

Euklid u školi

Nekad i sad

Lavoslav Čaklović

11. rujna 2026.

Osnovni dokument:

<https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/euklid.geom.osnove.pdf>

Alt: [Home page \(Čaklović\)](#) > [Eseji](#) > [Obrazovanje](#) > [Euklid](#)

Elementi (eng. prijevod) s komentarima

<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/elements.html>

ZAHVALA

Zahvaljujem profesorima Mladenu Vukoviću i Borisu Čulini na razgovorima, iscrpnim komentarima i sugestijama. Bez njih ovaj tekst ne bi bio ovo što jest.

Sadržaj

- ① Euklid. Elementi
 - Definicije. Komentari
 - Postulati. Komentari
 - Post.I-1
 - Post.I-2
 - Propozicije. Komentari
 - Prop.I-1
 - Post.I-1 u prop.I-2
 - Aksiomi. Komentari
 - Uputa za čitanje *Elemenata*
- ② Hilbert, Tarsky, Birkhoff
- ③ Mjera na pravcu. Duljina
 - Relacija trokuta
 - Ravna crta
 - Konkatenacija
- Pravac ili eutheia
- Paralela
- Hölderov teorem
- ④ Okomitost
 - Euklidova definicija
 - Pitagorin poučak
 - Obrat Pitagorinog poučka
 - Posljedice PP
- ⑤ Mjerenje kuteva
 - Kut
 - Kosinus
 - Lučna mjera
- ⑥ Pitagora umjesto paralele?
 - Pitagorin trokut
 - Ortogonalnost dužina

Heidegger (*Qué significa pensar?*)

...podučavanje je teže od učenja. Ne zato što bi učitelj trebao imati širinu znanja, podučavanje je teže jer podučavanje znači *dozvoljavanje učenja*. Čak i više od tog: pravi učitelj ostavlja utisak da nije on izvor naučenog, ako pod učenjem podrazumijevamo stjecanje korisnog znanja.

Dozvolio sam si slobodu da se u ovom tekstu ne držim nikakvih ograničenja koja nameću razni kurikulumi. Štoviše, cilj mi je ukazati na njihove nedostatke i pogrešne premise današnje nastave.

Dozvolio sam si slobodu da se u ovom tekstu ne držim nikakvih ograničenja koja nameću razni kurikulumi. Štoviše, cilj mi je ukazati na njihove nedostatke i pogrešne premise današnje nastave.

Imao sam priliku predavati ovo gradivo u petom i šestom razredu osnovne škole i priznajem da su me djeca iznenadila svojim izuzetnim zapažanjima kod uvođenja novih pojmova. Na pitanje: *Čemu služi šestar?* jedno dijete je odgovorilo:

Dozvolio sam si slobodu da se u ovom tekstu ne držim nikakvih ograničenja koja nameću razni kurikulumi. Štoviše, cilj mi je ukazati na njihove nedostatke i pogrešne premise današnje nastave.

Imao sam priliku predavati ovo gradivo u petom i šestom razredu osnovne škole i priznajem da su me djeca iznenadila svojim izuzetnim zapažanjima kod uvođenja novih pojmova. Na pitanje: *Čemu služi šestar?* jedno dijete je odgovorilo:

Šestar pamti udaljenost.

Svaki nastavnik bi na takvom odgovoru ostao bez riječi pa sam tako i ja.

Euklid...



Euklid...

- Rođen u Alexandiji, Egipat, oko 325 g. pne.

Euklid...

- Rođen u Alexandiji, Egipat, oko 325 g. pne.
- *Elementi* najpoznatije djelo (300 g. pne.)

Euklid...

- Rođen u Alexandiji, Egipat, oko 325 g. pne.
- *Elementi* najpoznatije djelo (300 g. pne.)
- Postoji hipoteza da je Euklid historijska ličnost koji je imao svoju školu, a njegovi učenici su pisali dijelove *Elementata* koji su kasnije sakupljeni u knjigu.

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)
- To je niz recepata kako konstruirati geometrijske likove. Definicije su naknadno su dodavane kao zakrpa osnovnog teksta i često nerazumljive. Dokaz znadu biti aljkavi.

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)
- To je niz recepata kako konstruirati geometrijske likove. Definicije su naknadno su dodavane kao zakrpa osnovnog teksta i često nerazumljive. Dokaz znadu biti aljkavi.
- Dijagrami koje Euklid crta nisu suplement logici već dio dokaza.

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)
- To je niz recepata kako konstruirati geometrijske likove. Definicije su naknadno su dodavane kao zakrpa osnovnog teksta i često nerazumljive. Dokaz znadu biti aljkavi.
- Dijagrami koje Euklid crta nisu suplement logici već dio dokaza.
- Šestar i ravnalo su instantizacija ideja u fizičkoj realnosti.

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)
- To je niz recepata kako konstruirati geometrijske likove. Definicije su naknadno su dodavane kao zakrpa osnovnog teksta i često nerazumljive. Dokaz znadu biti aljkavi.
- Dijagrami koje Euklid crta nisu suplement logici već dio dokaza.
- Šestar i ravnalo su instantizacija ideja u fizičkoj realnosti.
- Geometrijske konstrukcije su algoritamske procedure koje osiguravaju egzistenciju objekata.

Elementi

- 13 svezaka. Započinju definicijama, postulatima i aksiomima (*common notions*)
- To je niz recepata kako konstruirati geometrijske likove. Definicije su naknadno su dodavane kao zakrpa osnovnog teksta i često nerazumljive. Dokaz znadu biti aljkavi.
- Dijagrami koje Euklid crta nisu suplement logici već dio dokaza.
- Šestar i ravnalo su instantizacija ideja u fizičkoj realnosti.
- Geometrijske konstrukcije su algoritamske procedure koje osiguravaju egzistenciju objekata.
- Antički grci su njegovali raspravu u formi dijaloga između skeptika i matematičara koji nešto tvrdi. Skeptik sumnja u tvrdnju, a matematičar ga uvjerava uz pomoć šestara i ravnala.



Definicije. Komentari (točka)

Definicija I-1.

$\Sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\tau\omicron\upsilon \epsilon\sigma\tau\iota\nu, \omicron\tilde{\upsilon} \mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma \omicron\upsilon\theta\acute{\epsilon}\nu$

se prevodi kao

Točka je znak koji nema dijelova¹.

Današnji Google prevoditelj kaže: "*It is a sign, where there is no place*", što je prilično dobar prijevod. Kad bi Google prvoditelj znao da se radi o rečenici iz geometrije možda bi $\Sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\tau\omicron\upsilon$ (znak) preveo kao *točka*. Drugim riječima *točka* je naznaka, upozorenje da se tu nešto dešava (presjek, rub nečega). Ona nije mjerljiva ni u kojem smislu.

Definicije. Komentari (dužina)

Definicija I-4.

Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.

Definicije. Komentari (dužina)

Definicija I-4. (autorov prijevod)

*Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.
Dužina je crta koja se ravnomjerno prostire među točkama po sebi.*

Definicije. Komentari (dužina)

Definicija I-4. (autorov prijevod)

*Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.
Dužina je crta koja se ravnomjerno prostire među točkama po sebi.*

Komentar. Drugim riječima, ravna crta lokalno izgleda kao i ona sama.

Uz pomoć metrike (Birkhoff):

Ravna crta

Crta koja povezuje točke A i B je ravna crta ako za svaku točku C na toj crti vrijedi $|AC| + |CB| = |AB|$.

Definicije. Komentari (dužina)

Definicija I-4.

*Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.
Dužina je crta koja se ravnomjerno prostire među točkama po sebi.*

Komentar. Drugim riječima, ravna crta lokalno izgleda kao i ona sama.

Uz pomoć metrike (Birkhoff):

Ravna crta

Crta koja povezuje točke A i B je ravna crta ako za svaku točku C na toj crti vrijedi $|AC| + |CB| = |AB|$.

Formalno gledajući dužina je par točaka (Tarsky).

Definicije. Komentari (krug)

Definicija I-15. (autorov prijevod)

Krug je lik u ravnini obuhvaćen crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne unutrašnje točke međusobno jednake.

(Prop. I-2. Konstrukcija kongruentne dužine iz točke $A \rightarrow$)

Definicije. Komentari (krug)

Definicija I-15. (autorov prijevod)

*Krug je lik u ravnini obuhvaćen **crtom** takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne **unutrašnje** točke međusobno **jednake**.*

- 1 **crtom** — zatvorenom crtom,
- 2 **unutrašnjost lika** vs. vanjšina lika,
- 3 **jednakost** dužina.

(Prop. I-2. Konstrukcija kongruentne dužine iz točke $A \rightarrow$)

Definicije. Komentari (krug)

Definicija I-15. (autorov prijevod)

Krug je lik u ravnini obuhvaćen crtom takvom da su sve dužine koje padaju na nju iz jedne unutrašnje točke međusobno jednake.

- 1 **crtom** — zatvorenom crtom,
- 2 **unutrašnjost lika** vs. vanjšina lika,
- 3 **jednakost** dužina.

Euklid dužine smatra jednakima ako su polumjeri istog kruga. Njegov šestar ne služi za "prenošenje" dužina. Zamislite njegov šestar kao šestar koji se zatvara nakon što je nacrtao krug.

(Prop. I-2. Konstrukcija kongruentne dužine iz točke $A \rightarrow$)

Postulati. Komentari

Postulat. I-1.

Kroz bilo koje dvije točke moguće povući segment (dužinu).

Iako nije eksplicitno rekao da je **segment jedinstveno određen** s njegove dvije krajnje točke on to podrazumijeva u dokazima teorema i propozicija.

U sfernoj geometriji, na primjer, to nije istina za dijametralno suprotne točke.

Postulati. Komentari

Postulat. I-2.

Dužinu je moguće neprekidno produljiti (u dužinu).

Postulati. Komentari

Postulat. I-2.

Dužinu je moguće neprekidno produljiti (u dužinu).

Neprekidno?

Postulati. Komentari

Postulat. I-2.

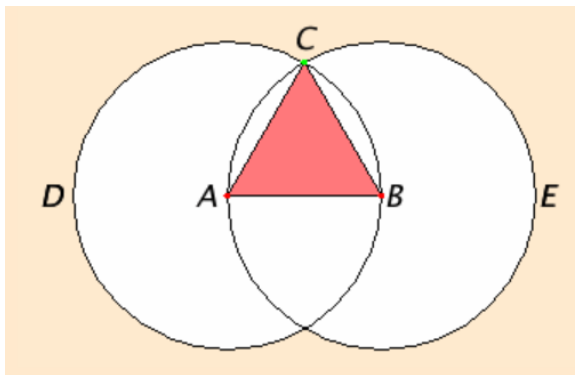
Dužinu je moguće neprekidno produljiti (u dužinu).

Neprekidno? Aristotel naglašava da neprekidnost nije atribut neke veličine; on ne govori o neprekidnoj cjelini već o neprekidnom dodiru dijelova koji čine cjelinu. Neprekidnost, po njemu, je relacija među stvarima koje graniče¹.

¹ Tu ideju razvija Leibniz u svom rukopisu *Specimen geometriae luciferae* (1690) i još nekima. To je prvi rukopis koji problem kontinuiteta stavlja u sam centar rasprave o tom bazičnom pojmu. Leibnizov pojam neprekidnosti je toliko apstraktan za ono doba i uključuje ono što bismo danas nazvali

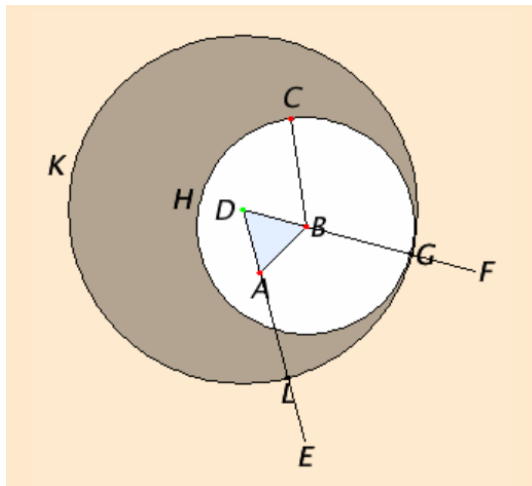
Komentar uz propoziciju P. I-1

Problem. Konstruirati jednakostraničan trokut nad $\overline{AB}$.



Komentar uz propoziciju P. I-2

Zadano: $\overline{CB}$. Konstruirati jednaku dužinu s krajem u A.



Aksiomi ili opća pravila razumijevanja

- PR-1 Stvari koje su jednake istoj (stvari) su također jednake (tranzitivnost).
- PR-2 Ako jednakim (stvarima) dodamo jednake, tada su i cjeline jednake (aditivnost konkatencije).
- PR-3 Ako jednako izdvojimo iz jednakih (stvari), preostalo je jednako.
- PR-4 Stvari koje se preklapaju su međusobno jednake.
- PR-5 Cjelina je veća od (njenog) dijela.

PR-1, PR-2 i PR-3 bila su poznata još u doba Eudoxa i Aristotela.

Intuitivno su jasna ako imate u glavi neki model. Inače su totalno zbunjujuća; ne znamo **što je cjelina**, što je **dio** i što znači **dodati** ili **oduzeti**. Model je potreban, iz jednostavnog razloga što se naše apstraktno razmišljanje ipak bazira na pojedinostima.

Uputa za čitanje *Elementata*

Uputa 1. Euklid razlikuje **teorem** od **problema**.

Tvrdnja (**teorem**)

Postoji jednakostraničan trokut proizvoljno zadane stranice.

Tvrdnja (**problem**)

Konstruirati jednakostranični trokut zadane stranice.

To se vidi na kraju svake propozicije (u latinskom ili današnjem prevodu) gdje piše jedno od dvoga:

QED (quod erat demonstrandum) — što je trebalo dokazati ili
QEF (quod erat faciendum) — što je trebalo učiniti.

Uputa za čitanje *Elemenata*

Uputa 2.

Ako uspoređujemo (suvremeni) Hilbertov pristup i Euklidov pristup geometriji onda je među njima suštinska razlika.

Hilbert započinje aksiomima, a nakon toga ga zanima egzistencija.

Euklida prvotno zanima konstrukcija, a postulati i propozicije su algoritamski procesi koji omogućavaju materijaliziraju zamisli. Materijalizaciju osiguravaju šestar i ravnalo.

Uputa za čitanje *Elemenata*

Uputa 2.

Ako uspoređujemo (suvremeni) Hilbertov pristup i Euklidov pristup geometriji onda je među njima suštinska razlika.

Hilbert započinje aksiomima, a nakon toga ga zanima egzistencija.

Euklida prvotno zanima konstrukcija, a postulati i propozicije su algoritamski procesi koji omogućavaju materijaliziraju zamisli. Materijalizaciju osiguravaju šestar i ravnalo.

Ne postoji Hilbert bez Euklida.

Uputa za čitanje *Elemenata*

Uputa 2.

Ako uspoređujemo (suvremeni) Hilbertov pristup i Euklidov pristup geometriji onda je među njima suštinska razlika.

Hilbert započinje aksiomima, a nakon toga ga zanima egzistencija.

Euklida prvotno zanima konstrukcija, a postulati i propozicije su algoritamski procesi koji omogućavaju materijaliziraju zamisli. Materijalizaciju osiguravaju šestar i ravnalo.

Ne postoji Hilbert bez Euklida.

Ako promatramo Euklida suvremenim očima vidjeti ćemo samo nedostatke.

Uputa za čitanje *Elementata*

Uputa 2.

Ako uspoređujemo (suvremeni) Hilbertov pristup i Euklidov pristup geometriji onda je među njima suštinska razlika.

Hilbert započinje aksiomima, a nakon toga ga zanima egzistencija.

Euklida prvotno zanima konstrukcija, a postulati i propozicije su algoritamski procesi koji omogućavaju materijaliziraju zamisli. Materijalizaciju osiguravaju šestar i ravnalo.

Ne postoji Hilbert bez Euklida.

Iz tog razloga je poučavanje geometrije izuzetno težak zadatak.

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

(1) Primitivni objekti.

Hilbert Točke, pravci, ravnine, prostor

Tarsky Točke, ravnine (skupovi) (A, σ) .

Birkhoff Točke, pravci, kutevi (u ravnini)

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

(2) Relacije.

Hilbert Pravac određen točkama. Ravnina određena točkama (pravcima). Između. Kongruentnost (segmenata, kuteva) — primitivna relacija.

Tarsky Između, ekvidistantnost (dužina)

Birkhoff Segment, zraka, trokut

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

(3) Postulati.

Hilbert Postulati kongruencije. Euklidov V postulat. Verizija SAS za kuteve.

Tarsky SAS (side-angle-side) za trokute.

Birkhoff Duljina segmenta (PI), jedan pravac kroz dvije točke (PII), mjera kuta (PIII), sličnost trokuta (PIV)

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

(4) Sličnosti i razlike. Za razliku od Hilbertovog pristupa Birkhoffov je baziran na metrici i prikladniji je današnjem obrazovnom sustavu. Metričku strukturu na točkama određuje ravnalo, odnosno realni brojevi, a na pravcima (kutevima) kutomjer.

Hilbert, Tarsky, Birckhoff

Ono po čemu se razlikuju zasnivanja geometrije raznih autora su (1) primitivni objekti (varijable) (2) odnosi (relacije) među njima i (3) logički obrazac konstrukcije novih objekata i njihovih međusobnih odnosa (postulati).

Cilj svake od njih je opravdati sve ono o čemu govore *Elementi*, bar za početak.

(4) Sličnosti i razlike. Tarsky. Predavanja tijekom 1926-27 u Varšavi, koja su finalizirana od Szmielewa i Schwabhäusera 1983. Za razliku od Hilbertovih aksioma, Tarskyjev sustav je prvog reda što znači da se ne kvantificira po relacijama, funkcijama ili nekim svojstvima već se koriste samo kvantifikatori $\forall$ (za svaki) i $\exists$ (postoji) na primitivnim varijablama (točkama).

Relacija trokuta (P.I-20)

Pitanje. Kako ustanoviti je li neka točka leži na zadanoj dužini?

Intuitivno prihvaćamo:

(A) *Točka ne leži na zadanoj dužini ako s krajevima te dužine čini trokut,*

(B) *Točka C leži na zadanoj dužini $\overline{AB}$ ako je*

$$|AC| + |CB| = |AB|. \quad (1)$$

Dakle:

Relacija trokuta.

Za svake tri točke A, B, C vrijedi nejednakost²

$$|AC| + |CB| \geq |AB|$$

²kao i za njihovu cikličku zamjenu.

Ravna crta

Euklid definira (D.I-2) crtu kao nešto što ima duljinu ali nema širinu, ali pojmove "širina" i "duljina" ne objašnjava, dok "ravnu crtu" shvaća kao

crtu koja se ravnomjerno prostire među točkama po sebi.

Ovo je više opis nego definicija. Ako se dužina želi definirati to se može učiniti uz pomoć metrike koju Euklid nije imao.

Ravna crta (bis).

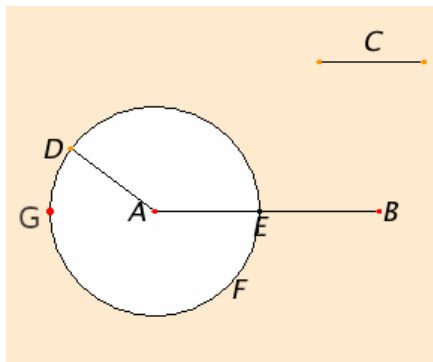
Crta koja povezuje točke A i B je ravna crta ako za svaku točku C na toj crti vrijedi $|AC| + |CB| = |AB|$.

Posljedica ovakve definicije je da:

- (1) dva segmenta, ako se sijeku, sijeku se u jednoj točki
- (2) ako je C točka na segmentu $\overline{AB}$, onda su segmenti $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ podsegmenti od $\overline{AB}$.

Konkatenacija (nadovezivanje a o b)

Ideja za takvu konstrukciju već se nalazi u propoziciji [P.I-3](#) gdje Euklid "oduzima" jednu dužinu od druge.



Što se produživanja tiče, dovoljno je točki E odrediti dijametralno suprotnu točku G na kružnici F .

Pravac ili *eutheia*

Antički grci nisu imali pojam 'beskonačno' i ako kažemo da je pravac beskonačna ravna crta, onda **takvo nešto ne postoji u Euklidovoj geometriji**. U tom smislu nema smisla reći da je pravac produljenje dužine jer je produljenje dužine opet dužina.

Pravac ili *eutheia*

Antički grci nisu imali pojam 'beskonačno' i ako kažemo da je pravac beskonačna ravna crta, onda **takvo nešto ne postoji u Euklidovoj geometriji**. U tom smislu nema smisla reći da je pravac produljenje dužine jer je produljenje dužine opet dužina.

Kiselman (2015) također potvrđuje tu tezu. Termin koji je Euklid koristio za 'ograničenu ravnu crtu' je *eutheia* i to se eksplicitno vidi iz njegove definicije **D. I-4** iz prve knjige *Elementata*.

(nastavak)

Pravac ili *eutheia* (bis)

Također, u propoziciji [P. I-12](#), u kojoj je opisan postupak crtanja okomice na pravac, *eutheia* poprima prefiks *apeiros* što se može prevesti kao 'beskonačno', 'bez granice' ili 'neodređeno' i taj prefiks bi bio nepotreban kad bi *eutheia* značilo 'pravac'.

Pravac ili *eutheia* (bis)

Također, u propoziciji [P. I-12](#), u kojoj je opisan postupak crtanja okomice na pravac, *eutheia* poprima prefiks *apeiros* što se može prevesti kao 'beskonačno', 'bez granice' ili 'neodređeno' i taj prefiks bi bio nepotreban kad bi *eutheia* značilo 'pravac'.

Međutim, u dokazu propozicije [P. I-22](#), *eutheia* odjednom znači zraka što se lako može ustanoviti u paralelnom grčko-engleskom prijevodu (Heiberg, 1885).

Pravac ili *eutheia* (bis)

Također, u propoziciji [P. I-12](#), u kojoj je opisan postupak crtanja okomice na pravac, *eutheia* poprima prefiks *apeiros* što se može prevesti kao 'beskonačno', 'bez granice' ili 'neodređeno' i taj prefiks bi bio nepotreban kad bi *eutheia* značilo 'pravac'.

Međutim, u dokazu propozicije [P. I-22](#), *eutheia* odjednom znači zraka što se lako može ustanoviti u paralelnom grčko-engleskom prijevodu (Heiberg, 1885).

U postulatu [p. I-2](#) koji glasi:

Dužinu je moguće neprekidno produljiti (u dužinu),

korišten je termin *eutheia* za ono što se produljuje, a to nikako nije pravac. Iz toga također zaključujemo da *eutheia* znači ograničena ravna crta.

Paralela

Euklidova definicija (Def I-23).

Paralelne su one dužine koje su u istoj ravnini i koje se, neograničeno³ produžene u oba smjera, međusobno ne sastaju ni u jednom smjeru.

Nedostatak definicije je taj što nije operabilna. Ona gleda što je s one strane konačnog.

Postulat I-5 (kad nisu paralelne)

Ako jedna dužina siječe druge dvije dužine tako da je zbroj kuteva s iste strane tih dužina manji od dva prava kuta, tada se produljenja tih dviju dužina sijeku s one strane polazne dužine gdje je zbroj unutarnjih kuteva manji od dva prava kuta.

³ neprekidno, uzastopno

Hölderov teorem

Neka je $(S, \succcurlyeq, \circ)$ relacijska struktura: S — skup objekata, $\succcurlyeq$ relacija (dulji, masivniji, topliji) i $\circ$ operacija nadovezivanja. U našem slučaju radi se o segmentima na pravcu.

Mjera $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ naziva se **ekstenzivna mjera** ako

$$\forall a, b, a \succcurlyeq b \iff \mu(a) \geq \mu(b), \quad (2)$$

$$\forall a, b, \mu(a \circ b) = \mu(a) + \mu(b). \quad (3)$$

Egzistenciju ekstenzivne mjere osigurava Hölderov teorem (1911) (Roberts and Luce, 1968, str. 122). Jedan od uvjeta teorema je Arhimedov aksiom u formi:

Za svaka dva elementa $a, b \in S$

$$2a \succ a \implies \text{postoji broj } n \text{ tako da } na \succ b,$$

gdje se na definira rekurzivno; $1a = a$ i $na = (n-1)a \circ a$.

Okomitost

U udžbenicima za osnovnu školu naići ćete na definiciju:

Kažemo da su pravci okomiti ako dijele ravninu na četiri jednaka dijela.

Ta je definicija i pojmovno i metodološki nekorektna.

Okomitost

U udžbenicima za osnovnu školu naići ćete na definiciju:

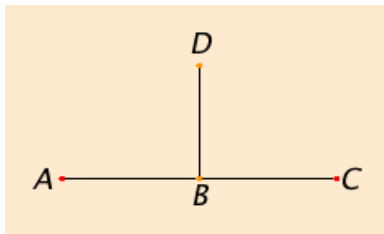
Kažemo da su pravci okomiti ako dijele ravninu na četiri jednaka dijela.

Ta je definicija i pojmovno i metodološki nekorektna.

Kao prvo, **nije jasno što se podrazumijeva pod jednakošću dijelova ravnine**. Svaka dva pravca koja imaju zajedničku točku, a nisu identična, dijele ravninu na četiri dijela. Ako se pod "jednakošću" misli na njihov kardinalitet, onda je to istina, ali u tom slučaju se svaka dva pravca sijeku pod pravim kutem.

Okomitost. Euklidova definicija

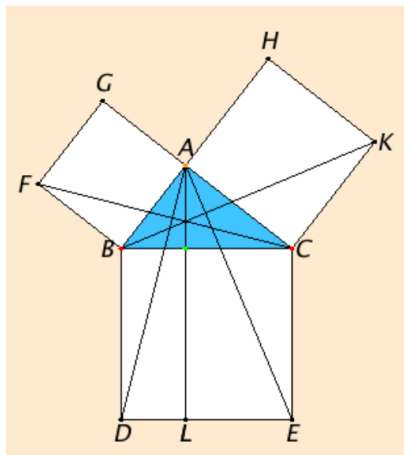
Kad jedna dužina stoji u odnosu na drugu dužinu tako da su susjedni kutevi jednaki, svaki od tih kuteva nazivamo pravim kutem, a prva dužina je okomica na drugu.



Euklid **ne definira jednakost kuteva** ali **postulira jednakost pravih kuteva** što je nepotrebno. Proclus ga je dokazivao, a slijedi i iz tvrdnje da su suplementi jednakih kuteva jednaki koju je Euklid mogao dokazati bez pozivanja na pravi kut ([Prop.I-15](#)).

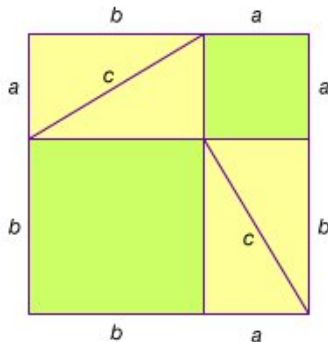
Pitagorin poučak (Prop. I-47)

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama ako i samo ako je trokut pravokutan.

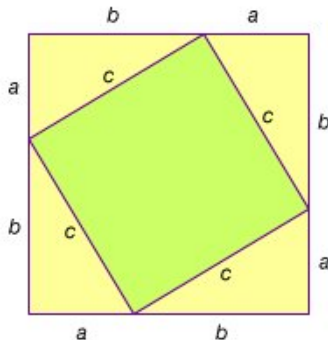


Pitagorin poučak (Prop. I-47)

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama ako i samo ako je trokut pravokutan.



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.



Pitagorin poučak (Prop. I-47)

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama ako i samo ako je trokut pravokutan.

Poznato je oko 400 dokaza Pitagorinog teorema, a jedan među njima je i Einsteinov.

Pitagorin poučak (Prop. I-47)

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama ako i samo ako je trokut pravokutan.

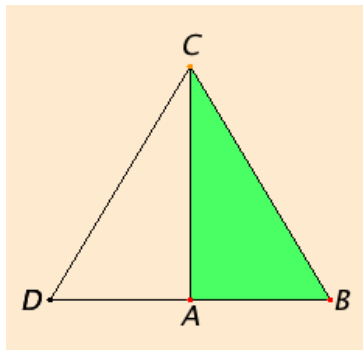
Poznato je oko 400 dokaza Pitagorinog teorema, a jedan među njima je i Einsteinov.

Neki povjesničari matematike tvrde da **nigdje u *Elementima* Euklid ne govori da je površina kvadrata jednaka kvadratu stranice⁴.**

U tom smislu, dokazi Pitagorinog poučka koji koriste formulu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nisu u Euklidovom duhu.

⁴ Kad bi Euklid shvaćao kvadrat nad stranicom kao broj onda bi dokaz propozicije P.III-2 u kojem dokazuje da je krug konveksan uz pomoć Pitagorinog poučka bio gotov u dva reda.

Obrat Pitagorinog poučka (P. I-48)



Pretpostavka:

$$\triangle CAB, b^2 + c^2 = a^2.$$

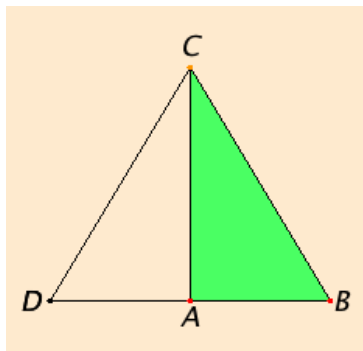
Konstruira se pravokutan $\triangle DAC$ tako da $|AD| = |AB|$.

Tada:

$$|AD|^2 + |AC|^2 = |DC|^2 \implies |DC| = a$$

odnosno $\triangle CAB \equiv \triangle DAC$ i kut $\angle BAC$ je pravi kut. $\square$

Obrat Pitagorinog poučka (P. I-48)



Pretpostavka:

$$\triangle CAB, b^2 + c^2 = a^2.$$

Konstruira se pravokutan $\triangle DAC$ tako da $|AD| = |AB|$.

Tada:

$$|AD|^2 + |AC|^2 = |DC|^2 \implies |DC| = a$$

odnosno $\triangle CAB \equiv \triangle DAC$ i kut $\angle BAC$ je pravi kut. $\square$

Ova propozicija može poslužiti za konstrukciju okomice.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

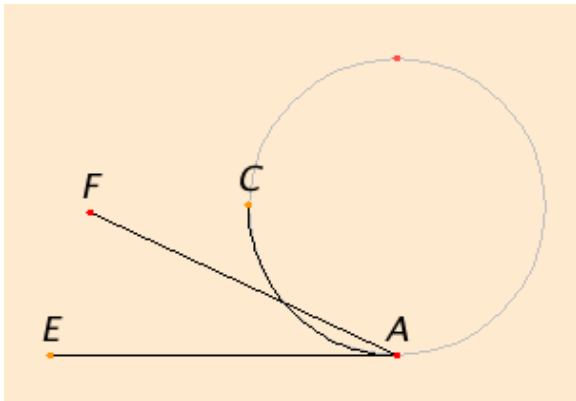
Neke posljedice Pitagorinog poučka

- Može poslužiti kao test okomitosti pravaca.
- Jedinstvenost okomice.
- Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.
- V Euklidov postulat.
- Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.
- Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.
- Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

Definicija kuta

(Elementi Def. I-8))

Ravninski kut je nagib između dviju linija u ravnini koje se sijeku i ne leže na istoj dužini. (Oznaka $\angle FAE$ ili $\angle A$)



Definicija kuta

Nagib je sinonim za kut i Euklidova definicija je u tom smislu cirkularna.

Suvremena definicija uvodi (neorijentirani) kut kao **par zraka (p, q) koje emaniraju iz zajedničke točke**. To je Hilbertov pristup.

U današnjim udžbenicima uglavnom nalazimo definiciju da je kut ***dio ravnine omeđen s dva pravca koji se sijeku***.

Problem s jednom i drugom definicijom je da takve kuteve ne možemo direktno niti uspoređivati niti mjeriti.

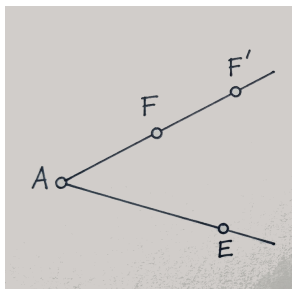
Ako želimo mjeriti kuteve moramo ih definirati na omeđenoj konfiguraciji.

Definicija kuta

A zašto ne ovako? Kut kao klasa.

3-kut $\angle FAE$ je određen s tri točke. Točka A je vrh kuta, a dužine $\overline{AF}$ i $\overline{AE}$ su rubne dužine.

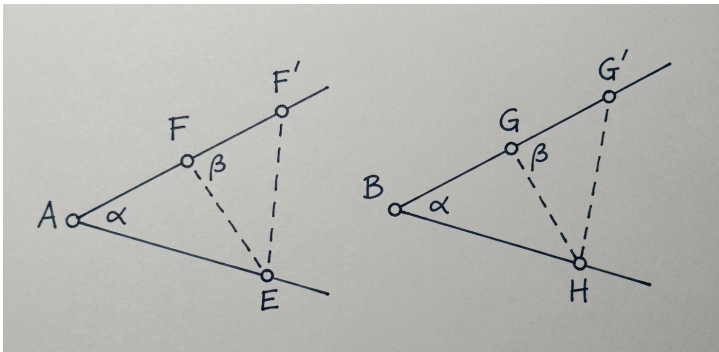
3-kutevi $\angle FAE$ i $\angle F'AE'$ su jednaki ako su rubne dužine jednog kuta proširenja/suženja rubnih dužina drugog kuta.



Kut je klasa jednakih 3-kuteva.

Kut kao element trokuta

Kažemo da su kutevi $\angle FAE$ i $\angle GBH$ jednaki ako i samo ako za točke E, B, G, H na rubnim zrakama tih kuteva jednakosti $|FA| = |GB|$ & $|EA| = |HB|$ imaju za posljedicu $|FE| = |GH|$. (Neovisnost o položaju točaka na zraci?)



Kosinus

Definicija (Ideja (Euklid) P. II-12 i P. II-13)

Kao mjeru kuta $\angle A$ uz točku A u trokutu $\triangle ABC$ uzimamo broj

$$|\angle A| = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} \quad (4)$$

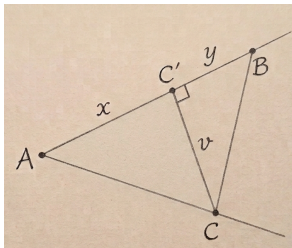
Ova mjera mjeri odstupanje kuta od pravog kuta.

Kosinus

Definicija (Ideja (Euklid) P. II-12 i P. II-13)

Kao mjeru kuta $\angle A$ uz točku A u trokutu $\triangle ABC$ uzimamo broj

$$|\angle A| = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} \quad \left(= \frac{x}{b} \right) \quad (4)$$

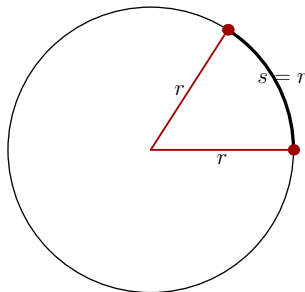


Dokaz (formule (4)).

$$\begin{aligned} |\angle A| &= x^2 + v^2 = b^2, v^2 + y^2 = a^2, c = x + y, \\ &= \frac{(x + y)^2 + x^2 + v^2 - v^2 - y^2}{2(x + y) \cdot b} \\ &= \frac{x}{b}. \end{aligned}$$

Lučna mjera (Thompson (1873))

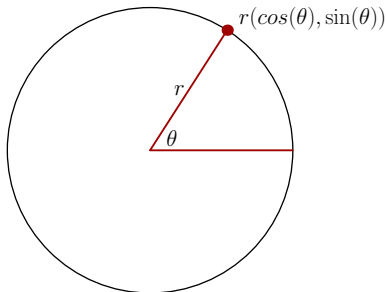
$$\theta := s/r,$$



Je li kut broj ili nešto geometrijsko? Što je "jedinični" kut?

Lučna mjera (Thompson (1873))

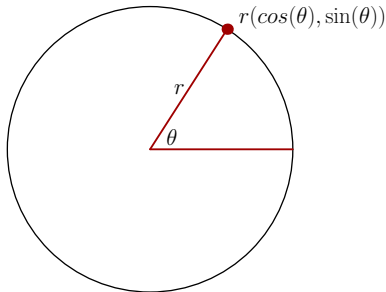
$$\theta := s/r,$$



Kut je jednoznačno određen s dvije mjere.

Lučna mjera (Thompson (1873))

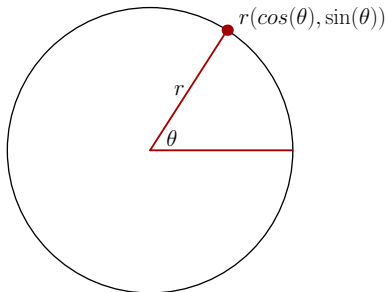
$$\theta := s/r,$$



Kako izračunati duljinu luka kružnice?.

Lučna mjera (Thompson (1873))

$$\theta := s/r,$$



Je li to definicija kuta ili transcendentnih funkcija *sin* i *cos*?

Pitagorin trokut

Cilj ovog odjeljka je zasnovati euklidsku geometriju na Pitagorinom pučku kao zamjeni za V postulat o paralelama i iz takvog sustava izvesti V postulat ili nešto ekvivalentno.

Pitagorin poučak je moćan alat. Omogućava računanje udaljenosti točaka u ravnini, mjerenje kuteva i površina raznih geometrijskih likova.

Def. Pitagorin trokut

Neka su dane dvije dužine $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ sa zajedničkom točkom C . Kažemo da je trokut $\triangle ACB$ *Pitagorin trokut* i kut $\angle C$ trokuta je *pravi kut* ako vrijedi

$$|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2 \quad (5)$$

Ortogonalnost dužina

Teorem A

Neka je trokut $\triangle ACB$ pravokutan i a, b bilo koja dva produženja dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Tada je za svake dvije točke $A' \in a$ i $B' \in b$ trokut $\triangle A'CB'$ Pitagorin trokut.

Ortogonalnost dužina

Teorem A

Neka je trokut $\triangle ACB$ pravokutan i a, b bilo koja dva produženja dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Tada je za svake dvije točke $A' \in a$ i $B' \in b$ trokut $\triangle A'CB'$ Pitagorin trokut.

Dokaz. Je li potreban neki novi postulat za dokaz (ako je)?
Nešto neovisno o V postulatu. Sličnost?

Ortogonalnost dužina

Teorem A

Neka je trokut $\triangle ACB$ pravokutan i a, b bilo koja dva produženja dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Tada je za svake dvije točke $A' \in a$ i $B' \in b$ trokut $\triangle A'CB'$ Pitagorin trokut.

Dokaz. Je li potreban neki novi postulat za dokaz (ako je)?
Nešto neovisno o V postulatu. Sličnost?

Nakon toga.

Zamjena za V postulat

Dva pravca koja imaju zajedničku ortogonalnu se ne sijeku.

Ortogonalnost dužina

Teorem A

Neka je trokut $\triangle ACB$ pravokutan i a, b bilo koja dva produženja dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Tada je za svake dvije točke $A' \in a$ i $B' \in b$ trokut $\triangle A'CB'$ Pitagorin trokut.

Dokaz. Je li potreban neki novi postulat za dokaz (ako je)?
Nešto neovisno o V postulatu. Sličnost?

Nakon toga.

Zamjena za V postulat

Dva pravca koja imaju zajedničku ortogonalnu se ne sijeku.

HVALA NA PAŽNJI

Literatura

- Heiberg, J. (1883–1885). *Euclid's Elements of Geometry, Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)*. Teubneri, B.G.
- Kiselman, C. O. (2015). Euclid's straight lines. *Nordisk matematisk tidskrift (Normat)*, 60(4):145–169.
- Roberts, F. S. and Luce, R. D. (1968). Axiomatic Thermodynamics and Extensive Measurement. *Synthese*, 18(4):311–326.