računa za kontrakciju duljine. A je desni kraj štapa na svjetskoj liniji u sustavu promatrača O' za

Slika 6: Lorentzova kontrakcija duljine.



$x' = L$, a B je desni kraj štapa na svjetskoj liniji sustavu promatrača O koja je Lorentzova slika prethodne linije. Primijetite da B prethodi A u sustavu O' . Što mislite zašto je tome tako?

Napomena. Crtkana linija na slici 5 predstavlja prostor istovremenih događaja okomit na svjetsku liniju promatrača u gibanju, a presjek $P'P'$ tog prostora i svjetske tube od PP je ono što mjeri promatrač O' . Još jednom ističemo da je štap dvodimenzionalna tvorevina tj. svjetska tuba, O' ga u trenutku vidi kao presjek te tube i istovremenih događaja u sustavu O' .

Minkowski je tom slikom želio argumentirati da je za kontrakciju duljine potreban četverodimenzionalan prostor i da ona nije moguća u trodimenzionalnom prostoru. Zamislimo da svjetska tuba štapa ne postoji u četverodimenzionalnom prostoru već je to čista geometrijska konstrukcija. Reći da svjetska tuba ne postoji znači da je štap vidljiv i opipljiv samo u jednom trenutku, a ne za sva vremena ili u nekom ograničenom vremenu. Ono što bi tada postojalo je jednodimenzionalni štap predstavljen presjekom PP i oba promatrača bi mjerila jedan te isti objekt. Ne samo da bi tada bila nemoguća kontrakcija duljine već i relativnost simultanosti jer prostornost objekta nije ništa drugo već dio prostora kojeg on zauzima u određenom trenutku. Kako bi oba promatrača mjerila isti objekt PP oni bi dijelili istu klasu simultanih događaja što je u suprotnošću s relativnošću.

Realnost je takva da u različitim vremenima vidimo različite dijelove prostora vremena, a mi mislimo da promatramo jedan te isti objekt. Mi promatramo jedan te isti objekt iz četverodimenzionalnog prostora (na primjer tubu), ali u svom mentalnom sklopu vidimo samo njegove presjeke sa simultanim događajima. Različiti promatrači ne vide iste presjeke jer imaju različite simultane događaje.

1.1.5 Četverodimenzionalni prostor-vrijeme

Promatrač koji se giba po pravcu s konstantnom brzinom u stanju je odrediti koordinate t, x događaja duž pravca pomoću radarske metode sinkronizacije događaja. U namjeri da utvrdi koordinate događaja bilo gdje u svemiru, potrebno je, uz sat, imati i uređaj koji utvrđuje smjer svjetlosne zrake koju registrira. Uz pomoć prostornih polarnih koordinata i veze s kartezijevim koordinatama moguće je rekonstruirati kartezijeve koordinate događaja x, y, z . Međutim, tu postoji zahtjev na njegovo gibanje koje ne smije uključivati rotaciju.

Parametrizacija prostora Minkowskog. Parametrizacija prostora Minkowskog provodi se na sljedeći način. Neka je O neki početni položaj i t vrijeme koje pokazuje idealizirani sat, zvano *globalni vremenski parametar*. Idealizirani sat je sat s dva paralelna ogledala na udaljenosti L za koji je jedan otkucaj $dt = 2L/c$.

Promatrajmo frontu širenja svjetlosnog signala iz točke O . To je kružnica radijusa ct i ima jednadžbu

$$(ct)^2 = \mathbf{x}^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (5)$$

gdje je \mathbf{x} radijus vektor položaja na kružnici s koordinatama (x, y, z) u trenutku t . Ta kružnica predstavlja doseg širenja informacija brzinama ispod brzine svjetlosti.

Svi događaji prostora Minkowskog $P = (ct, \mathbf{x})$ koji zadovoljavaju gornju jednadžbu u četveodimenzionalnom prostoru (t, x, y, z) predstavljaju konus poznat pod nazivom *svjetlosni konus*. Svaki događaj P u prostoru Minkowskog ima vlastiti konus i on, za $t > 0$, predstavlja područje koje je moguće posjetiti iz događaja P brzinom gibanja manjom ili jednakom c (slika 8, str. 14).

U kartezijevom koordinatnom sustavu udaljenost bliskih točaka je dana kvadratnom formom (izrazom) $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ i ona ne ovisi o transformacijama kao što su rotacije, zrcaljenja i translacije i te transformacije predstavljaju grupu transformacija koje čuvaju tu kvadratnu formu. Po uzoru na to svojstvo euklidske metrike, Minkowski definira metriku u prostoru W preko kvadratne forme

$$ds^2 = (ct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (6)$$

Ta metrika, za razliku od euklidske, nije definitna jer postoje različiti događaji čija je udaljenost jednaka nuli — simultani događaji.

Princip konstantnosti brzine svjetlosti utjelovljen je u jednadžbi $ds^2 = 0$. To znači da za dva događaja $A = (ct, \mathbf{x})$ i $B = (ct', \mathbf{x}')$ čija je udaljenost Minkowskog jednaka nuli vrijedi $c^2(t - t') = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2$ što znači da su to simultani događaji i obratno. Slikovito rečeno, jedan događaj je na rubu svjetlosnog konusa drugog događaja.

Grupa transformacija koja čuva kvadratnu formu (6) naziva se grupa Lorentzovih transformacija, a Poincaré ju je okarakterizirao kao grupu rotacija u četverodimenzionalnom prostoru. Naziv Lorentzove transformacije dao je sâm Poincaré Lorentzu u čast.

Nakon svega što je dosad rečeno možemo definirati prostor Minkowskog.

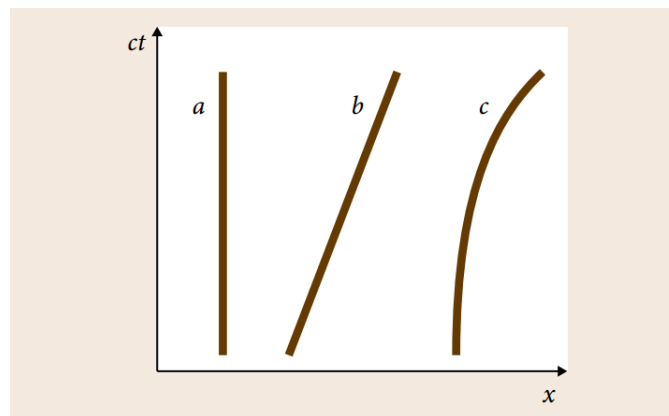
Prostor Minkowskog.

Skup svih događaja četvorki $A = (ct, \mathbf{x})$ s metrikom (6) nazivamo prostorom Minkowskog i označavamo ga s W .

Razlika dva događaja je četverovektor $\mathbf{a} = (c\delta t, \delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ čije su komponente razlike komponenata tih događaja.

Gibanja u prostoru-vremenu nemoguće je prikazati na dvodimenzionalnoj slici čak i uz puno mašte. Iz tog razloga, često puta ćemo prostoru uskratiti jednu dimenziju ili ćemo ga svesti na jednodimenzionalni prostor i koordinate događaja označavati s $A = (ct, x)$. Na slici 7 prikazana su tri gibanja — tri *svjetske linije*: (1) linija a je svjetska linija čestice koja miruje u prostoru. Ona doživljava samo promjenu vremenske komponente i geometrija njenog 'mirovanja' opisana je vertikalnim pravcem. (2) Svjetska linija b je linija čestice

Slika 7: Svjetske linije kako ih vidi Minkowski. Linija a predstavlja česticu koja miruje, linija (b) predstavlja česticu u uniformnom gibanju, a linija c predstavlja ubrzanu česticu.



koja se giba konstantnom brzinom, a linija c je linija ubrzanu čestice. Razlika između neoklasičnog prostora vremena i relativističkog je ta što ovaj drugi nema slojevitost strukturu istovremenih događaja.

Da je vremenska os izabrana tako da se podudara sa svjetskom linijom b , tj. da referentni sustav bude sustav u kojem ta čestica miruje, onda bi svjetska linija čestice a bila pod nekim nagibom. To znači da za svaku česticu koja ima pravac za svjetsku liniju možemo odabrati sustav u kojem ona miruje. Inspiriran ovom činjenicom Minkowski je postulirao da se, u specijalnoj teoriji relativnosti, slobodna materijalna točka giba po svjetskoj liniji.

Udaljenost između dva događaja. U trodimenzionalnom euklidskom prostoru udaljenost između dvije točke ujedno je i duljina najkraćeg puta koji ih povezuje, a to je segment. To je varijacijska karakterizacija udaljenosti i može se poopćiti na zakrivljene plohe i prostore u kojima nema globalno definirane udaljenosti među točkama. Takva najkraća krivulja naziva se *geodetska linija*, a primjer geodetske linije na sferi je kraći luk velike kružnice koja prolazi zadanim točkama, a centar joj je u središtu sfere. Možemo li učiniti nešto slično u prostoru Minkowskog?

Da bi mogli definirati udaljenost između dva događaja oni bi trebali biti povezani svjetском linijom, tj. treba biti moguće organizirati putovanje od jednog do drugog, ali tako da je brzina putovanja u svakom trenutku manja od brzine svjetlosti.

Relativistički skalarni produkt između dva četveroektora $\mathbf{a} = (ct, x)$ i $\mathbf{b} = (c\tau, y)$ definira se formulom

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c^2 t \tau - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \quad (7)$$

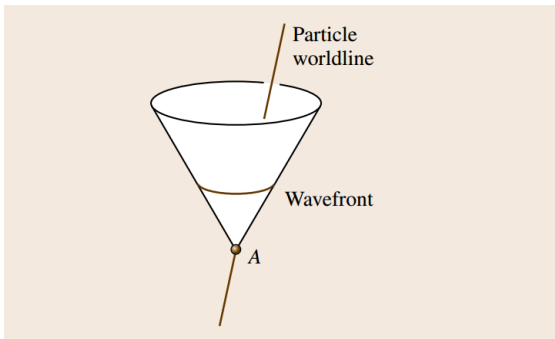
i taj skalarni produkt generira kvazimetriku (6).

Za razliku od euklidskog skalarnog produkta u kojem je uvijek $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ ako je $\mathbf{a} \neq 0$, ovdje to nije slučaj. Relativistički skalarni produkt nije definitan. Kao što je već rečeno dva događaja za koja je četveroektor razlike \mathbf{a} produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ su pozicionirana tako da je jedan događaj na rubu svjetlosnog konusa drugog.

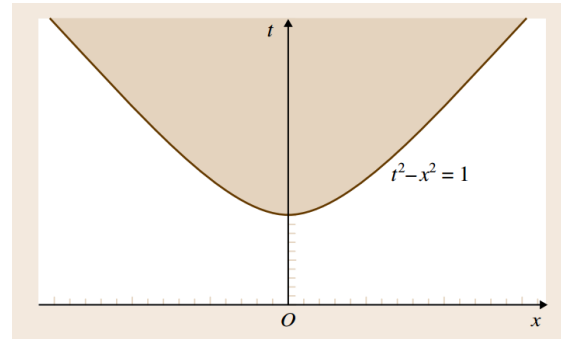
Na primjer, ako je $A \in W$ neki događaj i $A_t = A + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} = (ct, x)$ neki drugi događaj za koji je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ onda svjetlosna zraka odaslana od (prostornog) mjesta događaja A u smjeru vektora x nakon vremena t stiže do mjesta događaja A_t .

Gledano u prostoru Minkowskog W , svi događaji A_t , $t \in \mathbb{R}$ čine konus s vrhom u A , čija je os paralelna t -osi. Pozitivni konus $C_+ := \{A_t \mid t \geq 0\}$ je *svjetlosni konus budućnosti* događaja A (slika 8) s tim što je, radi jednostavnosti prikaza, prostor reciran na dvije dimenzije. To

Slika 8: Konus budućnosti.



Slika 9: Linija kašnjenja.

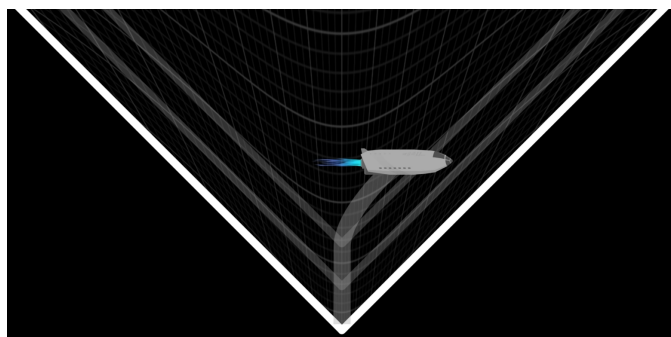


su svi događaji do kojih informacija može stići iz točke A šireći se brzinom manjom od brzine svjetlosti. Ostatak prostora je nedostupan odnosno nevidljiv za događaj A . Svjetska linija događaja A je uvijek unutar svjetlosnog konusa. Negativni konus $C_- := \{A_t \mid t \leq 0\}$ je *konus prošlosti* za događaj.

Linija na slici 9 prikazuje sve događaje koji kasne nakon događaja O za jednu vremensku jedinicu. Sam prostor reduciran je na jednu dimenziju. Ta linija je hiperbola čija je jednačba $t^2 - x^2 = 1$ i dio prostora Minkowskog iznad nje $\{(t, x) \mid t^2 - x^2 \geq 1\}$. To su svi događaji koji kasne za 1 vremensku jedinicu (i više) od događaja O . Asimptote hiperbole su simetrale I i III kvadranta i one određuju granicu svjetlosnog konusa.

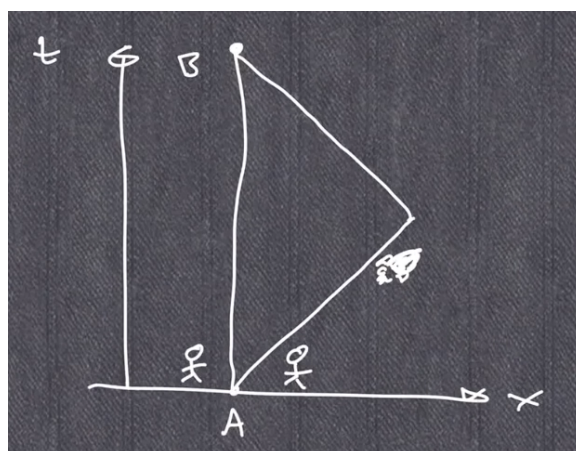
Na slicu 10 prikazan je svjetlosni konus i tijelo koje ubrzava. Njegova putanja nije pravac, nije više svjetska linija, već je zakrivljena u prostoru Minkovskog (u odnosu na svjetsku liniju), ali se nalazi unutar svjetlosnog konusa u svakom trenutku.

Slika 10: Svjetlosni konus



Udaljenost događaja. Račun udaljenosti među događajima provest ćemo prvo na specijalnom slučaju, a zatim poopćiti. Za početak, neka je događaj B unutar svjetlosnog konusa događaja A ali tako da A miruje, a B je na svjetskoj liniji od A kao što je to prikazano na slici 11.

Slika 11: Blizanci



Slika prikazuje situaciju u kojoj jedan od dva blizanca kreće na putovanje brзом raketom, a drugi ostaje kod kuće. Na povratku s putovanja, blizanac koji je kod ostao kuće utvrđuje da je blizanac putnik mlađi jer je njegov sat sporije otkucavao vrijeme. Kako to objasniti u kontekstu metrike u prostoru Minkowskog?

Jedan od mogućih puteva koji spaja A i B je segment dio svjetske linie, **pitanje je je li on 'najkraći' i po kojem kriteriju?** Ako je $\vec{a} = (c\tau, x, y, z)$ četverovektor \overrightarrow{AB} onda je kvadrat njegove pseudonorme u prostoru Minkowskog definiran izrazom

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = c^2\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (8)$$

S druge strane, $A = (ct_A, x, y, z)$ i $B = (ct_B, x, y, z)$, a u tom slučaju izraz u formuli (8) ima vrijednost $\vec{a} \cdot \vec{a} = c^2\tau^2$. Svaki drugi put koji povezuje događaje A i B u prostoru Minkowskog je takav da će imati i prostornu komponentu različitu od (x, y, z) što smanjuje vrijednost izraza (8). To sugerira sljedeći *princip maksimalnog vremena*:

Princip maksimalnog vremena.

Od svih puteva koji povezuju događaj A i događaj B optimalan je onaj za koji je proteklo vrijeme na tom putu maksimalno.

Vrijeme o kojem se ovdje govori je vrijeme sata koji putuje zajedno s promatračem na tom putu i to nije univerzalno koordinatno vrijeme prostora Minkowskog.

Kvaliteta ovog principa je ta što ne ovisi o izboru koordinatnog sustava u prostoru-vremenu i ne ovisi o putanji (stazi) gibanja. Time posjeduje mogućnost proširenja na prostor u kojem se svjetlost ne giba po pravcu u euklidskom smislu.

Pitanje koje se sad postavlja je može li se *princip maksimalnog vremena* proširiti na svaka dva događaja. Tim pitanjem ulazimo u strukturu dozvoljenih transformacija među sustavima u relativnom gibanju.

Definicija 1.2 (Lorentzove transformacije). Dozvoljene transformacije između dva sustava u relativnom gibanju su sve transformacije koje čuvaju kvadratnu formu

$$ds^2 := c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (9)$$

Poincaré je bio taj koji je transformacije s tim svojstvom nazvao Lorentzovim imenom, njemu u čast i pokazao da one čine grupu, a mogu se shvatiti kao rotacije oko ishodišta u prostoru-vremenu (u to vrijeme prostor Minkowskog, kao pojam, nije bio poznat.). Formula (10) opisuje Lorentzove transformacije iz sustava S' koji se giba u smjeru x -osi sustava S brzinom v čija su se ishodišta podudarala u trenutku $t = t' = 0$:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (10)$$

gdje je $\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Više o Lorentzovim transformacijama i povijesnim zanimljivostima oko njih ispričano je u odjeljku 1.2.4 na str. 24 pod nazivom [Lorentzove transformacije](#).

Princip maksimalnog vremena sad možemo formulirati za bilo koja dva događaja A i B unutar svjetlosnog konusa jednog od ta dva događaja. Dovoljno je naći Lorentzovu transformaciju koja svjetsku liniju ishodišta O' sustav S' preslikava u svjetsku liniju promatrača u sustavu S . U novom koordinatnom sustavu odnos između događaja A i B je kao na slici 11. Zbog invarijantnosti kvadratne forme (9) princip maksimuma je dobro formuliran.

Paradoks blizanaca je paradoks s gledišta klasične mehanike, ali ne u specijalnoj teoriji relativnosti. Na povratku s putovanja, blizanac putnik je mlađi jer je njegov sat sporije otkucavao vrijeme, a to je zato jer je blizanac putnik prevalio duži put od A do B koji nije optimalan (slika 11). Dakle, proteklo vrijeme putovanja je kraće od vremena čekanja. Napomenimo da nema simetrije među blizancima jer blizanac putnik doživljava i ubrzanje,

ali to nije jedini razlog asimetrije. Asimetrija je u geometriji jednog i drugog puta u prostoru-vremenu.

1.2 Uloga svjetlosti u razvoju teorije.

Nije bitno postoji li eter; to je posao metafizičara; ono što je bitno je to da ta pretpostavka objašnjava pojavu. Na kraju krajeva, imamo li bilo kakav drugi razlog da vjerujemo u egzistenciju materijalnih objekata? [...] zakoni optike i jednadžbe koje ih analitički opisuju ostat će valjane, bar kao prva aproksimacija.

Henri Poincaré

Svjetlost nije objekt, nema ni masu niti volumen. Uobičajeno je reći da je to pojava jer ju percipiramo kad se pojavi ili nestane. Možemo kontrolirati tu pojavu aktiviranjem i gašenjem izvora svjetlosti. Ona se širi u svim smjerovima ako ne postoji zapreka koja bi joj spriječila širenje. Omogućava nam da vidimo objekte koji odbijaju svjetlost. Smatramo da se svjetlost širi pravocrtno, osim ako ne mijenja medij u kojem se širi, jer nam tako govori svakodnevno iskustvo. Mislim da sam nabrojao sve bitne karakteristike svjetlosti koje nama omogućavaju i olakšavaju svakodnevni život bez ulaženja u sâmú prirodu svjetlosti.

Newton je smatrao da je svjetlost snop elastičnih korpuskula što je prirodna pretpostavka za njegov mehanički pogled na svijet. Takva priroda svjetlosti lako objašnjava refleksiju ali ne i ostale fenomene: ogib (difrakciju), interferenciju, polarizaciju... Valna teorija svjetlosti se probijala u sjeni korpuskularne teorije sve do početka 19. st. kad je Thomas Young zaključio da su pruge interferencije posljedica superpozicije svjetlosnih valova od dva izvora. Trebalo je čekati još nekih pedesetak godina do potpunog prihvaćanja valne teorije. Problem je u bio u tome što složen matematički aparat koji ona zahtijeva nije bio u potpunosti razvijen u njenim počecima.

Valna teorija zapravo govori o zakonima širenja svjetlosne informacije, a ne o njenoj prirodi. Pitanje je također što smatramo pod prirodom svjetlosti? Ako nas zanima način na koji svjetlost pobuđuje naše oko i mozak onda je model širenja svjetlosnog poremećaja nužan za objašnjenje naše vizualne percepcije. Ima li još nešto iza tog?

Danas je uvriježeno mišljenje da je svjetlost elektromagnetski val. To bi značilo da okomito na smjer širenja svjetlosti titaju električno i magnetsko polje koja su u fazi. Zašto onda magnetska igla ne reagira ako ju osvjetlimo? Tko je prvi došao na ideju da je svjetlost elektromagnetski val i na temelju čega? Po čemu je svjetlost važna u relativnosti? Zašto je eter izbačen iz teorije kao nositelj svjetlosnih i elektromagnetskih poremećaja? Osim na pitanja koja su povijesnog karaktera, odgovora zapravo i nema, a polemika u znanstvenoj zajednici traje i dan danas.

Brzina širenja elektromagnetskih valova jednaka je $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ i

bliska je brzini svjetlosti $c = 2.99792458 \cdot 10^8 m/s$. Konstante μ_0 i ϵ_0 su permeabilnost (propusnost) i permitivnost (sposobnost akumuliranja energije iz električnog polja) vakuma koje Maxwell nije znao izračunati. Jednadžba $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ nije Maxwellova², ona slijedi iz eksperimenta koji su proveli Weber³ i Kohlrausch (1855) mjereći omjer elektrostatskih i elektrodinamičkih jedinica. Dvije godine kasnije (1857) Kohlrausch je zaključio da električni signal u vodljivoj žici⁴ putuje brzinom svjetlosti, a do istog zaključka došao je i Kirchoff, također 1857.

Hertz (1887) je proveo niz eksperimenata u kojima je želio ispitati valjanost Maxwellove teorije koja u to vrijeme nije imala eksperimentalno pokriće, a posebno njegovu izjavu da bi svjetlost mogla biti elektromagnetski val. Prvotni njegov stav bio je da tvrdnja nema pokrića. Njegovi eksperimenti su pokazali da elektromagnetski valovi, bez obzira na valnu duljinu, pokazuju "svjetlosno" ponašanje: refleksiju, refrakciju (lom), difrakciju (ogib) i polarizaciju. Također je izmjerio i njihovu brzinu 320.000 km/s koja je bila usporediva s brzinom svjetlosti.

Ova otrića su bila mnogima potvrda da je i svjetlost elektromagnetski val, a sâm Maxwell (1865) je to i postulirao. Evo Maxwellovih riječi

Teško možemo izbjeći zaključak da je svjetlost transverzalni val istog medija (eter⁵) koji je uzrok električnih i magnetskih pojava.

Maxwellov zaključak da je svjetlost elektromagnetski val je ishitren i do dan danas nema drugih direktnog dokaza da je to tako. Moguća i hipoteza da su svjetlost i elektromagnetski val manifestacija istog izvora. Jedino nije jasno čija je ideja da je svjetlost elektromagnetski val, a još je manje razumljivo da fizika to uporno ponavlja.

1.2.1 Brzina svjetlosti.

Ako svjetlost nije objekt što bi trebalo značiti "brzina svjetlosti"? Bez obzira je li svjetlost korpuskularna pojava (Newton) ili valna pojava (Huygens, Fresnel) brzina bi trebala imati dimenziju m/s , a uređaj za mjerenje bi trebao mjeriti neku udaljenost i vrijeme vezano uz tu udaljenost. O brzini svjetlosti navodno je već govorio Empedoklo koji je tvrdio da svjetlosti treba izvjesno vrijeme da dođe od Sunca do Zemlje ali je Aristotel osporavao njegovu tvrdnju. To isto su tvrdili Avicena i Al-Bīrūnī u 11 st. ali nije zapisano na temelju čega se zasnivaju njihove tvrdnje. Al-Bīrūnī je bio vrstan poznavatelj indijske povijesti i kulture i moguće je da od indijaca čuo za nešto takvo. (v. niže u tekstu paragraf [Brzina svjetlosti u drevnim indijskim spisima](#)).

²Maxwellove originalne jednadžbe, njih 20, bile su skalarne i nerazumljive njegovim suvremenici. Današnju njihovu formulaciju dao je Heaviside (1889), a razvio je i prikladan matematički aparat kojeg Maxwell nije imao. Maxwellove jednadžbe su zapravo Heavisideove, a sâm Heaviside je predložio da ostanu Maxwellove ako Maxwell pristaje na izmjene.

³Weber je ujedinio Amperovu silu među strujama i Coulombovu silu među statičkim nabojima u jednu formulu u kojoj se pojavljuje i brzina elektromagnetskih valova koja je iznosila $c\sqrt{2}$ ali se kasnijim kozmetičkim zahvatom u formuli taj $\sqrt{2}$ izgubio. Iz Weberove formule, kako je pokazao Helmholtz, ne slijedi zakon održanja energije pa je Maxwellova kompletnija teorija prevladala.

⁴Zapravo žica modulira elektromagnetsko polje koje prenosi energiji.

⁵op. autora

Prvi zapisani opis mjerenja brzine svjetlosti nalazimo kod Galilea koji je ustanovio da "mora biti jako velika kad ju ne može izmjeriti". On i njegov asistent smjestili su dva fenjera na vrhove udaljenih brežuljaka, a zadatak asistenta bio je da otvori zaslon fenjera u trenutku kad bi opazio Galilejevo svjetlo. Galilej je mjerio vremensku razliku između odašiljanja i primitka signala, ali nije bio u stanju izmjeriti tu razliku pa je zaključio da je brzina svjetlosti jako velika.

Galileo nije imao dovoljno precizne instrumente niti tehnologiju da ih napravi ali njegova ideja je zanimljiva i treba ju doraditi. Fizeau (1849) je zraku svjetlosti od izvora propuštao kroz nazubljeni kotač koji je rotirao velikom brzinom. Umjesto asistenta postavio je ogledalo koje je reflektiralo zraku natrag kroz procjep između dva zuba. Zraka je prolazila kroz isti procjep samo ako je kutna brzina kotača bila takva da joj je to uspijevalo. Promjenom kutne brzine kotača moglo se postići da reflektirano svjetlo prolazi ili ne kroz isti procjep. Procedura mjerenja bila je takva da je brzina kotača povećavana do trenutka kad je reflektirana zraka zaustavljena, a kutna brzina je očitana. Iz dimenzije procjeka između zubaca i kutne brzine očitana je vremenski interval. Izračunata brzina svjetlosti je prosjek od više mjerenja i iznosila je $315\,300\text{ (km/s)}$. Udaljenost zrcala bila je 8633 (m) od uređaja, a zrcalo je promatrao kroz optički teleskop⁶.

Mehanički i optički dio Fizeauovog uređaja su bili vrhunac tadašnje tehnologije, a njegovi ostaci nalaze se i danas u muzeju u Parizu. Kopija uređaja nalazi se u arhivi fizikalnog laboratorija na *Ecole polytechnique*, a rezultati eksperimenta nisu nikad objavljeni. Ostali su samo nacrti i planovi eksperimenta, a rezultati su zapisani u formi rukopisa.

Nedostatak Fizeauovog mjerenja je bio taj što eksperimentator (čovjek) sudjeluje u eksperimentu i kontrolira brzinu kotača dok se ne postigne željeni efekt. Foucault (1862) je ponovio mjerenje s poboljšanim uređajem u kojeg je postavio rotirajuće ogledalo koje je zamijenilo čovjeka i objavio rezultat: $298\,000\text{ (km/s)}$. Godine 1876. Alfred Cornu je koristeći nešto poboljšani Fizeauov uređaj izmjerio brzinu svjetlosti od $300\,040\text{ (km/s)}$.

Brzina svjetlosti kao takva u Fizeauovo vrijeme nije bila aktualna i nije sasvim jasno koji je bio njegov motiv da ju mjeri, tim više što rezultate nije objavljivao niti je kasnije ponovio eksperiment nakon što je uočio niz nedostataka i zapisao moguća poboljšanja. Moguće je da je jedan od razloga njegovog poduhvata bio da se izmjeri brzina svjetlosti neovisno od astronomskih promatranja⁷ jer bi se, poznavajem te brzine, udaljenost Zemlje od Sunca, a i neke druge astronomske dimenzije, mogle preciznije računati. Frercks (2003) smatra da je eksperiment napravljen u svrhu uspoređivanja brzine svjetlosti u vakumu i optičkom sredstvu kako be se odlučilo između valne teorije svjetlosti i *teorije emanacije*⁸ koja je neka relativistička izvedenica korpuskuralne teorije svjetlosti.

Brzina svjetlosti u drevnim indijskim spisima. Kak (2011) napominje da se brzina

⁶Ovo je pojednostavljena shema eksperimenta, detalji se mogu naći u Frercks (2003).

⁷Prije Fizeaua, brzinu svjetlosti mjerili su danski astronom Ole Römer (1670) i engleski fizičar Bradley (1728). Römer je promatranjem eklipse Jupiterovog satelita Io zaključio da je brzina svjetlosti konstantna i iznosi $200\,000\text{ km/s}$, a Bradley je, računajući promjenu prividnog položaja zvijezda zbog Zemljinog gibanja oko Sunca, dobio broj $301\,000\text{ km/s}$.

⁸Emission theory.

svjetlosti spominje u komentarima Ṛgveda od srednjovjekovnog učenjaka Sāyana (1315–1387), premijera na dvoru *Vijayanagarskog carstva*. Po njemu, svjetlost prelazi 2202 *yojana* u vremenu od pola *nimesha*. Nimesha je vrijeme koje je dobro testirano u indijskim astronomskim tekstovima i iznosi 16/75 sekundi. Mjera duljine *yojana* se različito definira kod raznih autora. Prema *Arthaśāstra*, poznatom tekstu o ekonomiji i državnom uređenju iz 3. st. prije Krista, 1 *yojana* iznosi 8000 *dhanusa*, gdje je 1 *dhanus* jednak 1.83 *m*. Prema mom računu brzina svjetlosti iznosi 3.022245×10^8 m/s.

Malo je vjerojatno da su u srednjovjekovnoj Indiji mjerili brzinu svjetlosti i nema dokaza da su oni to zaista i činili. Indijski astronomi računali su s podatkom od 150.72×10^6 km za udaljenost između Zemlje i Sunca. Moguće je, čak i bez korištenja moćnih teleskopa kojih nije bilo u to vrijeme, procijeniti udaljenost između Zemlje i Sunca mjerenjem trajanja mjesečevih i sunčevih pomrčina, ali nema dokaza da su takvi računi provedeni.

Mjerenja brzine svjetlosti u povijesti. Evo nekih rezultata mjerenja brzine svjetlosti iz povijesti koje ne odstupaju mnogo od danas uvažene:

| | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| Ṛgveda | $\approx 3.022245 \times 10^8$ m/s. |
| Römer (1670) | $\approx 2 \times 10^8$ m/s. |
| Bradley (1728) | $\approx 3.01 \times 10^8$ m/s. |
| Fizeau (1849) | $\approx 3.153 \times 10^8$ m/s |
| Foucault (1862) | $\approx 2.98 \times 10^8$ m/s |
| Hertz ⁹ (1887) | $\approx 3.20 \times 10^8$ m/s |
| Michelson (1879) | $\approx 2.99944 \times 10^8$ m/s |
| Michelson (1926) | $\approx 2.99796 \times 10^8$ m/s |
| GCWM ¹⁰ (1983) | $\approx 2.99792458 \times 10^8$ m/s |

1.2.2 Valna jednadžba.

Zamislimo perturbaciju neke skalarne fizikalne veličine koja je lokalizirana u trenutku $t = 0$ kao na slici 12 (lijevi val). Takav opis poremećaja je prilično općenit, a to što je lokaliziran ne umanjuje vrijednost našeg razmatranja. Štoviše, neki poremećaji koji se nama čine trenutačnim postepeno rastu, doživljavaju svoj maksimum i zatim se guše. Funkciju koja opisuje početni poremećaj označimo s $f(x)$. Funkcija $\psi(x, t) := f(x - tv)$, gdje je t vrijeme, a v brzina, predstavlja jednako moduliran poremećaj ali translatican udesno za tv . Kako t raste poremećaj putuje u smjeru x -osi brzinom v .

⁹Hertz je mjerio brzinu elektromagnetskih valova u laboratoriju.

¹⁰General Conference of Weights And Measures (1983). *The British National Physical Laboratory* je izmjerio brzinu svjetlosti 299792.4590 ± 0.0008 km/s, a *US National Bureau of Standards* 299792.4574 ± 0.0011 km/s

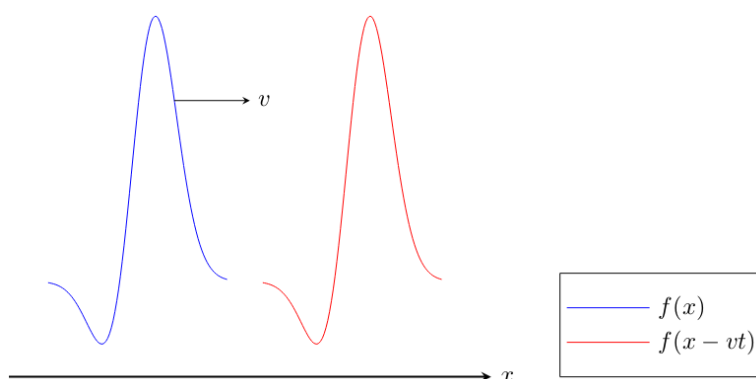
Nije teško vidjeti da funkcija ψ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (poznatu kao *valna jednadžba*)

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (11)$$

što se vidi iz sljedećeg računa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - tv), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - tv).$$

Slika 12: Jednodimenzionalni val koji se giba u pozitivnom smjeru x -osi brzinom v .



Ako graf funkcije $\psi(x, 0)$ zamislimo kao deformiranu napetu elastičnu nit onda je graf od $\psi(x, t)$ u trenutak $t \neq 0$ deformacija niti koja je doživjela translaciju u smjeru x -osi. Otklon točke x u trenutku t iznosi $\psi(x, t)$ i dešava se u smjeru okomitom na x -os koja je smjer širenja poremećaja.

Krajem 17. stoljeća znanstvenici su se zapleli u raspravi o prirodi svjetlosti. Newton je bio zagovornik korpuskularne teorije svjetlosti, dok je Huygens vjerovao da je svjetlost valne prirode u kojoj čestice medija (eter) vibriraju okomito na smjer širenja vala. Svojom teorijom, Huygens je uspješno objasnio refleksiju i lom svjetlosti ali ne i difrakciju. Matematički model valne prirode svjetlosti dovršio je Fresnel (1815) kojom je objašnjena i difrakcija i interferencija (Youngov eksperiment s dvostrukim prorezom). Valna teorija usješno objašnjava i polarizaciju svjetlosti koja je prvi puta zamijećena 1669. god. od strane danskog fizičara Erasmusa Bartholinusa. Difrakcija, interferencija i polarizacija bili su preteški izazov za Newtonovu korpuskularnu teoriju koja je definitivno napuštena.

Krajem 19. stoljeća svjetlost je shvaćana kao elektromagnetski val, tj. perturbacije elektromagnetskog polja koje se šire u *eteru*¹¹. Elektromagnetski val je par od dva vala: *električnog*

¹¹Eter nitko nije ni vidio niti postoji eksperiment koji bi potvrdio ili negirao njegovo postojanje. On je apstrakcija fizičkih karakteristika prostora koja omogućavaju zbivanja u tom prostoru. Eter se spominje još u vedskim zapisima pod nazivom *ākāśa*. Zanimljivo je da je ta riječ izvedenica iz korijena *kāś* što znači 'biti'. U filozofiji *Vedante* akaša je "fluid koji ispunjava svemir".

Ironija je da kvantna fizika jasno daje do znanja da je struktura vakuuma vrlo komplicirana. Ako je riječ "eter" zabranjena, onda možemo govoriti o kompliciranom vakuumu i nitko se neće osjećati uznemireno.

i *magnetnog* poremećaja koji osciliraju okomito na smjer gibanja poremećaja i međusobno su okomiti jedan na drugi (Maxwell, 1865). Brzina c tih perturbacija, koja se pojavljuje u Maxwellovim jednadžbama, je brzina kojom se elektromagnetski val širi u odnosu na eter. U skladu s Galilejevim pravilom slaganja brzina koje je još tada bilo na snazi, brzina elektromagnetskih valova u laboratoriju, vezanom uz Zemlju koja se giba oko Sunca, trebala bi biti različita od c . Ta razlika bi onda bila brzina gibanja laboratorija (Zemlje) u odnosu na eter. Međutim, gibanje Zemlje u odnosu na eter nije nikad evidentirano (v. [Michelsonov interferometar](#) na str. 23).

1.2.3 Nastajanje teorije relativnosti.

Nekoliko je imena zaslužnih za specijalnu teoriju relativnosti: Poincaré, Lorentz, Einstein i Minkowski, da spomenem najznačajnije. Einstein je postao slavan jer je formulirao i objavio rezultate koji su bili poznati tadašnjoj akademskoj zajednici. Imao je dobar pregled tadašnjih zbivanja jer je radio u uredu za patente. Novosti koje specijalna teorija relativnosti donosi, a odnose na prostor i vrijeme, je *kontrakcija duljine, dilatacija vremena i relativnost simultanosti*.

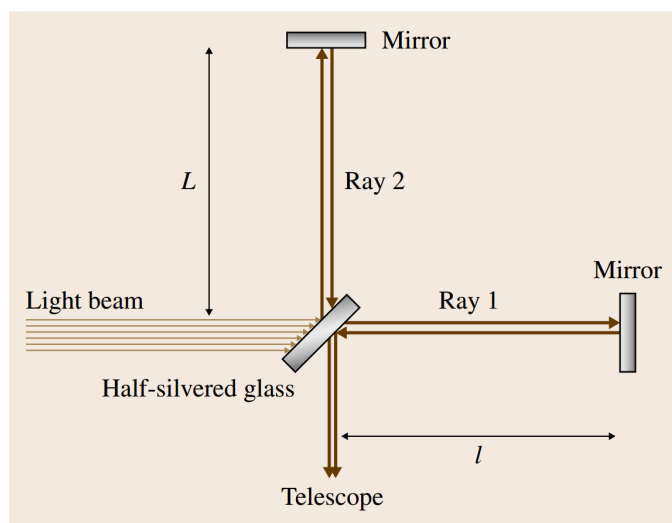
Ovdje ne mislim izlagati matematičke zavrzlake oko specijalne teorije relativnosti. Ono što je zanimljivo, bar meni, je splet okolnosti i što je sve bilo poznato te 1905. godine kad je Einstein objavio svoj članak. Nećemo ići predaleko u prošlost od te 1905. godine. Vratimo se u 1881. g. na interferometar kojim je Michelson želio izmjeriti relativnu brzinu Zemlje u odnosu na eter, što se zapravo smatralo Zemljinom apsolutnom brzinom. U to vrijeme već je bila objavljena Maxwellova teorija elektromagnetskih valova (Maxwell, 1873) čija je brzina bila jednaka brzini svjetlosti. To je navelo Maxwela da zaključi kako je svjetlost elektromagnetska pojava, a kako trasverzalni valovi zahtijevaju sredstvo u kojem se šire, smatralo se da i svjetlost i elektromagnetski val zahtijevaju isto sredstvo: *eter*.

Interferometar je bio konstruiran tako da je ulazna svjetlosna zraka prolazila kroz centralno polupropusno zrcalo (slika 13), a dio zrake se zrcalio okomito na smjer upada. Nakon zrcaljenja, obje zrake se susreću u teleskopu, a zbog pomaka u fazi doživljenog zbog razlike u pređenom putu zapažene su pruge interferencije. Naravno, razlika u pređenom putu $2(l - L)$ treba biti usporediva s valnom duljinom svjetlosti. Uz malo matematike trebao bi se izračunati pomak u fazi kao funkcija brzine Zemlje, brzine svjetlosti¹² i udaljenosti l i L .

Ako Zemlja miruje u odnosu na eter, rotacijom interferometra oko vertikalne osi, pruge interferencije se ne bi smjele mijenjati jer obje zrake imaju istu brzinu c neovisno u kutu nagiba interfeometra. Ako se Zemlja giba u odnosu na eter onda bi blaga rotacija interfeometra oko vertikalne osi trebala utjecati na pruge jer se time mijenjaju brzine horizontalne i vertikalne zrake prema klasičnoj formuli za slaganje brzina (brzine svjetlosti c i brzine Zemlje V). Promjena interferentnog uzorka trebala bi dakle dokazati Zemljino gibanje u odnosu na eter.

¹²Ovdje treba biti oprezan jer u eksperimentu svjetlost prolaz dvostruki put u suprotnim smjerovima i ono što se može registrirati je dvosmjerna brzina svjetlosti. Prema tome, Einsteinov postulat o konstantnosti brzine svjetlosti u jednom smjeru je previše strog za ovaj eksperiment.

Slika 13: Michelsonov interferometar



Rezultat eksperimenta je bio taj da se pruge interferencije nisu mijenjale kod rotacije interferometra. Zaključak je bio da se gibanje Zemlje u odnosu na eter nije moglo ustanoviti. Šest godina kasnije, 1897. godine, Michelson i Morley usavršili su interferometar s istim negativnim rezultatom. Michelson je bio uvjeren da negativni rezultat dolazi zbog toga što Zemlja lijepi sloj etera za svoju površinu i stoga relativno gibanje Zemlje u odnosu na eter ne postoji. Još nekoliko neuspjelih pokušaja od strane drugih fizičara završilo je istim rezultatom. Nitko nije pomislio da klasični zakon slaganja brzina, u slučaju brzine svjetlosti, možda nije korektan.

Lorentzovo (1892) i FitzGeraldovo (1888) mišljenje je bilo da je Michelson–Morleyev negativni rezultat posljedica skraćivanja duljine tijela u gibanju zbog interakcije s eterom. Kad svjetlo prolazi put u interferometru koji je u smjeru gibanja Zemlje, taj se put skraćuje, što se ne događa kad se svjetlost u interferometru giba okomito na smjer gibanja Zemlje. Uvažavajući takvu kontrakciju, elementaran izračun pokazuje da je pomak u fazi jednak nuli što znači da se interferentna slika ne mijenja. Detalji izračuna mogu se naći u članku Dieks (2014b).

Lorentzov prijedlog ne nosi u sebi ideju napuštanja invarijantnosti duljine objekta u gibanju. Spomenuta kontrakcija je dinamički efekt i posljedica je interakcije između materijalnih supstanci, tijela u gibanju i etera. Kontrakcija duljine, bez obzira kakva je njena priroda, nije u skladu s klasičnom mehanikom i neovisnošću duljine objekta o brzini gibanja referentnog sustava. Nešto je trebalo promijeniti u postavkama same teorije.

Godine 1905 Einstein postulira da . . .

Osnovni postulat OTR.

isti zakoni elektrodinamike i optike vrijede u svim inercijalnim referentnim sustavima u kojima vrijede i zakoni mehanike.

Na taj način Maxwellove jednadžbe vrijede ne samo u privilegiranom sustavu nego u

svakom inercijalnom sustavu.

Prva posljedica tog postulata je da je

brzina svjetlosti c je konstantna u svim inercijalnim sustavima.

Što se Michelson–Morleyevog eksperimenta tiče to znači da, bar za brzinu svjetlosti, ne vrijedi formula za slaganje brzina u kojoj bi rezultatna brzina bila veća od c . Ako i dalje vrijedi Lorentzova kontrakcija duljine to bi značilo, zbog negativnog rezultata u Michelson–Morleyevom eksperimentu, nužno mora dolaziti do dilatacije vremena. U tom slučaju kontrahirani put svjetlost prolazi u duljem vremenskom intervalu kako bi zadržala svoju brzinu. Zanimljiva je informacija da Einstein, po njegovim vlastitim riječima, kad je pisao svoj članak 1905. nije znao za Michelson–Morleyev eksperiment.

Druga posljedica je ta da je Einstein svojim postulatom omogućio utvrđivanje gibanja inercijalnog sustava pomoću elektromagnetskih pojava. Jednako tako, zaključuje Einstein, elektromagnetski val nije materijalan i ne treba eter za svoje širenje. Eter je uklonjen iz fizike¹³, a konstantnost brzine svjetlosti u svim relativnim sustavima zahtijeva nove transformacije za slaganje brzina, različitih od Galilejevih, jer klasična invarijantnost vremenskog i prostornog intervala više ne vrijedi.

Zanimljiva reinterpetacija Michelson–Morleyevog eksperimenta prisutna je u novije vrijeme koja nudi zaključak da je Zemlja centar svemira jer se ne giba. Autor tog teksta se nije pitao bi li MM eksperiment dao isti rezultat i na Marsu i još nekim planetima. Najvjerovatnije da bi rezultat bio isti što bi značilo da nema gibanja uopće, ono što je tvrdio Zenon još u doba starogrčke civilizacije.

1.2.4 Lorentzove transformacije.

Lorentzove transformacije su nezavisno jedan od drugog izveli Lorentz (1889) i Larmor (1900) kao linearne transformacije koje Maxwellove jednadžbe ostavljaju invarijantnima, a time i operator na lijevoj strani valne jednadžbe (11). Poincaré je u svom pismu Lorentzu (1905) ukazao na njihova grupna svojstva i nazvao ih, njemu u čast, Lorentzovim transformacijama. Poincaré je također pokazao da se Lorentzove transformacije mogu shvatiti kao rotacije oko ishodišta u četverodimenzionalnom prostoru-vremenu koje čuvaju sumu

¹³Suprotno onome što Einstein tvrdi, eter nije izbačen iz fizike u njegovom radu 1905. jer je on koristio jednadžbe elektromagnetskog polja, koje je koristio Hertz, a koje su koristile eter (Pechenkov, 2006). Eter je lako izbaciti iz opisa eksperimentalne činjenice, ali poteškoće vezane uz objašnjenje kako se svjetlost širi, odnosno što je foton i dalje ostaju.

kvadrata¹⁴

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 + (it')^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (it)^2, \quad (12)$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Sam Lorentz je izjavio 1914. da u je njegovom radu bilo nekoliko kandidata za transformaciju, ali nije naznačio koja je transformacija najprikladnija. To su učinili Poincaré, a zatim Einstein i Minkowski. Nadalje, Poincaré pokazuje da su Lorentzove transformacije podgrupa jedne veće grupe, danas zvane Poincaréovim imenom.

U samom početku, Poincaréov četverodimenzionalni prostor-vrijeme nije privukao previše pažnje. Nedavno otkriveni Vergneovi¹⁵ zapisi Poincaréovih predavanja objelodanjuju da je Poincaré učio svoje studente o Lorentzovoj grupi i kako konstruirati Lorentz invarijante koristeći realne koordinate. Te je rezultate objavio 1906. godine nakon što je Einstein već objavio svoju teoriju relativnosti. Ono što je Einstein potpuno zanemario u svojim razmatranjima je gravitacija.

Poincaré je, što se širenja utjecaja gravitacije tiče, pretpostavio da se ona širi brzinom svjetlosti i identificirao je niz veličina invarijantnih na Lorentzovu grupu, a koje je smatrao pogodnima za relativističku gravitaciju. U računu mu se potkrala greška što je uočeno tek 2007 (S. Walter).

Einstein (1905), u svom slavnom članku, ne poziva se na druge radove i stoga ga neki autori smatraju kompilacijom već poznatih rezultata. Nakon svega što je bilo urađeno prije njega, Einstein je bio naprosto doveden do principa relativnosti. On dolazi do svih rezultata koje je opisao Poincaré, a spominje i Lorentzove transformacije i njihova grupna svojstva ali ih ne koristi. Je li Einstein bio svjestan Poincaréovih rezultata? To je teško pitanje. U svom pismu Carlu Seeligu (1955) on piše da nije znao za Poincaréove rezultate iako je bilo poznato da je čitao Poincaréovu knjigu *La Science et l'Hypothèse* tijekom 1902–1904 u kojoj stoji da apsolutni prostor i apsolutno vrijeme ne postoje, pa čak ni eter. Štoviše Einstein je referirao dijelove knjige na privatnim seminarima *Akademie Olympia* u Bernu.

Još prije 1905. Poincaré je naglašavao važnost sinkronizacije satova pomoću svjetlosnog signala. Einstein tu nije ništa promijenio, samo je izbacio eter kao nositelja poremećaja. Zanimljiva je Teslina opaska na taj Einsteinov korak: "*Sadašnjost je njihova, budućnost je moja*" (Tesla).

Sve do 1912. Einsteinova intuicija, što se matematike tiče, nije bila posebno naglašena, a matematički formalizam smatrao je suvišnim. Luis de Broglie, poznat po otkriću du-

¹⁴Možemo samo nagađati zašto Poincaré nije dalje razvio svoju revolucionarnu ideju. Možda zbog svog uvjerenja da fizikalne teorije nisu ništa drugo nego pogodan opis svijeta i stoga je stvar dogovora koju ćemo od teorija koristiti u kojoj situaciji. Čini se da Poincaré nije vidio ništa posebno u ideji matematičkog četverodimenzionalnog prostora, jer takva ideja ne znači nužno da je svijet sâm po sebi četverodimenzionalan.

U uvodu knjige *Minkowski Spacetime: A Hundred Years Later*, editor Vesselin Petkov se pita kako to da znanstvenik takvog kalibra kao što je Poincaré nije shvaćao dubinu vlastitih sponaja. To je tužno i ironično, zaključuje Petkov, jer fizičari često misle da ne trebaju nikakav filozofski aspekt svojih istraživanja. Kako kaže Daniel Dennett, američki filozof, "*znanstvenici sebe ponekad obmanjuju mišljenjem da su filozofske ideje samo dekoracija ili parazitski komentari na tvrdu, objektivnu znanstvenu istinu [. . .] Ne postoji znanost neovisna od filozofije, postoji samo znanost čija se filozofska prtljaga ukrcava bez provjere.*"

¹⁵Henri Vergne, Poincaréov student

alne prirode elektrona, smatrao je matematički formalizam preduvjetom znanstvenog napretka, a jednako tako i uvid u eksperimentalne činjenice. Za njega je Poincaré bio jedan od rijetkih koji je posjedovao i jedno i drugo, a Einsteina je smatrao znanstvenikom drugog reda.

Sve do 1908. jedan eksperiment je privlačio pažnju jer nije imao teorijsko objašnjenje. To je bilo skretanje β -zrake koju emitira radioaktivni izotop pod utjecajem magnetskog polja. Lorentz se obratio Poincaréu (1906) za pomoć misleći da bi on mogao spasiti teoriju ali ni on nije nalazio objašnjenje. Nova relativistička zvijezda, Hermann Minkowski, uvažila je sve Poincaréove relativističke doprinose i što se tiče gravitacije i što se tiče relativističke geometrije i krenuo je korak dalje. Svoje nove spoznaje objavio je u dva rada: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*¹⁶ (Minkowski, 1908) i *Raum und Zeit*¹⁷ (Minkowski, 1909).

U rujnu 1908, Minkowski govori o važnosti četverodimenzionalnog svijeta za fiziku i tumači vezu svojih dijagrama s Poincaréovim geometrijskim pristupom. Umro je nenadano, 12. siječnja 1909. od upale slijepog crijeva na vrhuncu svoje slave.

Godine 1921. odbor za dodjeljivanje Nobelove nagrade objelodanilo je namjeru da nagradu za fiziku dodijeli Albertu Einsteinu za njegova postignuća iz teorije relativnosti. Lorentz je to doživio kao nepravdu, stao na stranu Poincaréa i objavio članak (Lorentz, 1921) u kojem izjavljuje: "Nisam utvrdio princip relativnosti na strog i univerzalan način. Nasuprot tome, Poincaré je postigao savršenu invarijantnost jednadžbi elektrodinamike i bio je prvi koji je formulirao Princip relativnosti." Posramljeni odbor dodjelio je nagradu Einsteinu, ne za relativnost već za fotoelektrični efekt.

Na kraju se postavlja pitanje tko je kreator specijalne teorije relativnosti? Po mišljenju mnogih, svo troje. Prvi je bio Lorentz, Poincaré ga je nadopunio, a Einstein je zaslužan za interpretaciju, logičku rekonstrukciju i popularizaciju. Prema Lorentzovim riječima (Lorentz, 1921): "Ono isto što smo zaključili iz Maxwellovih jednadžbi Einstein je postulirao."

1.3 Simultanost događaja

Za razumijevanje pojma simultanosti i sinkronizacije satova u specijalnoj teoriji relativnosti korisno je još jednom istaknuti razliku u strukturi prostora-vremena u relativističkom i predrelativističkom modelu.

Važan aspekt predrelativističkog vremena je taj da je ono *apsolutno* i *globalno jedinstveno*. Apsolutno je u smislu da vremenski interval između dva događaja ne ovisi o procesu koji ih povezuje niti o referentnom sustavu u kojem se promatraju. Ono je globalno jer bez obzira na prostornu udaljenost događaja njihova vremenska udaljenost je samo pitanje mjernog instrumenta i njegove mjerne jedinice. To omogućava pojam istovremenosti događaja u cijelom svemiru. Klasična simultanost je relacija među događajima definirana na svim

¹⁶Osnovne jednadžbe elektromagnetskih pojava u pokretnim tijelima.

¹⁷Prostor i vrijeme

događajima u prostoru-vremenu. Na slici 1 a) (lijevo) prikazane su klase ekvivalencije simultanih događaja kao paralelni prostori okomiti na vremensku os.

1.3.1 Relativistička sinkronizacija satova.

Specijalna teorija relativnosti napušta apsolutnost vremena i dovodi u pitanje njegovu globalnost što znači da je vezano uz prostor. Relativističku simultanost je teško dovesti u vezu s intuitivnom slikom protoka vremena u svakodnevnom životu jer smo navikli vrijeme promatrati kao nešto što je neovisno od prostora, a subjektivno vrijeme je kategorija za sebe koja nije direktno povezana sa zakonima mehanike.

U poglavlju *The Adolescence of Relativity: Einstein, Minkowski, and the Philosophy of Space and Time* (Dieks, 2014a) autor uočava da Einstein, u svom članku iz 1905, naglašava važnost štapa i sata u objašnjavanju prostornih i vremenskih pojmova. Einsteinovi komentari su više retorički nego operabilni i on se nikada nije približio operacionalizmu u svojim filozofskim spisima. U pristupu Minkowskog nema mjesta za temeljnu ulogu štapova i satova; teorija relativnosti vidi svijet kao četverodimenzionalni afini prostor¹⁸. S filozofskog gledišta njegovo stajalište nije bilo nimalo različito od onog Einsteinovog. Međutim, njegova formulacija je eksplicitnija jer se sadržaj prostorno-vremenskih pojmova javlja u formi fizikalnih zakona. Ovo potonje ima važne posljedice u raspravama koje se tiču dogovora o simultanosti (događaja).

Za razliku od pojma *duljine* iza koje stoji fizički objekt, *vrijeme* nema jasno fizikalno značenje, osim eventualno "položaja kazaljki na satu". Einstein je toga svjestan. Osim toga, kazaljke na satu su lokalnog karaktera pa je potreban neki mehanizam za uspoređivanje vremena na različitim mjestima. Einstein razmatra mogućnost da se različitim događajima pridijeli vrijeme na referentnom fiksnom satu u svemiru koje je potrebno svjetlosti da dođe od mjesta događaja do fiksnog sata. Čak i ako bismo mogli mjeriti to vrijeme dolaska, takvo vrijeme ovisilo bi o fiksnom satu, a to bi značilo da bi fizikalni zakoni ovisili o nekom unaprijed odabranom položaju. Fleksibilnija i operativnija ideja je raditi sa sinkroniziranim satovima bez da ih hijerarhijski uredimo. Einsteinova **definicija sinkronizacije satova** bazirana je na dva postulata:

Prvi postulat je da se svjetlost giba istom brzinom u svim smjerovima (od satova koje sinkroniziramo).

Drugi postulat je da su svi inercijalni sustavi ekvivalentni u odnosu na formu fizikalnih zakona uključujući elektrodinamiku i optiku.

Einsteinova definicija sinkronizacije iskazana je pomoću idealiziranog eksperimenta.

Neka su A i B dvije različite lokacije u inercijalnom sustavu. Svjetlosna zraka odaslana je (u vakumu) iz A u trenutku t_1 , mjereno na satu A, stiže do B u trenutku t_2 , mjereno na satu B, reflektira se natrag i stiže do A u trenutku t_3 , mjereno na satu A. Satovi su sinkronizirani¹⁹ ako je $t_2 = (t_1 + t_3)/2$.

¹⁸Čitatelj koji nije upoznat s afinom strukturom može taj prostor zamisliti kao prostor pravaca po kojima se gibaju promatrači.

¹⁹Evo jedna zanimljiva opaska na koju je upozorio (Jammer, 2006). Slična definiciju simultanosti dao je sv.

Iako liči na proceduru za sinkronizaciju ona to nije. Kao prvo, promatrač u A ne zna u kojem trenutku t_2 je svjetlo stiglo u B . Postoji mogućnost da promatrač B naknadno javi promatraču A koje je to vrijeme bilo tako da se satovi mogu korigirati i ponoviti eksperiment nekoliko puta ako je potrebno. U svakom slučaju to može biti zamorno ako treba sinkronizirati više satova na više različitih položaja (u istom inercijalnom sustavu).

Ekvivalentna definicija ovoj Einsteinovoj je sljedeća.

Zamislimo položaj C na pola puta udaljen od A i B . Neka su dvije svjetlosne zrake odaslane iz C , jedna prema A , a druga prema B , i ako je vrijeme dolaska t_A zrake u položaj A , mjereno na satu A , jednako vremenu dolaska t_B zrake u položaj B , mjereno na satu B , onda su satovi u A i B sinkronizirani.

U proceduri sinkronizacije nije odmah jasna važnost drugog postulata. On je potreban za funkcionalnost sata, mehanizma unutar kojeg se zbivaju određeni fizikalni procesi i koji ne bi smjeli ovisiti o gibanju samog instrumenta.

Einsteinova definicija sinkronizacije zahtijeva se da je brzina svjetlosti u odlasku jednaka brzini svjetlosti u povratku na kružnom putovanju $A \rightarrow B \rightarrow A$. Na konvencionalni karakter ovakve definicije upozorio je Poincaré (1904)²⁰ jer brzinu svjetlosti u jednom smjeru nije moguće izmjeriti, a na kružnom putovanju je moguće jer se svjetlost vraća na isto mjesto odakle je odaslana i vrijeme odlaska i dolaska svjetlosnog signala je očitano na istom satu. Eksperimentalna potvrda prvog Einsteinovog postulata je moguća ako se potvrdi izotropnost prostora. Za sada to ostaje kao hipoteza.

Ako imamo samo lokalna vremena (sata) u A i B koji nisu sinkronizirani, tada nije moguće odrediti brzinu bilo kakvog signala, jer nije moguće usporediti vrijeme odlaska signala iz A i vrijeme dolaska signala u B . Ako je poznata brzina signala, na primjer za svjetlosni signal, problema neće biti jer možemo sinkronizirati satove slanjem signala od jednog sata do drugog uvažavajući vrijeme putovanja L/c , gdje je L udaljenost među satovima, a c brzina širenja signala. Međutim, ako je brzina signala nepoznata, tada nismo u stanju sinkronizirati satove. Mogući izlaz iz te slijepe ulice je da se odlučimo za neki postupak sinkronizacije satova. Potrebna je definicija kako postupiti i takva definicija će odrediti i sinkronizaciju i brzinu signala. Einsteinov postulat da je brzina svjetlosti ista u svim smjerovima omogućava mjeriti *kružnu brzinu svjetlosti* (tamo i natrag) pomoću jednog jedinog sata bez simultanosti. Simultanost je tada moguća na način kako je gore opisano.

Konvencija da se svjetlost giba istom brzinom u svim smjerovima definira topologiju četverodimenzionalnog prostora-vremena Minkowskog (v. odjeljak 1.1 pod nazivom [Prostor Minkowskog](#)). Mnogi argumenti protiv Einsteinove konvencije polaze od zahtjeva inva-

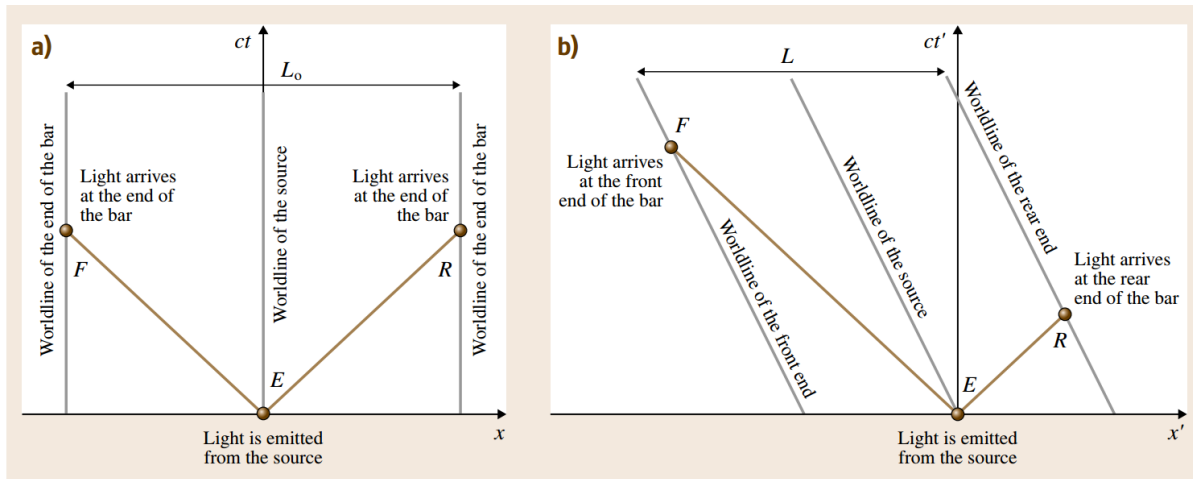
Augustin 1500 godine prije Einsteina 397. g. u svojem djelu *Ispovijesti* (lat. *Confessiones*). Njega je intrigiralo pitanje istovremenog rođenja dva djeteta na udaljenim mjestima u kontekstu astroloških predviđanja. Ako dva glasnika, u trenutku rođenja jednog i drugog djeteta krenu jedan prema drugom istom brzinom i susretnu se točno na pola puta onda se može zaključiti da su djeca rođena u isto vrijeme. Jammer komentira da je to vjerojatno najstariji zapis koji spominje simultanost događaja.

²⁰Poincaré je o tome raspravljao godinu dana ranije što znači da je on već tada raspravljao o sinkronizaciji satova.

rijantnosti relacije simultanosti na pogodne grupe transformacija i zahtjeva da ta relacija bude relacija ekvivalencije. Rasprava o toj temi traje već čitavo stoljeće (Janis, 2018).

1.3.2 Relativnost simultanosti

Slika 14: Sinkronizacija satova. Događaji (F, t_F) i (R, t_R) na slici lijevo su simultani jer je spojnica RF u prostoru Minkovskog okomita na vremensku os.



Inercijalni sustav u prostoru Minkovskog vizualno možemo prikazati kao snop paralelnih pravaca, *svjetskih linija*, koje korespondiraju, svaka za sebe, jednom položaju u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, mjestu mirovanja događaja na svjetskoj liniji.

Neki drugi inercijalni sustav prikazan je snopom svjetskih linija čiji je smjer različit od smjera prvotnog snopa. Ako su dva sata u jednom sustavu sinkronizirana, tada oni neće biti sinkronizirani u drugom sustavu. Takva situacija prikazana je na slici 14 koja prikazuje štapa duljine L_0 u sustavu S u kojem taj štapa miruje. Svjetlost je odaslana prema krajevima štapa iz njegovog polovišta i sinkronizira satove na krajevima.

Na slici desno štapa se giba ulijevo nekom brzinom u sustavu S' tako da svjetlost ranije stiže na rep štapa R nego na njegov prednji kraj F . Stizanja do rubova štapa nisu sinkronizirani događaji u sustavu S' i spojnica \overline{RF} nije okomita na svjetsku liniju.

U nekom drugom sustavu S'' u kojem se štapa giba udesno svjetlost bi ranije stigla do lijevog kraja nego do desnog. Takva situacija kad od dva događaja jedan prethodi drugome u jednom sustavu, a u drugom sustavu bude obrnuto, ostavlja nas u nedoumici jer postoji mogućnost da su oni uzročno povezani. Ako uzročnost vežemo uz vrijeme onda u jednom sustavu događaj A je uzrok od B , a u drugom sustavu to ne mora biti tako. Relacija uzročnosti, onakva na kakvu smo navikli²¹, ovisi o sustavu. To bi značilo da relacija

²¹Pojam uzročnosti često se vezuje uz vrijeme što nije nužno. Osim toga, uvriježeni pojam "uzročnost" je suviše nejasan za imalo precizniju filozofsku raspravu ili da mu se pridijeli legitimna uloga u matematiziranoj znanosti. Vremesko-uzročna rasprava započinje krajem 19. i početkom 20. st. obojena je determinizmom i s puno kontroverzi i nerazumijevanja (Kirchoff, Mach, Russell). Današnje definicije uzročnosti su uglavnom

uzročnosti nije invarijantna na Lorentzove transformacije, a Einsteinov drugi postulat zahtijeva da forma prirodnog zakona ne ovisi o sustavu. Znači li to da je uzročnost nešto nametnuto, nešto van prirodnih zakona, nešto što nam samo dodatno pomaže u interpretaciji naše percepcije svijeta?

Ako želimo zadržati uzročnost vezanu uz vrijeme onda bi trebalo definirati pojam "ranije", koji je sada u prostoru Minkowskog lokalnog karaktera, tj. ovisi o promatraču.

1.3.3 Slaganje brzina

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

2 Opća teorija relativnosti

Gravitacija je interakcija među svemirskim tijelima koja ima uzrok u samim tijelima i Newton ju je opisao kao privlačnu silu. Uzrok te sile proizlazi iz samog tijela i dano mu je ime *gravitacijska masa*. Ona djeluje bez obzira je li se tijela gibaju jedno u odnosu na drugo ili ne. Tako na primjer, tijelo koje leži na podu u mojoj sobi privučeno je gravitacijom između tog tijela i Zemlje, ali je ne znam i ne mogu izračunati njegovu *inercijalnu masu* sve dok ne dobije neko ubrzanje. To mi govori 2. Newtonov zakon gibanja.

Danas govorimo o gibanju planete u gravitacijskom polju Sunca iako Newton nije govorio o polju, bar ne eksplicitno. Newtonova sila među objektima postoji ako postoje oba objekta, dok gravitacijsko polje shvaćamo kao polje utjecaja jednog objekta na potencijalno prisutne objekte u njegovoj okolini, a ta okolina je u slučaju gravitacije cijeli prostor. Uvažavajući takav pogled na gravitacijsko polje može se slobodno reći da je masa tijela posljedica uranjanja materije u gravitacijsko polje. Slično se može reći i za nabo.

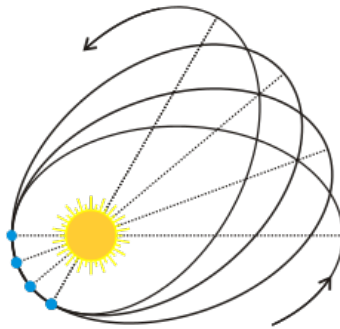
Newtonova teorija gravitacije nije bila prihvaćena od njegovih suvremenika, a ideja sile na daljinu, tj. sile koja nije kontaktna razvijala se sporo. U Cambridgeu, na primjer, udžbenici su sve do dvadesetih godina 18. st. podučavali Descartesovu fiziku. Ni na kontinentu nije bilo drugačije. Leibniz u Njemačkoj, Johann Bernoulli u Švicarskoj, Cassini u Francuskoj odbacivali su Newtonovu teoriju gravitacije. To nije samo zbog predrasuda već i zbog toga što nije posve bila u skladu promatranim gibanjima planeta (Whittaker, 1951, str. 29–31).

Pronalaženjem planete Neptun (1846) Newtonova teorija gravitacije bila je na svom vrhuncu. Povod za potragom novog planeta bilo je odstupanje Uranove putanje od predviđanja i 1834. Hussey pretpostavlja da je tome uzrok još neotkrivena planeta. Novu planetu prvi su opazili Galle i d'Arrest s preciznošću unutar jednog supnja na položaju kojeg je predvidio Le Verrier u svom računu.

Nekako u isto vrijeme (Verrier, 1859) po prvi put se zamjećuje relativistički efekt gravitacije, a to je da Merkur, najbliža planeta Suncu, ne opisuje eliptičastu putanju već se giba po nekoj vrsti rozete, a to je elipsa koja se zakreće (slika 15). Newtonova teorija gravitacije nije bila

inkompatibilne. Vidi također odjeljak ?? pod nazivom ??.

Slika 15: Precesija perihela planete Merkur u svom obilasku oko Sunca.



u stanju to objasniti jednako kao ni neki drugi pokušaji revizije formule za gravitaciju²². Definitivno objašnjenje takvog Merkurvog gibanja trebalo je čekati razvoj opće teorije relativnosti.

Krenimo, dakle, od Newtonovog zakona gravitacije. Gibanja tijela 2 (planet) u gravitacijskom polju tijela 1 (Sunce) opisana je jednadžbom (13) u kojoj se pretpostavlja da tijelo 1 miruje u inercijalnom sustavu

$$F_{1 \rightarrow 2} = G m_{a1} m_{p2} \frac{\vec{n}_{1 \leftarrow 2}}{r_{12}^2} = m_{i2} \vec{a}_2 \quad (13)$$

- $F_{1 \rightarrow 2}$ sila kojom Sunce (aktivno tijelo 1) djeluje na planetu (pasivno tijelo 2),
- G — dogovorena gravitacijska konstanta,
- m_{a1} — gravitacijska masa aktivnog tijela,
- m_{p2} — gravitacijska masa pasivnog tijela,
- m_{i2} — inercijalna masa pasivnog tijela,
- $\vec{n}_{1 \leftarrow 2}$ — smjer (jedinični vektor) od pasivnog prema aktivnom tijelu (privlačnost),
- r_{12} — relativna udaljenost dvaju tijela,
- \vec{a}_2 — ubrzanje pasivnog tijela.

Princip ekvivalencije. Galileo je formulirao (naslutio) *slabi princip ekvivalencije* (masa) time što je rekao da je $m_p \propto m_i$, tj. da je pasivna gravitacijska masa proporcionalna inercijalnoj masi pasivnog tijela koje se giba. Eötvösov eksperiment s torzionim njihalom (von Eötvös et al., 1922) to i pokazuje. Izborom mjernih jedinica, odnosno konstante G , možemo slobodno reći da je $m_p = m_i$, i jednadžba (13) tada postaje onakva kakvu je svi znademo

$$F_{1 \rightarrow 2} = G m_1 m_2 \frac{\vec{n}_{1 \leftarrow 2}}{r_{12}^2} = m_2 \vec{a}_2.$$

²²Clairaut predlaže oblik sile $\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4}$

Napomena. Sada je jasno da gibanje pasivnog tijela ne ovisi o inercijalnoj masi m_2 . Uz pomoć općeg zakona gravitacije i slabog principa ekvivalencije, Newton je statičku veličinu Zemljine sile teže projicirao na univerzum.

Put do ekvivalencije inercijalne i gravitacijske mase je i za Newtona bio mukotrpan. U tekstu koji slijedi iznijeti ćemo neke, još nepoznate detalje za širu javnost, iz članka Craiga Foxa (1916) Fox (2016) o Newtonovim nastojanjima da definira masu i silu još prije nego što je izdana *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1697) Newton (1687). Neki dijelovi Newtonovih rukopisa koje Fox spominje još nisu prevedeni s latinskog.

Prisjetimo se načina kako Newton uvodi pojam *inercijalne mase*. To je prva definicija u njegovoj *Principiji*.

DEFINICIJA I.

KOLIČINA MASE JE MJERA ISTE I PROIZLAZI IZ NJENE GUSTOĆE I ZAPREMNINE.

Zrak dvostruke gustoće i dvostruko veće zapremnine ima četiri puta veću masu.

Napomena autora. Bez obzira što gustoća nije definirana, ovdje se nazire Newtonova namjera da masu smatra aditivnom, jer je volumen aditivna mjera. Drugim riječima, masa tijela koje nastaje združivanjem dva različita tijela je suma njihovih masa. Nije sasvim jasna Newtonova namjera uvoditi pojam mase bez dinamike. Inercijalna masa je onaj dio otpora tijela promjeni brzine koji se odnosi na samo tijelo i tako ju treba doživljavati — dinamički. Ova DEFINICIJA I je cirkularna. Inače, aditivnost mase proizlazi iz aditivnosti sile koju Newton uzima zdravo za gotovo i nije eksplicitno navedena kao zakon iako Newton u POSLJEDICI I. govori o paralelogramu sila. Što se mehanike tiče ova definicija mase je nebitna jer mase možemo uspoređivati mjerenjem akceleracije koju uzrokuje ista sila na oba tijela. Tehničke detalje takvog mjerenja ostavljamo čitatelju da potraži sam.

Masa, kako je uvedena u Newtonovoj definiciji nije vezana uz dinamiku i djelovanje sila i uopće nije jasna namjena takve veličine u ovom trenutku. Newtonova potraga za "količinom materije" započinje rukopisom *De motu corporum in gyrum* (O orbitalnom gibanju tijela) (1864) Newton (1684), napisanom tri godine prije prvog izdanja njegove *Principie*. U toj prvoj verziji rukopisa još nema pojma koji bi opisivao "količinu materije", ali u trećem, revidiranom izdanju (1685) Newton (1685), Newton se vraća osnovnim konceptima i revidira ih. Tu spada i Definicija 10 (*De motu*):

Količina gibanja.

Količina gibanja proizlazi iz brzine i količine tijela u gibanju zajedno. Štoviše, količinu tijela treba računati iz obilja tjelesne materije [copia materiæ corporæ], koja je uglavnom proporcionalna njegovoj težini [. . .]

U Newtonovo vrijeme, težina tijela je razumljiv i iskustveno jasan pojam i prethodi pojmu inercijalne mase kakvu danas poznajemo i koju nam Newton sada uvlači u teoriju. Pojam *copia materiæ* se prvi puta spominje, a mogao bi se prevesti kao *količina, obilje*, a Newton ga je preuzeo od Lucretiusove poeme *De Rerum Natura* (O prirodi stvari) djelo koje su Newton i njegovi prethodnici i suvremenici dobro poznavali.

Ono što je zaokupljalo Newtonove misli je odnos između količinu materije i onoga što

nazivamo težina. Uvod u tu vezu Newton započinje raspravom o relativnom i apsolutnom gibanju u Definiciji 8 (*De motu*):

Definicija 8.

[...] *da mirovanje i gibanje tijela u apsolutnom smislu ne ovisi o njegovom odnosu prema drugim tijelima već o djelovanju sile na to tijelo. Međutim, taj odnos se može promijeniti jedino djelovanjem sile na ostala tijela s kojima je prvo tijelo u odnosu, ali se ne mijenja ako sila djeluje na oboje — u tom slučaju njihov relativni odnos se čuva.*

Ovdje nisu sasvim jasan dio rečenice "njihov relativni odnos se čuva", je li se to odnosi na udaljenosti ili nešto drugo. Niže u tekstu bit će jasno o čemu se radi.

Pretpostavimo da dva tijela stoje jedno uz drugo. Njihovo apsolutno gibanje, mirovanje ili gibanje po pravcu s konstantnom brzinom, će biti promijenjeno jedino djelovanjem vanjske sile na oba tijela. Ali ako ta vanjska sila djeluje na samo jedno tijelo njihovo relativno gibanje će biti promijenjeno jer drugo tijelo zadržava svoje stanje gibanja. Ovo razmišljanje Newton je iskazao kao Posljedicu 6 zakona gibanja u *Principii*:

Posljedica 6 (zakona gibanja)

Ako se tijela na bilo koji način gibaju jedno u odnosu na drugo i budu ubrzana jednakim ubrzanjem duž paralelnih pravaca, tada će i dalje nastaviti gibati se jedno u odnosu na drugo kao da dodatnog ubrzanja nije ni bilo.

Ova posljedica nema nejasnoća jer Newton jasno govori u kom smjeru "gleda" ubrzanje. Posljedica zahtijeva pažljivo čitanje — Newton ne govori o vanjskoj sili na sustav nego o obrzanju čitavog sustava. Ovaj uvid predstavlja dodatak Galilejevoj invarijantnosti zakona gibanja jer za specijalne vanjske sile na sustav koje daju isto ubrzanje svim tijelima sustava, relativno gibanje se također neće mijenjati.

Posljedica te tvrdnje ja da sva tijela u polju sile teže, ispuštena u istom trenutku, padaju jednako brzo ako se zanemari otpor zraka. To je zato jer je gravitacijsko polje Zemlje, lokalno gledajući, homogeno i tijela miruju relativno jedno u odnosu na drugo u trenutku ispuštanja. Njihovim ispuštanjem uključeno je ubrzanje duž paralelnih pravaca pa, prema posljedici, i nakon toga zadržavaju odnos mirovanja jedno u odnosu na drugo.

Postaviti ćete pitanje kakvu vezu to ima s količinom materije? Ima, ali prije toga postavimo još jedno pitanje, a to je: "Kakva je to vanjska sila koja svim tijelima sustava daje isto ubrzanje?" Drugi Newtonov zakon gibanja tvrdi da ista sila tijelu manje (inercijalne) mase daje veću akceleraciju. Sila koja svim tijelima sustava daje isto ubrzanje, bez obzira na masu, je sila teža i ta činjenica je eksperimentalno bila potvrđena (Galileo, Huygens).

Zemljina gravitacija nije tipična mehanička sila i ovo gore ispričano možda djeluje kontra-intuitivno. Još bi bilo kontraintitivnije kad bi gravitacija na sva tijela djelovala istom silom — tada bi sva tijela bila jednako teška pa tako i malo dijete i komarac. Primijetite da ovdje naglašavamo razliku između (inercijalne) mase i težine, a sam Newton nije jasno dao do znanja da je to zaista različito. U trenutku kad je imao *copiju*, inercijalnu količinu materije, on te razlike čini se da nije bio svjestan prije treće revizije rukopisa *De motu*.

Newton je bio svjestan da ravnotežna vaga ne mjeri težinu, jer ako je vaga u tavnoteži na

Zemlji onda će biti u ravnoteži i na Mjesecu. Iz tog razloga ga je zanimala "količina materije" prisutna u težini koja je odijeljena od djelovanja gravitacije na to tijelo. Kod inercijalne sile i količine gibanja to je inercijalna masa koja je separirana od brzine, odnosno akceleracije. Takvu mjeru količine materije Newton je nazvao *pondus* (prevodi se kao težina što je zbunjujuće za današnjeg čitatelja).

Newton je išao korak dalje. Usavršio je njihalo koje je imalo zatvorenu kutiju, a u koju je stavljao tijela različitih materijala (drvo, zlato) ali jednakih *pondusa*, što je usporedio vagom. Njihalo je naravno bilo gušeno zbog otpora zraka, ali je eksperiment pokazao da je brzina gušenja bila neovisna o materijalu (*pondusu*). Zapravo su bila dva njihala koja su izokrono titrala, svako sa svojim *pondosom*. Zaključak slijedi sam po sebi: Brzina gušenja njihala (otpor zraka itd.) ovisi o inercijalnoj mjeri materije (*copia*) što znači da je *copia* proporcionalna *copusu*. Da je brzina gušenja bila različita za jednake *copuse* to bi značilo da značilo da je *copus* substancijalno različit od inercijalne mase. Tehnički termin *copus* zamijenjen je inercijalnom masom, a tako stoji i dan danas.

Drugi osnovni koncept kojeg je trebalo revidirati je sila. Newton je tvrdio u gornjoj raspravi da kad bi Zemljina gravitacija različito ubrzavala tijela različitog materijala da bi tada, prema 2. zakonu gibanja, periodi oscilacija njihala bili različiti. To, međutim, ne slijedi i 2. zakona gibanja kako je bio formuliran u to vrijeme (1985). Tadašnji zakon tvrdi da je promjena gibanja proporcionalna primjenjenoj sili. Ono što mu je privuklo pažnju u toj epizodi je da treba razlikovati dvije vrste sile. Tipična mehanička sila, kao što je udar na primjer, je proporcionalna akceleraciji koju uzrokuje. S druge strane, silu kao što je gravitacija je teže opisati, jer je isto proporcionalna akceleraciji koju uzrokuje, ali joj iznos (veličina) varira ovisno o *copusu* tijela, dok je akceleracija ista za njemu bliska tijela. To je navelo Newtona da razlikuje *pokretačku silu* od *akceleracijskog iznosa sile* što je učinio u *Principii* (1687) (DEFINICIJA VII i DEFINICIJA VIII) i ranije u *De motu — Liber Secundus* (1685). *Akceleracijski iznos sile* je proporcionalan ubrzanju koje generira, dok je iznos pokretačke sile proporcionalan umnošku mase i akceleracije.

2.1 Einsteinov princip ekvivalencije

U svom eseju *Principle of Relativity and Gravitation*, Einstein (1907) proširuje princip ekvivalencije s inercijalnih sustava na ekvivalenciju homogenog gravitacijskog polja (unutar lifta) i jednoliko ubrzanog gibanja. To znači da se efekt ubrzanja u sustavu koji se ubrzano giba ne može razlikovati od gravitacije. Pustimo Einsteinu da govori:

Promatrajmo dva sustava u gibanju S_1 i S_2 . Sustav S_1 se jednoliko ubrzava u smjeru x -osi s akceleracijom γ . Sustav S_2 miruje u homogenom gravitacijskom polju²³ i svi objekti unutar S_2 doživljavaju akceleraciju $-\gamma$ u smjeru x -osi. Kao što znamo, zakoni fizike u sustavu S_1 ne razlikuju se od zakona fizike u sustavu S_2 , što proizlazi iz činjenice da svi objekti u S_1 doživljavaju akceleraciju kao da su u gravitacijskom polju. Nemamo razloga tvrditi, što se tiče dosadašnjeg iskustva, da se sustavi S_1 i S_2 po bilo čemu razlikuju i stoga pretpostavljamo, u onome što slijedi, potpunu fizičku ekvivalenciju

²³Laboratorij na površini Zemlje (op. autora)

(homogenog)²⁴ gravitacijskog polja i odgovarajućeg ubrzanja referentnog sustava.

U skraćenoj formi:

U cijelom univerzumu i za sva vremena u dovoljno malom laboratoriju koji slobodno pada svi zakoni prirode (osim zakona gravitacije) imaju isti oblik kao u specijalnoj teoriji relativnosti. Drugim riječima, sustav koji slobodno pada je lokalno inercijalan.

Primijenjeno promatrača unutar lifta koji pada u polju sile teže, on neće znati nalazi li se u liftu koji pada ili u inercijalnom sustavu.

Lokalizirano gravitacijsko polje. Da gore rečeno bude razumljivije promatrajmo gibanje materijalne točke inercijalne mase m_i u gravitacionom polju sile teže usmjerene u negativnom smjeru z -osi određene vertikalnom niti viska. Newtonova jednažba gibanja je

$$m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_g g,$$

gdje je m_g gravitacijska masa, a g ubrzanje sile teže. Zbog jednakosti inercijalne i gravitacijske mase, možemo ih izostaviti iz jednadžbe gibanja. Zanima nas jednažba gibanja u koordinatnom sustavu koji se giba u smjeru negativne z -osi akceleracijom a . Ako označimo koordinatu materijalne točke u tom ubrzanom sustavu sa z' tada je transformacija između ta dva sustava

$$z' = z + \frac{1}{2} a t^2, \quad t' = t,$$

a jednažba gibanja mase u ubrzanom sustavu

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = a - g.$$

U slučaju da je $a = g$, tj. ubrzanom sustav je sustav lifta koji slobodno pada u polju sile teže, onda se čestica ponaša kao slobodna čestica čija je brzina gibanja određena sa svojom početnom vrijednošću. Drugim riječima, promatrač u ubrzanom sustavu koji slobodno pada u homogenom gravitacijskom polju ne zna je li na njega djeluje gravitacija ili ne. To znači da gravitaciju možemo shvatiti kao fiktivnu silu koja je posljedica ubrzanja, a tijela u ubrzanom sustavu se ponašaju kao da su pod utjecajem gravitacije.

Ako skočim iz aviona i slobodno padam imam osjećaj da na mene ne djeluje sila. U trenutku kontakta s tlom trenutačno se uključi ubrzanje iznosa g što može biti pogubno za moje kosti. Moj sustav se dalje giba s ubrzanjem g u smjeru z -osi. Osobe koje žive dijametralno suprotno na Zemlji nisu u homogenom gravitacijskom polju i nemaju isto fiktivno ubrzanje. Apstraktno gledajući, gravitacijsko polje bi se moglo rekonstruirati iz mnoštva lokaliziranih ubrzanih sustava u kojima se slobodna tijela gibaju po pravcima. Drugim riječima, spored masa u univerzumu određuje neku geometrijsku strukturu koja je, lokalno gledajući, euklidska ili struktura prostora Minkowskog, ovisno o tome kako gledamo na brzinu širenja svjetlosti.

²⁴op. autora

Slika 16: Lift u polju sile teže. Lijevo – miruje, čovjek osjeća ubrzanje. Desno – slobodno pada, čovjek lebdi u bestežinskom stanju.



Posljedica 6 na str. 33 poznata je u literaturi kao Newtonov princip ekvivalencije. Za razliku od Einsteinovog principa ekvivalencije on govori o uniformnoj akceleraciji kojom se sustav giba, dok Einstein umjesto tog koristi lokalizirano gravitacijsko polje. U tom smislu je Einsteinov princip specijalni slučaj Newtonovog. Da li je to zaista tako? Ako se radi o gravitaciji u Newtonovom kontekstu to je istina. Međutim, Einsteinov princip uključuje i elektromagnetske pojave, a dodatno bi trebalo objasniti i što Einstein misli pod inercijalnim sustavom. Za razliku od Einsteina, Newton pretpostavlja da su svi događaji istovremeni što vodi na Galilejevu invarijantnost, dok Einsteinov princip sinkronizacije satova vodi na Lorentzove transformacije.

Newton je koristio Posljedicu 6 kako bi zaključio da je sustav Urana i njegovih satelita u odnosu na Sunce inercijalni sustav jer je gravitacijsko polje Sunca u okolini Urana lokalno homogeno, a što mu je trebalo kao motivacijski račun za formulu (13). Newtonov princip je aproksimativan i jednostran, jer homogeno akceleracijsko polje unosi inercijalnost u sustav, ali ne i obratno. Einsteinov princip, ako zanemarimo njegov sadržaj, čini i obratno — poistovjećuje gibanje u inercijalnom sustavu s okvirom koji slobodno pada. Einsteinov je princip, iskreno govoreći, totalno zbunjujući i neintuitivan za one koji se ne bave astrofizikom.

Dilatacija vremena. From this equivalence, Einstein derived clock and energy redshifts in a gravitational field. The reasoning is clear and simple: two observers at different location of the uniform gravitational field can be equivalently considered in an accelerated frame. In the equivalent accelerated frame there are Doppler shift. This gives redshift/blueshift in the gravitational field. When applied to a spacetime region where inhomogeneities of the gravitational field can be neglected, this equivalence dictates the behavior of matter in gravitational field

Gravitacija usporava vrijeme. Što to znači? Ako imamo dva sata na različitim udaljenostima od Zemlje koja miruju na položajima x_1, x_2 i ako s f_1, f_2 označimo frekvenciju satova²⁵

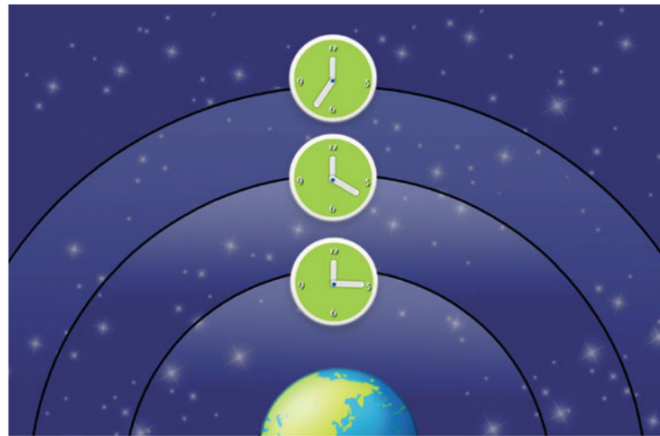
²⁵... u odnosu na neki treći sat. Obično se uzima idealizirani sat s dva paralelna ogledala na udaljenosti

onda je

$$\frac{f_2}{f_1} = 1 + \frac{1}{c^2} (U(\mathbf{x}_2) - U(\mathbf{x}_1)),$$

gdje U predstavlja potencijalnu energiju gravitacijskog polja ($\mathbf{g} = -\nabla U$). To ima za posljedicu da sat na položaju jačeg gravitacijskog polja sporije otkucava. Na slici 17 prikazana su tri sata u gravitacijskom polju Zemlje. Sat koji je najbliži Zemlji ja najsporiji.

Slika 17: Dilatacija vremena. Vrijeme sporije teče ako je sat pod utjecajem jače gravitacije.



Nećemo ulaziti u matematički formalizam ove činjenice, samo ćemo usporediti metriku specijalne i opće teorije relativnosti

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) c^2 dt^2 + (d\mathbf{x})^2 \quad (\text{OTR})$$

$$ds^2 = - c^2 dt^2 + (d\mathbf{x})^2. \quad (\text{STR})$$

Ako je laboratorij malih dimenzija u gravitacijskom polju onda je $U \approx \text{const}$ i izraz $1 - 2U/c^2 \approx 1$ što je u skladu s principom ekvivalencije.

2.1.1 Gravitacija i svjetlost

Ideja da postoji takav "utjecaj" ima eksperimentalnu potvrdu koja se očituje u prividnom pomaku udaljenih zvijezda kad njihovo svjetlo prolazi kraj Sunca. Taj prividni pomak bi mogao nastati na način da se putanja svjetlosne zrake savije u blizini Sunca, kao što se savije prolaskom kroz optičku leću. Takva zamisao nije nova; sâm Newton je, imajući na umu korpuskularnu teoriju svjetlosti, već spominjao tu ideju.

Njemački matematičar Soldner (1803) je prvi izračunao kut skretanja u istoj vrijednosti kao i Einstein uvažavajući, naravno, korpuskularnu teoriju. Einstein (1911) izračunava da bi svjetlosna zraka koja prolazi tik uz Sunce trebala biti privučena i doživjeti skretanje od 0.875" (lučnih) sekundi.

L za koji je jedan otkucaj $d\tau = 2L/c$.

Četiri godine kasnije (1915), oboružan novim saznanjima, Einstein je ponovio račun i dobio dvostruko veću vrijednost $1.75''$. U to vrijeme Einstein i njegova teorija bili su ismijavani od Engleza i Amerikanaca, vjerojatno zato što je bio njemački državljanin, a sve se odigrava u sjeni 1. svjetskog rata. Iznenadjenje dolazi već 1919. kad je, za vrijeme pomrčine Sunca, Eddington, englez iz Newtonovog sveučilišta, eksperimentalno potvrdio²⁶ Einsteinov račun. Međutim, potpunu afirmaciju opća teorija relativnosti dobiva nakon detekcije gravitacijskih leća i gravitacijskih valova generiranih od dvojnih zvijezda i pomaka spektralnih linija dalekih zvijezda prema crvenome dijelu spektra.

Eksperiment koji su Eddington i njegovi suradnici trebali provesti u suštini je jednostavan. Za vrijeme pomrčine Sunca, Mjesec prekriva Sunčev disk i otkriva polje zvijezda oko njega koje su inače nevidljive zbog Sunčevog blještavila. Uz pomoć teleskopa, astronomi na fotografskim pločama bilježe položaj zvijezda i te se snimke uspoređuju sa slikama istih zvijezda koje su napravljene ranije na noćnom nebu. Na slici napravljenoj za vrijeme pomrčine, zvijezde čija svjetlost doživljava skretanje čini se pomaknuta od njenog pravog položaja. Usporedba dviju Eddingtonovih fotografskih ploča, ostale su bile neupotrebljive, s pločama snimljenim na teleskopu u Oxfordu prije ekspedicije dala je predvidive rezultate u skladu s općom teorijom relativnosti $1.60'' \pm 0.31''$. Ekspedicija iz Brazila imala je tehničkih poteškoća zbog zagrijavanja teleskopa i njihova mjerenja daju $1.98'' \pm 0.12''$. Ekspedicija 1922. u Australiji (Campbell i Robert Trumpler) dobili su vrijednosti $1.72'' \pm 0.11''$. Ponovljene ekspedicije (1929, 1936, 1947, 1952 i 1973) nisu dale neka poboljšana mjerenja iako je ova posljednja imala uređaje visoke kvalitete. Moderna mjerenja bazirana na radio interferometriji, vršena uz pomoć satelita Cassini daju vrijednosti koje odstupaju za 10^{-3} od teorijskog predviđanja (Clifford, 2015).

Ono što mi doživljavamo kao odklon svjetlosne zrake pri prolasku kraj Sunca je vizualizacija zakrivljenosti prostora u blizini mase Sunca. Za mjerenje "otklona" je povoljno to što zakrivljenost prostora slabi s udaljenošću od Sunca. Posljedica toga je da je daleko od Sunca geodetska linija po kojoj svjetlost putuje manje zakrivljena i mi je aproksimiramo s pravcem. Drugim riječima, odstupanje putanje svjetlosti od pravocrtne linije je uočljivo samo u blizini Sunca (slika 18).

Što se tiče projekcije svjetlosne putanje koja dolazi od udaljene zvijezde na Zemlju, njen početak i kraj možemo smatrati, u projekciji i u originalu, jednakim. Jednostavan račun koji objašnjava Einsteinovu vrijednost otklona od $1.748''$ može se naći u Trumpler (1929) i za njegovo razumijevanje dovoljno je poznavanje diferencijalnog računa.

Račun 'skretanja' zrake u gravitacijskom polju. Jedan od načina da se izračuna kut zakretanja svjetlosne zrake pod utjecajem Sunca je taj da se odrede geodetske linije u

²⁶Godine 1917. Eddington je pripremao s astronomom Dysonom ekspediciju na današnju Ekvatorijalnu Gvineju, jer se pružala dobra prilika za mjerenje zbog velikog broja zvijezda koje su se 29. maja 1919. trebale sakupiti oko Sunca. Čak je bila odobrena i pozamašna svota novaca od strane Britanske vlade. U to vrijeme rat je još uvijek bio neizvjesan, a postojala je i opasnost da Eddington bude regrutiran, iako je kao kveker tražio izuzeće zbog prigovora savjesti. Na kraju je Britanska vlada ipak odobrila znanstveniku pacifisti da izbjegne ratne vojne dužnosti kako bi mogao provjeriti teoriju kreiranu od neprijateljskog znanstvenika. Osim Eddingtonovog tima, Englezi su poslali još jedan tim s istim zadatkom u mjesto Sobral na sjeveru Brazila. Prije Eddingtonove ekspedicije bilo je nekoliko njih (ukupno 4), ali bez uspjeha zbog lošeg vremena.

zakrivljenom prostoru-vremenu. To može biti mukotrpan posao jer treba riješiti skup diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

gdje je τ *pravo vrijeme*, tj. vrijeme u sustavu u kojem promatrač i njegov sat miruju na određenom položaju (ishodištu).

Određivanje simbola $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ zahtijeva računanje metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$, što opet zahtijeva rješavanje 10 parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zakrivljenosti $R_{\mu\nu} = 0$, koje su povrh svega još i nelinearne. Kroz desetak godina proučavanja takvih jednadžbi uspjeli bismo doći do egzaktnog rješenja.

2.1.2 Analiza dimenzija

Mahajan (2014) u svojoj knjizi *Art of Insight in Science and Engineering: Mastering Complexity* rješava mnoge fizikalne i tehničke probleme uz pomoć analize dimenzije prisutnih fizikalnih veličina. Analiza daje odgovor do na neki faktor, kojeg treba odrediti mjerenjem ili snalaženjem na neki drugi način poznavajući složenost problema. Ta se procedura provodi u nekoliko koraka:

1. Određivanje relevantnih parametara.
2. Određivanje bezdimenzionalne grupe.
3. Formuliranje bezdimenzionalne tvrdnje u što generalnijem obliku.
4. Sužavanjem složenosti uz pomoć fizikalnog znanja.

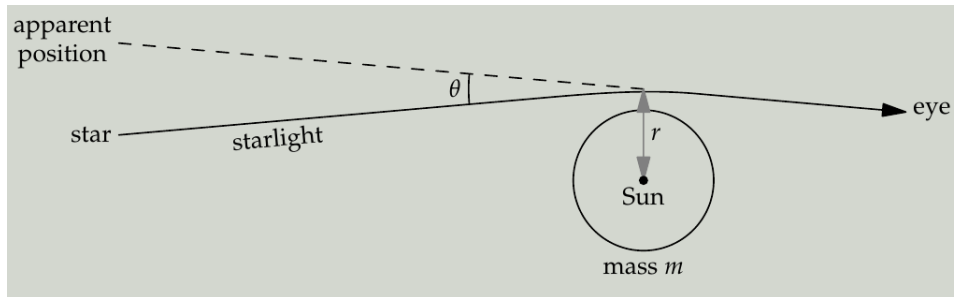
Objasnit ćemo značenje svakog od ovih koraka i primijeniti ga na naš slučaj.

1) Određivanje parametara. Skretanje svjetlosne zrake znači da se zvijezda pomiče u svoj prividni položaj, dok je stvarni položaj zaklonjen Suncem (gledano sa Zemlje). Naš cilj je izračunati kut θ (v. sliku 18). Prema tome, θ je jedna relevantna veličina koja nema fizikalnu dimenziju, njena dimenzija je dimenzija broja, tj. 1. Sljedeće dvije relevantne veličine su masa Sunca m i gravitacijska konstanta G . Utjecaj gravitacije Sunca zapravo dolazi kroz produkt Gm čija je dimenzija L^3T^{-2} . Kao što smo već ranije komentirali, zakrivljenost prostora odnosno gravitacija slabi s udaljenošću od Sunca, a njen utjecaj na zraku je najveći kad je zraka najbliže Suncu. Ima smisla uvesti i parametar r koji mjeri najmanju udaljenost zrake od Sunca. Dakle, relevantni parametri su:

| | | |
|----------|-------------|---------------------------|
| θ | 1 | kut |
| Gm | L^3T^{-2} | gravitacija |
| r | L | udaljenost zrake od Sunca |

2) Određivanje nezavisne bezdimenzionalne grupe parametara. Bezdimenzionalna grupa parametara je produkt oblika $g = p^r q^s r^t$, gdje su p, q, r parametri generatori grupe,

Slika 18: Prividno skretanje svjetlosne zrake pod utjecajem Sunca.



a r, s, t realni brojevi takvi da je g bezdimenzionalna veličina. Grupa parametara je nezavisna ako se jedna grupa ne može prikazati kao produkt drugih grupa ili njihovih generatora.

U našem slučaju jedna grupa je kut θ jer je taj parametar bezdimenzionalan. Najopćenitiji zakon vezan uz tu grupu je $\theta = \text{const}$. Taj je zakon apsurdan jer ako je kut θ uzrokovan gravitacijom on mora biti funkcija od Gm i r . Te dvije fizikalne veličine trebale bi ući u drugu grupu parametara ali zbog T^{-1} u dimenziji od Gm , ta dimenzija ne može biti kompenzirana s r .

Pitanje: Što još nedostaje?

Nedostaje još jedna fizikalna veličina, a to je brzina svjetlosti c čija je dimenzija LT^{-1} . Novi relevantni parametri su:

| | | |
|----------|-------------|---------------------------|
| θ | 1 | kut |
| Gm | L^3T^{-2} | gravitacija |
| r | L | udaljenost zrake od Sunca |
| c | LT^{-1} | brzina svjetlosti |

a bezdimenzionalna grupa parametara je sada Gm/rc^2 .

Interpretacija grupe Gm/rc^2 je sljedeća. Fizikalna veličina Gm sama za sebe ne znači je li gravitacija slaba ili jaka, tj. može li se zanemariti ili ne u odnosu na neku drugu fizikalnu veličinu. Stoga je važno usporediti ju s nekom drugom fizikalnom veličinom iste dimenzije, a to je ovdje rc^2 . Ta usporedba vodi na bezdimenzionalni omjer Gm/rc^2 .

Pitanje: Može li se formirati još neki par bezdimenzionalnih grupa?

Može. Na primjer, θ i $Gm\theta/rc^2$ također čini skup nezavisnih bezdimenzionalnih grupa. S matematičkog gledišta svi parovi nezavisnih bezdimenzionalnih grupa su ekvivalentni jer svaki par može generirati bilo kakvu kvantitativnu tvrdnju o savijanju zrake. Naime, ako je naš cilj izračunati θ i ako se on pojavljuje u svakoj grupi onda ćemo iz svake kvantitativne tvrdnje, koja (do na faktor) izjednačava te dvije grupe, moći implicitno izračunati θ . Iako je račun legitiman, mnogo je teže razmišljati na taj način i rješavati takvu jednadžbu nego kad se θ pojavljuje samo na lijevoj strani.

Iz tog razloga, kod odabira nezavisne bezdimenzionalne grupe, ciljnu varijablu, to je ovdje θ , treba ostaviti samo u jednog grupi. Takvo grubo pravilo ne umanjuje našu slobodu u kreiranju grupa, ali uveliko olakšava naš izbor.

Zadatak: *Formirajte novu bezdimenzionalnu grupu koj nastaje množenjem grupe Gm/rc^2 s m_c/m_c , gdje je m_c masa fotona. Grupirajte veličine dok se ne dobije fizikalna interpretacija brojnika i nazionika.*

3) Formuliranje bezdimenzionalne tvrdnje. Treći korak je iskoristiti bezdimenzionalne grupe i zapisati najopćenitiju tvrdnju o savijanju zrake. Oblik takve tvrdnje je: $g_1 = f(g_2)$ što u našem slučaju vodi na jednadžbu

$$\theta = f\left(\frac{Gm}{rc^2}\right)$$

gdje je f realna funkcija realne varijable. Analiza dimenzija ne može dati oblik funkcije f . To je zvan njenog dosega. Ono što nam je donijela ta analiza je to da je kut θ funkcija od varijable Gm/rc^2 , a ne od 4 varijable (G, m, r, c). Ta informacija je veliko pojednostavljenje.

4) Sužavanje složenosti uz pomoć fizikalnog znanja. Fizikalna intuicija o gravitaciji nam sugerira da povećavanje mase m povećava i kut otklona θ što upućuje na monotonost od f . Ne treba isključiti niti antigravitaciju, tj. kad masa odbija zraku. U tom slučaju kut θ bi bio negativan, što isključuje sve parne funkcije. Najjednostavnija funkcija koja udovoljava ovim zahtjevima je

$$\theta = \alpha \frac{Gm}{rc^2}, \quad \alpha > 0,$$

ili, grubo govoreći, kut skretanja zrake proporcionalan je s m/r jer su G i c nepromjenjive veličine. Razne teorije daju različite vrijednosti za faktor α . Vrijednost faktora $\alpha = 2$ daje otklon za Newtonovu gravitaciju računajući trajektoriju materijalne čestice koja prolazi blizu Sunca brzinom svjetlosti. Vrijednost $\alpha = 4$ daje odgovor za slučaj opće teorije relativnosti (Clifford, 2015) i potvrđena je Eddingtonovim i drugim mjerenjima. Dakle,

$$\theta = \frac{Gm}{rc^2} \times \begin{cases} 1 & \text{(usputna pretpostavka)} \\ 2 & \text{(Newtonova gravitacija)} \\ 4 & \text{(opća teorija relativnosti).} \end{cases}$$

Pitanje: *Koliko su veliki ti kutevi i mogu li se eksperimentalno mjeriti?*

Izračunajmo prvo kut otklona za ako zraka prolazi tik uz Zemlju ($\alpha = 1$).

$$\theta_{\text{Zemlja}} \sim \frac{\overbrace{6.7 \times 10^{-11} \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}}^G \times \overbrace{6 \times 10^{24} \text{kg}}^{m_{\text{Zemlja}}}}{\underbrace{6.4 \times 10^6 \text{m}}_{R_{\text{Zemlja}}} \times \underbrace{10^{17} \text{m}^2 \text{s}^{-2}}_{c^2}} \approx 0.7 \times 10^{-9} \quad (\text{radijana}).$$

Teleskop dijametra D u stanju je razlikovati kuteve koji nisu manji od λ/D , gdje je λ valna duljina svjetlosti. Za dobivenu vrijednost θ_{Zemlja} dijametar leće teleskopa trebao bi biti u promjeru bar 700 metara:

$$D \sim \frac{\lambda}{\theta_{\text{Zemlja}}} \sim \frac{0.5 \times 10^{-6} m}{0.7 \times 10^{-9}} \approx 700 m.$$

Najveći teleskopi imaju leće dijametra oko 1m; najveći zrcalni teleskopi imaju zrcala oko 10 metara, što znači da gore izračunato skretanje zrake pri prolasku kraj planete Zemlje nije moguće detektirati²⁷.

Druga je mogućnost tražiti jači izvor gravitacije, a to je Sunce. Kako je kut skretanja proporcionalan s m/r onda je

$$\frac{\theta_{\text{Sunce}}}{\theta_{\text{Zemlja}}} = \frac{m_{\text{Sunce}}}{m_{\text{Zemlja}}} \times \left(\frac{R_{\text{Sunce}}}{R_{\text{Zemlja}}} \right)^{-1} \approx 3000,$$

a najmanja leća koja bi bila u stanju dektektirati θ_{Sunce} trebala bi biti oko 25 centimetara ili 10 inča u promjeru. Eddington je imao 13-inčne leće što je veće od 33 cm.

U početku je Einstein (1911) bio uvjeren da će opća teorija relativnosti dati vrijednost kao i Newtonova, a to je $4.2 \cdot 10^{-6}$ radijana ili $0.87''$:

$$\underbrace{0.7 \times 10^{-9} \text{ rad}}_{\theta_{\text{Zemlja}}} \times \underbrace{2}_{\text{Newton}} \times \underbrace{3000}_{\theta_{\text{Sunce}}/\theta_{\text{Zemlja}}} \sim 4.2 \times 10^{-6} \text{ rad}.$$

Eddington je izmjerio dvostruku vrijednost što se poklapalo s drugim po redu Einsteino-
vim izračunom (1915).

Literatura

- Clifford, M. W. (2015). The 1919 measurement of the deflection of light. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124001.
- Dieks, D. (2014a). The Adolescence of Relativity: Einstein, Minkowski, and the Philosophy of Space and Time. In Ashtekar, A. and Petkov, V., editors, *Springer Handbook of Spacetime*, pages 225–245. Springer, Dordrecht.
- Dieks, D. (2014b). Time in Special Relativity. In Ashtekar, A. and Petkov, V., editors, *Springer Handbook of Spacetime*, pages 91–113. Springer, Dordrecht.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. Phys.*, 17:891–921.
- Fox, C. W. (2016). The Newtonian Equivalence Principle: How the Relativity of Acceleration Led Newton to the Equivalence of Inertial and Gravitational Mass. *Philosophy of Science*, 83(5):1027–1038.

²⁷Današnji radioteleskopi su daleko precizniji jer se mjerenja vrše na način da se kombinira više teleskopa zajedno.

- Frercks, J. (2003). Creativity and Technology in Experimentation: Fizeau's Terrestrial Determination of the Speed of Light. *Centaurus, Wiley Online Library*, 42(4):249–287.
- Hertz, E. (1893). *Electric Waves Being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity Through Space*. MacMillan. Prijevod s njemačkog: D. E. Jones, reprint (Dover, 1962).
- Janis, A. (2018). Conventionality of Simultaneity. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2018 edition.
- Kak, S. (2011). The nature of light in Indian epistemology. In Roychoudhuri, C., Khrennikov, A. Y., and Kracklauer, A. F., editors, *The Nature of Light: What are Photons? IV*, volume 8121, pages 534 – 541. International Society for Optics and Photonics, SPIE.
- Lorentz, H. A. (1921). Deux mémoires de henri poincaré sur la physique mathématique. *Acta Math.*, 38:293–308.
- Mahajan, S. (2014). *he Art of Insight in Science and Engineering: Mastering Complexity*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Maxwell, J. C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans. R. Soc.*, (55):1459–512.
- Maxwell, J. C. (1873). *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon, Oxford.
- Milne, E. (1935). *Relativity, Gravitation and World-Structure*. Oxford Univ. Press, Oxford.
- Minkowski, H. (1908). Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen*, page 53–111.
- Minkowski, H. (1909). Raum und Zeit. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, (18):75–88.
- Newton, I. (1684). De motu corporum in gyrum. <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-DD-00009-00046/1>.
- Newton, I. (1685). De motu corporum in gyrum – Liber Secundus. Neobjavljeni prijevod od George Smitha. <http://https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03990/1>.
- Newton, I. (1687). *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Pepys Press, London. Englesko izdanje 1728, reprint Mathematical Principles of Natural Philosophy, Greenwood Press, 1969, web izdanje latinski: <http://www.gutenberg.org/files/28233/28233-h/28233-h.htm>, engleski: <https://ebooks.adelaide.edu.au/n/newton/isaac/mathematical-principles-of-natural-philosophy/>.
- Pechenkov, A. (2006). The new sight on the Hertz electrodynamics of a moving bodies.
- Poincaré, H. (1904). L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, (28):302–324.
- Trumpler, R. J. (1929). The Relativity Deflection of Light. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 41(239):23–34.

von Eötvös, R., Pekár, D., and Fekete, E. (1922). Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit and Gravität. *Annalen der Physik*, 68(11). English translation for the U. S. Department of Energy by J. Achzenter, M. Bickeböller, K. Bräuer, P. Buck, E. Fischbach, G. Lubeck, C. Talmadge, University of Washington preprint 40048-13-N6. - More complete English text reprinted earlier in *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominata, Sectio Geologica*, 7, 111, 1963.

Whittaker, E. (1951). *A History of the Theories of Aether and Electricity Volume I: The Classical Theories*. Thomas Nelson and Sons, New York.