Euklid u školi.*

Lavoslav Čaklović (caklovic@math.hr)

Revidirano 2. ožujka 2024.

Sadržaj

1 Uvodna razmišljanja **4**
1.1 Prvi školski sat 4
1.2 Odakle početi? 5
1.3 Iskustvene činjenice 7
1.3.1 Aksiom ili konvencija? 8
1.3.2 Objekti kao invarijante. 9
1.3.3 Kako djeca doživljavaju objekte 10
1.3.4 O pojmu dimenzije . . 11

2 Geometrija **13**
2.1 Euklidovi *Elementi* 14
2.2 Neeuklidske geometrije 15
2.2.1 Sferna geometrija . . . 15
2.2.2 Hiperbolička geometrija 15

3 Euklidska geometrija **17**
3.1 Zasnivanje 18
3.1.1 Euklidovi postulati[1]. . 18
3.1.2 Univerzalna pravila razumijevanja. Aksiomi 20
3.1.3 Definicije 20
3.2 Komentari 21
3.2.1 Komentari vezani uz definicije 22
3.2.2 Komentari vezani uz postulate. 24
3.2.3 Komentari vezani uz pravila razumijevanja 27
3.2.4 Broj kod Euklida? . . . 28
3.3 Osnovni pojmovi. Staro i novo 29
3.3.1 Točka, dužina, pravac 29
3.3.2 Paralelni pravci 36
3.3.3 Pojam kuta 37
3.4 Okomitost pravaca 42
3.4.1 Pitagorin poučak . . . 44
3.4.2 Računanje udaljenosti. Izometrija 47

*Dokument je dostupan na web adresi `https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/` s aktivnim poveznicama.

3.4.3 Udaljenost točke od pravca 48
3.5 Račun omjera. Thales 49

4 Revitalizacija Pitagore **52**
4.1 Okomitost (bis) 53
4.2 Mjerenje kuteva 55
4.2.1 Konstrukcija mjere kuta. 55
4.2.2 Korektnost definicije ortogonalnosti 57
4.2.3 Sumerani. Stupanj . . 58
4.2.4 Lučna mjera kuta . . . 59

5 Anketa o točki **61**

6 Vremenska lenta **65**

Sažetak

Ovaj tekst je prvenstveno namijenjen nastavnicima osnovne i srednje škole. U njemu se govori o zasnivanju euklidske geometrije, ali ne na način kako je to radio Euklid[2] niti kako su to radili u 19. st. i kako to rade suvremeni tekstovi. Cilj mi je pojasniti osnovne građevinske elemente geometrije i njihove odnose iz više aspekata. Moderni, aksiomatski pristup geometriji preko vektorskih prostora je korektan ali ima jedan nedostatak. Za njegovo razumijevanje potrebno je predznanje koje nudi Euklid na uvjerljiv i intuitivan način.

Euklidova geometrija u sebi nosi dvije isprepletene strukture. Jedna je pravčasta, sintetička struktura, a druga je metrička struktura u smislu mjerenja udaljenosti, površine i volumena i koja je već 2000 godina osnova mehaničke vizije svijeta.

Prva knjiga Euklidovih *Elemenata* nudi i jedno i drugo, a završava Pitagorinim poučkom kao centralnom temom. Taj prvi dio ujedno obrazlaže i invarijantnost uvedenih pojmova i konstrukcija na transformacije kao što su translacija, rotacija i eventualno simetrija, samo što Euklid nema eksplicitan pojam ta tako nešto. Grubo rečeno to su transformacije koje čuvaju udaljenost.

Riječnik kojim Euklid iznosi svoje tvrdnje je jezik omjera (proporcija) numeričkih i geometrijskih veličina koji se zadržao kroz cijeli srednji vijek sve do Newtona, a čak i u njegovoj *Principii*. Ponekad ga je teško odmah razumjeti, ali je Eulid svoje izlaganje organizirao u jednostavne i razumljive propozicije.

[2]Rođen u Alexandiji, Egipat, oko 325 g. pne. Njegovo poznato djelo *Elementi*. Postoji hipoteza da je Euklid historijska ličnost koji je imao svoju školu, a njegovi učenici su pisali dijelove *Elemenata* koji su kasnije sakupljeni u jedan svezak.

Moderni udžbenici geometrije za osnovnu školu imaju tendenciju slijediti Euklidov stil koji je zahtjevan za nedovoljno razvijene kognitivne sposobnosti djece te dobi. Osmisliti dobar kurikul iz geometrije u osnovnoj školi je pravi izazov, a još je zahtjevnije izvoditi ga. Dobar nastavnik je pravi virtuoz u osluškivanju dječjeg geometrijskog bila i uvijek je spreman iz rukava osmisliti zanimljivo i korektno objašnjenje na način da se klinci ne osjećaju prevarenima.

Takvih prevara ima i u današnjim udžbenicima i na neke od njih je upozoreno u tekstu. One nisu prisutne od jučer niti samo u hrvatskim udžbenicima. Imao sam priliku predavati ovo gradivo u petom i šestom razredu osnovne škole i priznajem da su me djeca iznenadila svojim izuzetnim zapažanjima kod uvođenja novih pojmova. Na pitanje: *Čemu služi šestar?* jedno dijete je odgovorilo: *Šestar pamti udaljenost.* Svaki nastavnik bi na takvom odgovoru ostao bez riječi pa sam tako i ja.

Osim šestara, u nastavi i crtanju u stara dobra vremena koristilo se i ravnalo, a koristi se i dan danas. Ravnalo pamti relaciju trokuta u smislu da omogućava crtanje ravnih linija. Ovladavanje upotrebe tih tehničkih pomagala i razumijevanje njihovih mogućnosti trebao bi biti prioritet u nastavi. Za to je potrebno vrijeme, a njihovo korištenje zahtijeva i fine motoričke sposobnosti koju mobitelska generacija čini se da nije u potpunosti razvila.

Pojmu okomitosti i kuta u ovom tekstu je dana posebna pažnja. Okomitost, jednako kao i paralelnost centralne su teme euklidske geometrije. U odjeljku 4 pod nazivom Revitalizacija Pitagore na str. 52 zacrtan je mogući pristup zasnivanju euklidske geometrije preko Pitagorinog poučka koji mi se čini operabilnim i vrši iskorak u mjerenje površine, volumena i trigonometriju.

Na kraju su dani komentari jedne *ankete o točki* čiji su rezultati zanimljivi i otvaraju neka nova pitanja.

U pdf-verziji teksta su aktivne reference unutar teksta kao i hiperlinkovi na Euklidove definicije i propozicije. Na primjer hiperlink P. I-15 otvara u web pregledniku stranicu Clark Univerziteta u Worcesteru, Pensilvanija gdje je iskaz propozicije 15 iz knjige I Euklidovih *Elemenata*.

Ono o čemu nema puno govora u ovom tekstu je izvođenje nastave i organizacija nastavnog sadržaja. Nemam dovoljno iskustva u radu s djecom, pogotovo ne s djecom vrtićkog uzrasta i u razrednoj nastavi. U nekoliko navrata vodio sam tematske radionice s djecom školske dobi i ono što sam primijetio je da djeca istog trena daju povratnu informaciju ako su razumjela o čemu je riječ, postavljaju pitanja i žele se uključiti u igru. Moram priznati da su u tim igrama oni vodili mene više nego ja njih i u tom smislu radionice su uvijek bile improvizacije.

Od dodatnih sadržaja ne netu izdvojio bih Khan akademiju i Maths is Fun s mnogo sadržaja i za nastavnike i za studente. Kao vodić u samoobrazovanju nastavnika toplo preporučam *Mathematics Education* web portal od *Homi Bhabha Centre for Science Education, Tata Institute of Fundamental Research*.

Hrvatski obrazovni portal e-Škola je hvale vrijedan projekt ali mi se čini više informativnog nego obrazovnog sadržaja, bar što se matematike tiče.

1 Uvodna razmišljanja

1.1 Prvi školski sat

Prvi školski sat iz geometrije zamišljam ovako: djeca su negdje u prirodi, parku, željezničkoj stanici, obali rijeke, mjesto nije toliko bitno, mogu biti i u školskom dvorištu i neka promatraju dešavanja oko sebe i zapišu ih ako je to izvedivo. Po povratku u razred svaki učenik neka ispriča ili pročita doživljeno.

Svijet i prostor u kojem živimo i krećemo se, mi ljudi i ostala živa bića doživljavamo na različite načine. Svatko na svoj način stvara sliku tog svijeta i događaja u njemu ovisno o tome kakav neuoroški sustav za komunikaciju s okolinom posjeduje. Slika svijeta je ono što doživljavamo vlastitim osjetilima. Pitanje je gdje je ta slika? Ako kažem da je u mom mozgu, a mozak je u prostoru onda je slika u slici. Ako je tvoja slika u tvom mozgu, a moja slika u mom mozgu onda se one nalaze na različitim lokacijama unutar veće slike. A ta veća slika? Je li ona slika u nećem većem mozgu?

Pitanja su zbunjujuća jer posjedujemo predodžbe o našim slikama koje nisu konzistentne s našom logikom i percepcijom. Nešto od tog bi trebalo žrtvovati za posjedovanje koherentne slike. Pitanje je što?

Slika svijeta nije statična. Objekti u njemu prikazuju nam se u različitim međusobnim odnosima. Neke čujemo i vidimo sada, a nakon toga više ne. To su dvije slike u dva različita sada. I što znači da nešto više ne vidim ili ne čujem, a da sam to isto ranije vidio ili čuo. To samo znači da posjedujem memoriju o kojoj uspoređujem dvije slike. Moj doživljaj prostora nije jedna slika već niz slika iz moje memorije — sve je u mojoj memoriji.

Citirao bih Kantovu misao:

Ključno pitanje nije kako sebe možemo dovesti do razumijevanja svijeta, nego kako svijet nama dolazi da postane razumljiv.

Nama se svijet prikazuje dvojako. Jedna pojavnost je u formi statične strukture, formi pejsaža — nazivamo ju `prostorom`. Druga pojavnost je u formi uzastopnosti, forma koja ne proizlazi iz direktne percepcija već iz memorijskih zapisa — forma `vremena`.

I jedna i druga pojavnost u svojim najapstraktnijim formama su dvije razne manifestacije broja (Bergson, 1939), ono što je Bergson nazvao `multiplicitet`.

Kvantitativni multiplicitet prikazuje nam se u obliku mnoštva kojeg reprezentira broj. Objekti u kvantitativnom multiplicitetu stoje jedni pored drugih kao što su to ovce u polju. Prostor je forma kvantitativnog multipliciteta.

Kvalitativni multiplicitet je u formi *trajanja* ili sukcesije koja nije djeljiva niti mjerljiva — ne postoji dio trajanja, a ta sukcesija čini nedjeljivu cjelinu.

Mi ćemo se u ovom eseju pozabaviti kvantitativnim multiplicitetom, odnosno prostorom, a uloga broja ovdje je u formi izražavanja rezultata mjerenja udaljenosti kao kriteriju razlikovanja dva entiteta.

1.2 Odakle početi?

U razumijevanju prirode i našeg okruženja koristimo ideje i pojmove koje smo naslijedili u kulturnom paketu — od naših roditelja, od sustava obrazovanja... Uzastopno pozivanje i objašnjavanje pojmova, koje pritom implicitno koristimo, ponekad ima svoj kraj. Kad stignemo do kraja u tom lancu redukcije pojmova i kad naš kritički um nije u stanju osloniti se na fundamentalnije pojmove došli smo da kraja *analitičkog znanja* (Hegel, 2001, $ 1720–1764).

Hegel tvrdi da je sustav pojmova koji nam omogućavaju organizaciju poimanja stvarnosti zapravo dijalektički. To znači da se odjednom pojavi više pojmova koji su u međusobnom odnosu. Neki od njih u tom skupu pojmova su smisleni jedino u odnosu na ostale koji se simultano pojavljuju, pri čemu smisao pojedinih pojmova može biti suprostavljen (u suprotnosti je) s drugim pojmovima. To suprostavljanje nema nikakvu logičku konotaciju osim činjenice da su suprostavljeni. To su osnovni blokovi u opisu naše stvarnosti i nisu 'razgradivi', a njihovo *razumijevanje* je jednako prisutno u našem umu kao i njihovo *ne-razumijevanje*. To se čini kao formalno logička zamka za um ako je tako postavimo. Dramaturškim rječnikom izraženo: pojmovi su glumci na sceni koju prezentiraju, a da ih nitko nije posebno prizivao niti predstavljao.

Hegel je vrlo općenit i redukcija ideje prostora i geometrije kakvu on zastupa svodi se na važnost *aksiomatske strukture*, a to je pregršt pojmova koji stoje u nekim smislenim predefiniranim odnosima i zadana su pravila kako iz tih objekata gradimo nove objekte. Osim toga tu su i pravila zaključivanja, a to su pravila koja zadržavaju smisao. Ako ste pažljivo čitali upravo rečeno onda ste uočili da na takav način gradimo i razvijamo naš pisani i usmeni izričaj — jezik i govor. Tu ideju ćemo slijediti i ovdje u izgradnji euklidske geometrije.

Geometrijski pojmovi su: *točka, dužina, pravac, trokut, kugla, kut...*, njihovi odnosi izražavaju se kao: *spajanje točaka u dužini, presjecanje pravaca, konstrukcija težišta...*.

Pravila zaključivanja imaju višestruku ulogu. Ona...

obogaćuju model — *Pravci su paralelni ako vrijedi Thalesov teorem o omjerima*,

klasificiraju objekte — *Dva trokuta koja imaju jednaku stranicu i pripadne priležeće kuteve su kongruentna*,

uočavaju granice modela — *Nije moguće konstruirati kvadrat površine jednake površini zadanog kruga uz pomoć ravnala i šestara*.

Osmisliti nastavu geometrije u školi je izazov. Djeca imaju urođene ili već rano stečene predstave o odnosu geometrijskih objekata i od toga treba početi. Izazov je u tome što inzistiranjem na logičkoj strukturi geometrijskog modela, za što djeca u ranoj dobi ne posjeduju adekvatne kognitivne sposobnosti, može posve zasjeniti korektno stečene predstave. Iz tog razloga je bitno provjeriti je li to usvojeno znanje u skladu s onim što matematika tvrdi, a to se može provjeriti kroz igru, rezanjem papira, povezivanjem geometrijskih formi u odnosu na zadane atribute i uočavanje tih atributa...za sve to treba vremena.

Ovdje se nećemo baviti pedagogijom i psihologijom razvoja djece u predškolskoj i ranoj školskoj dobi već onim pojmovima i tvrdnjama iz geometrije s kojima bi nastavnici trebali biti upoznati, a to im još nitko nije tako rekao. Drugim riječima, ovaj tekst može se smatrati nadopunom standardnim sadržajima iz geometrije za nastavnike, da pokrene kritičko razmišljanje i poveća kreativnost učitelja. Također ću ukazati na neke klasične propuste u nastavi geometrije općenito, na konkretne sadržaje u nekim školskim udžbenicima kao i na propuste samog Euklida u njegovim *Elementima*.

Prezahtjevan kurikul ima za posljedicu neusvojene nastavne sadržaje od strane učenika, a posljedica toga je nesigurnost učenika u vlastite sposobnosti. Dobar nastavnik zna da je postupnost važnija od količine podataka, a ponavljanje nije gubljenje vremena već osnova da nova saznanja. U razgovoru s autorima udžbenika obično čujem rečenicu "*Kurikul je prezahtjevan.*" ili "*Nema se vremena.*" Nastavnici su direktni izvođači nastave i ne bi smjeli pasti pod "pritisak odozgo", pogotovo ne nastavnici autori udžbenika. Oni moraju stati na stranu učenika i prilagoditi sadržaj učenikovom uzrastu bez obzira na ucjene kreatora politike — to je imperativ.

Na kraju ove mini rasprave o današnjem školstvu iznosim pomalo karikirani zaključak o kojem bi bilo dobro razmisliti. Ako je cilj osnovne škole da učenik savlada razlomke i postotak onda onaj tko to nije usvojio ne smije dobiti ocjenu jer se neznanje ne može ocijeniti — učenik eventualno može dobiti potvrdu da je prisustvovao nastavi. Koja obrazovna politika ili struktura ima petlje tako nešto uvesti. Osim toga, današnje obrazovanje nije struktura koja je u stanju sama sebe popravljati jer nositelji te strukture, nastavnici, nemaju slobodu samostalnog odlučivanja. Oni su izgubili dignitet i poštovanje, a za to su djelimično i sami krivi. Poštovanje i dignitet se zaslužuje vlastitim radom i cjeloživotnim obrazovanjem. To nije prigovor nastavnicima već edukatorima političarima koji nisu osigurali uvjete za takvo obrazovanje nastavnika i razvoj školstva.

1.3 Iskustvene činjenice

Ono što mi nazivamo prostorom je kreacija nastala iz potrebe da negdje smjestimo objekte koje percipiramo i dodirujemo kako be se onda na njih mogli referencirati. Ono što mi percipiramo pomoću naših osjetila i što je u dosegu našeg kretanja i zahvaćanja slobodno možemo zvati *osjetilnim prostorom*[3] (Poincaré, 2013). On je određen parametrima koje generiraju naša osjetila i motoričkim varijablama svih naših mišića. Dimenzija[4] tog prostora mnogo je veća od od dimenzije kartezijevog koordinatnog sustava kojeg mi uporno guramo kao referentni sustav. *Geometrijski prostor* nije idealizacija tog prostora nego je mentalna kreacija nekih naših dogovora. To je samo okvir spreman da prihvati naše dogovore, senzacije i reprezentacije.

A kakvi su sad to dogovori i zašto to nisu aksiomi kako ih je nazvao Euklid? Na primjer, tvrdnja da se *"kroz dvije različite točke može povući samo jedan pravac"* je konvencija bića koja nisu u stanju globalno doživjeti svijet izvan okoline u kojoj obitavaju. Ograničenost njihovih osjetila i mjernih instrumenata ja takva da imaju i ograničeno iskustvo i da nisu u stanju pretpostaviti da bi se kroz dvije točke možda mogao povući još neki pravac koji je različit od prva dva. Slično je i s tvrdnjom da se *"kroz točku izvan zadanog pravca može povući samo jedna paralela."*

Važnost metrike. U udžbenicima geometrije često se spominje sljedeća 'definicija': *"Segment je najkraća spojnica* (*linija*) *između dvije točke"*. Tu se, pretpostavljam,

[3] Neki ga nazivaju psiho-kinetičkim ili senzorno-motoričkim prostorom.

[4] Koristim pojam dimenzija iako u ovom trenutku nije jasno što bi to moglo biti. Ako kažem da je to broj nezavisnih parametara onda to zatijeva nove definicije i obrazloženja, ali idejno je to korektno.

pod spojnicom shvaća put koji spaja te dvije točke, ali nije specificirano kako je definirana duljina puta niti što je to put. Istina je da pojam duljine puta spada u 'višu matematiku' no metrika je previše važna i ključna za geometriju da se prešutno pređe preko nje. Ako za metriku odaberemo euklidsku metriku dobit ćemo euklidsku geometriju, ako je metrika indefinitna dobit ćemo geometriju Lobačevskog.

Metrika nudi mogućnost razlikovanje objekata, prvenstveno točaka. Uz pomoć metrike razlikujemo bliske od udaljenih objekata zadane točke. Moderna matematika uvodi apstraktnije strukture, kao topologiju na primjer, koja čini to isto ali na drugačiji način. Poznati matematičar Grothendieck predlaže prostor koji nije sačinjen od točaka. Za njega su točke samo oznake koje mogu biti postavljene na prostor ali nisu njegovi fundamentalni elementi. O prostoru možemo razmišljati kao nešto za što lokalizacija ima smisla. U takvom prostoru ključna riječ je lokalizacija. Dakle, pitanje što je prostor može se svesti na pitanje što znači lokalizacija.

Euklid ne govori mnogo o mjerenju i metrici ali je sustavno pripremi teren kasnijim matematičarima da to korektno učine.

1.3.1 Aksiom ili konvencija?

Zanimljiv je Poincaréov stav o aksiomima u geometriji. To nisu apriorni sudovi jer su sugerirani iskustvom ali nisu ni deduktivni. U tom smislu, geometrija je konstruktivna, a aksiomi su konvencije[5] odnosno dogovor. Međutim, te konvencije ipak nisu proizvoljne nego su uvjetovane fiziološkim karakteristikama naših osjetila. Pogledajmo kako Poincaré (2013) gleda na pojam prostora i na naš doživljaj prostora. Evo njegovih riječi:

> Mi ne zamišljamo vanjske objekte iz geometrijskog prostora, nego ih razumijevamo kao da su smješteni u geometrijski prostor. Kad kažemo da 'lokaliziramo' neki objekt kao točku prostora što to znači? To znači da si predočavamo gibanje koja bi nam omogućilo dohvat tog objekta; čak nije nužno da si predočimo gibanje, ali je nužno projicirati[6] to gibanje u

[5] Poincaréov geometrijski konvencionalizam je i osporavan (Einstein, Popper) i branjen (Grünbaum, Worrall) od mnogih filozofa i znanstvenika.

[6] Poincaré sam kaže da je ta projekcija vrlo složena i da je redukcija dimenzije osjetilnog prostora moguća jedino putem asocijacija ideja koje daju 'smisao dimenziji (usmjerenju)'. Takav osjećaj dimenzije nije moguć od jedne senzacije. Sve mišićne senzacije koje doprinose 'prepoznavanju smjera gibanja', na primjer, čine njegov integralni dio i to iskustvo prepoznavanja povratno educira, kako Poincaré kaže, naše osjetilne organe da formiraju pojam prostora. Na primjer, ako promatramo objekt iz perspektive A i pratimo promjenu u perspektivu B, tada ćemo za svaku takvu promjenu doživljavati istu percepciju motoričkih funkcija koje kontroliraju pokretanje mišića. Male perturbacije tih promjena asocirat će nas na istu klasu motoričkih funkcija koju možemo okarakterizirati

prostor, a za to projiciranje, pojam prostora mora apriori postojati. Kad kažem da si predočavamo gibanje, to samo znači da si predočavamo mišićne osjete koje prate tu predodžbu i koji nemaju nikakav geometrijski karakter, a to ne pretpostavlja postojanje prostora.

U kreiranju osjećaja za *geometrijski prostor* potrebno je dakle iskustvo i gomila asocijacija koje pomažu u redukciji parametara *osjetilnog prostora*. Neurolog bi danas, umjesto *grupe asocijacija* rekao da mozak stvara *sinapse*, što je samo fizičko-kemijska realizacija procesa asocijacije.

Naše navike su također asocijativni aparat koje nam sužavaju percepciju vlastitiog *osjetilnog prostora*, a time i osjećaj za geometriju. *Osjetilni prostor* nije fizički prostor, čak nema ni metriku niti ideju mjerenja, to je više hipoteza nego realnost i nije ju moguće provjeriti.

1.3.2 Objekti kao invarijante.

U proučavanju odnosa među primarnim geometrijskim objektima i njihovih izvedenica (trokut, paralelogram, kružnica, pravilna tijela) javlja se i potreba za proučavanjem transformacija prostora koje čuvaju udaljenost među točkama prostora (rotacija, translacija, razne simetrije) i čuvaju neke metričke odnose među dijelovima tih objekata[7]. Takve transformacije same po sebi čine određene algebarske strukture (grupe) čija razumijevanja donose i nova saznanja o geometriji samog prostora.

> *Te algebarske strukture i koncepti potencijalno su prisutni u našem umu, generirane iskustvenim činjenicama, ali ne kao forma osjeta (doživljaja) nego kao forma našeg razumijevanja* (Poincaré, 2013).

Felix Klein je strukturirao geometriju kao skup relacija među objektima koje su invarijantne na određenu grupu transformacija. Za euklidsku geometriju grupa transformacija dozvoljava rotacije, simetrije i translacije i sve one čuvaju udaljenost među točkama i mjeru kuta; nazivamo ih *izometrijama*. Svaka od tih transformacija čuva paralelnost[8] među pravcima. Na te transformacije slobodno možemo gledati kao na 'dopustiva gibanja'. Geometrije su jednake ako i samo ako imaju istu grupu dozvoljenih transformacija. Na primjer, Poincaréov model hiperboličke geometrije

kao određeno iskustvo i imenovati ga kao neku transformaciju prostora.

[7] Na primjer, ako promatramo neki objekt obilazeći oko njega uočavamo da se relativni odnos dijelova tog objekta ne mijenja pri tom obilasku.

[8] U tom smislu je naslov *Objekti kao invarijante* neprecizan jer je invarijanta grupe djelovanja 'paralelnost', a ne pravac.

preko dozvoljenih 'hiperboličkih gibanja', vizualiziran kao poluravnina (ili disk), proširuje intuiciju i nudi novi način vizualizacije hiperparalela.

Takav (invarijantni) pogled na geometrije baca novo svjetlo na njihov odnos jer pročavanjem podgrupa neke grupe transformacija dobivamo i nove 'slobodnije' geometrije, a ujedno otvara mogućnosti shvaćanja fizikalnih zakona (procesa) kao invarijanata zadane grupe.

U ovom tekstu nećemo govoriti o objektima kao inavrijantama i algebarskom pristupu geometriji. Euklid ne definira pojam izometrije ali ju implicitno koristi, a izometrične likove naziva "sličnima i jednakima[9]" Više o izometričnom pristupu geometriji može se naći u knjizi Pavković and Veljan (1992).

1.3.3 Kako djeca doživljavaju objekte

U nastavi geometrije korisno je znati koje pojmove već djeca koriste ili su ih već usvojila, a nove pojmove uvoditi kao nadogradnju imajući u vidu njihove međusobne odnose. Pravci, zrake i druge crte se u saobraćaju koriste za označavanje smjera i izdvajanje pojedinih dijelova ravnine. Tračnice vlaka su također crte ali su na jednakoj udaljenosti[10] za razliku od mnogih drugih crta koje primjećujemo. Plan grada ili kroj neke haljine su već kompleksniji za interpretiranje ali predstavljaju dobar početaka za uočavanje odnosa među objektima u ravnini.

Posebno je zanimljivo je kako se u naše intuitivno shvaćanje o geometrijskim formama uvuklo uvjerenje da svjetlosna zraka ima formu ravne crte (pravca).

Točku, dužinu i pravac odrasli i obrazovani ljudi nazivaju elementarnim pojmovima je su to elementarni blokovi u logičkoj izgradnji geometrijskih struktura. To nisu primarni oblici u prirodi, naročito ne u prirodnom okruženju izvan gradova i tehnoloških parkova. Oblici koje djeca prepoznaju su prvenstveno trodimenzionalni, mogu se opipati i eventualno prenositi, a dvodimenzionalni oblici su apstraktne forme koje nisu opipljive. Mnoge od njih su zapravo sjene trodimenzionalnih oblika ili lica udaljenih objekata koja nam se prikazuju u tim formama. Nisam siguran da dijete povezuje Mjesec s trodimenzionalnom loptom ako loptu nije držalo u rukama.

Geometrijska tijela posjeduju neku pravilnost i razlikuju se od amorfne tvari i rastezljivih materijala. Tijela se mogu transportirati u prostoru na način da se ne mijenja relativna udaljenost njihovih dijelova — ona su kruta. Neka kruta tijela (kocka, tetraedar, kugla) su toliko jednostavna da ih možemo lako opisati riječima

[9]Što Euklid razumijeva pod jednakošću likova nije sasvim jasno. Više o tome rečeno je u odjeljku 3.2.3 na str. 27 pod nazivom Komentari vezani uz pravila razumijevanja.

[10]Udaljenost tračnica je prihvatljiva fraza u ovom trenutku i ništa više od tog.

koristeći pojmove kao što su: trokut, četverokut. Ako dijete opiše kuglu kao *"tijelo koje je svuda isto"* potpuno je u pravu jer je uočilo invarijantnost tog oblika na rotaciju. Geometrijske forme su apstrakcije i predstavljaju geometrijsku realizaciju misaonih formi.

Likovno izražavanje i bojanje je drugačijeg karaktera od opipa jer njime djeca izražavaju vlastite emocije i stavove. Bez obzira o kakvoj formi izražavanja se radi, djeca koriste linije, a od gore spomenutih elementarnih geometrijskih pojmova u prirodi su prepoznatljivi uzorci koji se ponavljaju.

U ranijoj fazi, 3–6 godina, djeca uočavaju sličnosti i razlike među geometrijskim oblicima i formama. Rano uočavaju zatvorene forme, a što se tiče klasifikacije likova, istraživanja pokazuju da posjeduju prototipove (trokut, kvadrat, krug) koji služe za 'prepoznavanje' njima sličnih formi. Za djecu vrtičke dobi postoje edukativni programi koji potiču razvoj vizualnog jezika kod djece, ako se to tako smije nazvati, a djeca koja su prošla takve treninge sposobna su povezivati i klasificirati oblike bolje od djece koja nisu bila podvrgnuta takvim programima. U takvom treningu djeca dodatno obogaćaju svoj riječnik i formiraju oblik mišljenja konstruktivne prirode. Istraživači opravdavaju takve programe jer doprinose kognitivnom razvoju djeteta, a testovi to i pokazuju. Longitudinalne studije koje bi pratile razvoj takve djece gotovo da i ne postoje, a kako i na koji način takvi programi utječu na psiho-motorički i emocionalni razvoj djeteta nema spomena. Osobno mi se čini važnijim da dijete razlikuje žirafu od kokoši iz jednostavnog razloga što forme i oblici u prirodi imaju neki životniji smisao. Klasifikacija geometrijskih formi koja ima za cilj povećanje matematičke pismenosti nema taj kreativni naboj koji imaju šare na zebrinoj stražnjici

1.3.4 O pojmu dimenzije

Intuitivan pristup dimenziji nekog objekta svodi se na broj nazavisnih parametara koji taj objekt određuju. U statistici i mehnici, na primjer, takav pristup vodi na objekte koji se mogu zbrajati i množiti brojem, to su vektorski prostori ili slične pravčaste tvorevine. Lopta ili sfera u našem trodimenzionalnom vektorskom prostoru nije trodimenzionalna je postoji dodatni uvjet na nezavisne koordinate u obliku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, na primjer. Nije pogrešno reći da je polazni stupanj slobode na koordinate x, y, z, koji iznosi 3 umanjen za broj uvjeta, tako da je dimenzija sfere jednaka 2.

Preciznijii i korektniji matematički opis sfere vodi na sferne koordinate koje lokalno opisuju položaj točaka na njoj i na koje nema dodatnih uvjeta. Nazivamo ih lokalnim jer one ne opisuju položaj svake točke sferi. Takav pristup vodi na diferencijalnu geometriju i odgovarajuće objekte koji su lokalno opisani. Broj tih koordinata je dimenzija diferencijalno geometrijskog objekta.

Dimenziju objekta možemo odrediti i bez lokalnih koordinata. To je topološki pristup koji je prirodno poopćenje lokalnosti o kojem govori diferencijalna geometrija.

Na primjer, točka C koja je element dužine $\overline{AB}$ dijeli dužinu na dva dijela i ako želimo povezati dvije točke putem koji ne izlazi iz te dužine onda taj put mora sadržavati točku C. Drugim riječima, ako točku C proglasimo preprekom koju ne smijemo dirati onda se dužina, ako iz nje izbacimo prepreku C raspada na dva nepovezana dijela.

Povezanost o kojoj se ovdje govori direktno je vezana uz kontinuirani pokret u senzorno-motoričkom prostoru o kojem govori Poincaré (v. str. 8). Pokret nije nužno fizički već zamišljen slijed senzorno-motoričkih stanja za dohvaćanje nekog predmeta pri čemu bliska stanja nismo u stanju razlikovati, što ovisi i o vrsti senzornog organa kojim se koristimo. Na primjer, dva dodira na koži razlikujemo ako su (prostorno) dovoljno različita, inače ne, a to opet ovisi i o mjestu kojeg dodirujemo. Ako je ono dovoljno bogato živčanim završecima prag osjetljivosti je niži. Ako bi naš senzorno-motorički prostor bio baziran samo na koži, percipirali bismo promjene na koži i u njenoj okolici ako uvažimo i njenu osjetljivost na promjenu temperature okoline.

Za razliku od kože, vidni osjet baziran je aktivaciji živčanih završetaka na mrežnici oka i u stanju smo razlikovati svjetlosne izvore koji dolaze pod različitim kutevima zahvaljujući obliku te mrežnice. Kod monokularnog vidnog osjeta nismo u stanju odrediti udaljenost izvora od oka već samo smjer odakle svjetlost dolazi. Prostornost, odnosno mogućnost percepcije udaljenosti izvora je moguća ako gledamo s dva oka, a sliku generira mozak, bar tako kaže moderna neurofiziologija. Sama preciznost određivanja te udaljenosti ovisi o našem iskustvu i našoj sposobnosti kretanja. Slično je sa sluhom. Ako promatrate malu djecu, ona ćete uočiti da ona koriste sva navedena osjetila u izgradnji slike svijeta koji ga okružuje. Zajedničko svim slikama (predodžbama), bez obzira radi li se o ljudima, životinjama ili amebama je to da je stvaranje slike bazirano na sposobnosti uočavanja promjene.

Vratimo se još sekundu na kontinuitet pokreta u senzorno-motoričkom prostoru. Osjetilni kontinuitet, ako ga tako možemo nazvati, leži u nemogućnosti razlikovanja bliskih događaja od strane senzornog aparata. Ako se radi o nizu uzastopnih bliskih promjena (koje nismo u stanju razlikovati), a koje prelaze od jednog početnog stanja u neko završno koje se drastično razlikuje od početnog onda govorimo o kontinuitetu promjena i takav kontinuitet vodi na apstraktnu matematičku strukturu koja nosi naziv *topologija*. Topološke karakteristike objekata mogu se izražavati i brojevima, odnosno algebrom i jedna od takvih karakteristika je dimenzija.

Topološki pristup dimenziji je induktivan i počinje s dužinom i točkom C unutar te dužine koja ju razdvaja na dva dijela, a svaka staza ili put koji bi povezivao točke iz različitih dijelova mora prelaziti preko prepreke C. Ako, za potrebe ove naše diskusije, definiramo da točka ima dimenziju 0, onda dužina ima dimenziju 1. To je istina za svaku kontinuiranu presliku dužine, zvati ćemo ju *put* ili *krivulja*.

Promatrajmo sada ravninu i neki zatvoreni put u toj ravnini. On dijeli ravninu na dva dijela, jedan je omeđen ili unutrašnji dio, a drugi je vanjski ili neomeđeni dio. Ako taj put proglasimo za prepreku, onda svaka krivulja koja povezuje unutrašnju i vanjsku točku ravnine mora prelaziti preko tog puta. Put je, kao što smo malo prije rekli je jednodimenzionalan, a ravnina je iz opisanog razloga dvodimenzionalna. To je istina ne samo za ravninu nego i za tvorevinu kao što je lopta (sfera) ili ploha u obliku automobilske zračnice (torus) ili na primjer tetraedar. Svaka zatvorena krivulja na sferi ili torusu dijeli dotični objekt na dva dijela koja nisu povezana ako iz njega izbacimo točke na zatvorenoj krivulji (prepreka). I tako induktivno, ako neki geometrijski objekt kojeg svaki objekt[11] dimenzije $n-1$ razbija na dva nepovezana dijela, onda kažemo da taj objekt ima dimenziju n.

Ovo je gruba ideja kako se pojam dimenzije može definirati ne samo za vektorske prostore već i za objekte koji to nisu, a da se ne gubi intuitivna predodžba što bi dimenzija trebala biti.

2 Geometrija

> *Geometrija, jedako kao i aritmetika, za svoju logičku izgradnju zahtijeva samo mali broj jednostavnih, fundamentalnih principa — nazivamo ih aksiomima geometrije. Izbor aksioma, kao i proučavanje njihovog međusobnog odnosa je problem koji je, još od vremena Euklida, bio raspravljan u izuzetnim i brojnim memoarima matematičke literature. Taj problem je ravan logičkoj analizi našeg intuitivnog doživljaja prostora.*
>
> *David Hilbert u* The Foundations of Geometry (*Hilbert*, *1899*).

[11] Ovdje smo prešutili što je to što dodatno određuje $n-1$ dimenzionalni objekt, a što bi poopćavalo zatvorenost u slučaju krivulje.

2.1 Euklidovi *Elementi*

U osnove geometrije ugrađeno je naše neposredno iskustvo o fizičkim objektima koji nas okružuju, ali ne o njihovoj građi i nekim drugim substancijalnim kvalitetama kao što su toplina ili kemijska svojstva nego o njihovom međusobnom odnosu u prostoru uključujući i nas same. Naziv geometrija dolazi od grčke riječi: γεωμετρία (γωο – zemlja, μετρία – mjerenje) i njena fundamentalna uloga je da povezuje objekte s brojevima (mjerenje).

'Biblija' svih matematičara kroz period od gotovo 2000 g. bili su Euklidovi *Elementi* (Euklid, pne), djelo od 13 knjiga koje predstavlja jedno od najutjecajnijih djela u povijesti znanosti, posebno matematike. U njima je Euklid sustavno zapisao postulate geometrije s uvjerenjem da se sve tvrdnje iz geometrije mogu iz njih izvesti. Njegov sustav postulata nije potpun, tj. ne mogu se sve geometrijske tvrdnje dokazati pomoću njih, ali je usmjerio čitavu plejadu matematičara u smjeru aksiomatske izgradnje raznih teorija.

Većina Euklidovih *Elemenata* oslanja se na ranije tekstove. Tu možemo ubrojiti Hipokrative[12] tekstove napisane čitavo stoljeće prije Euklida, a neke tvrdnje o brojevima iz XI knjige *Elemenata* datiraju iz još ranijeg doba, sve do Pitagorejaca. Dio V knjige koji govori o proporcijama pripada Eudoxu, nekih pedesat godina ranije, kao i dijelovi XII knjige koji govore o volumenu i površini. Dio X knjige o iracionalnim brojevima i dijelovi XIII knjige pripadaju Tetusu (417-369) suvremeniku Eudoxa.

Iako su mnogi filozofi i matematičari ukazivali na nekorektnosti u definicijama i aksiomima, sustavnih rekonstrukcija Euklidske geometrije nije bilo sve do Hilberta (1899). Njegova knjiga o zasnivanju geometrije pokrenula je čitav niz rasprava, počev od Fregea (1903; 1906), o formalnom zaključivanju koje se nastavlja sve do današnjih dana. Od modernih zasnivača geometrije svakako treba spomenuti Davida Hilberta (1899), te Georgea Birkhoffa (1932) i Alfreda Tarskog (1959).

Hilbertov sustav aksioma ne priliči kao srednjoškolsko gradivo, a sama euklidska geometrija, što se principa tiče, progutana je aksiomatskom izgradnjom vektorskih prostora. Mnogi smatraju da je kao takva suvišna i da joj se pridaje prevelika važnost u školi pa je broj sati nastave posvećen geometriji sve manji i manji. Susret s geometrijom je prvi susret učenika s apstraktnim načinom mišljenja i formalnim sustavima, a bez toga nije moguće razumjeti niti osnovne zakone prirode.

O životu Euklida ne zna se mnogo. Postoji naznaka da je *Euklid* pseudonim za grupu autora tog doba koji su sakupili ranije tekstove prije Euklida i nadopunjavali ih, a neki od tekstova su kasnije pridodani *Elementima*. Ne zna se niti približno vri-

[12]Hippocrat iz Chiosa (470–410).

jeme kad je većina tih tekstova sakupljena, a David Fowler[13] procjenjuje da je manje od 1% Euklidovih originalnih tekstova dostupno iz bilo kojih izvora prije 888. g. n.e. Na internetu je dostupna slika fragmenata Euklidovih *Elemenata* (*Papyrus Oxyrhynchus 29*) koji datiraju negdje između 75, i 125. g. ne. Pronađeni su 1897. u Oxyrhynchusu, starogrčki naziv za današnji grad el-Bahnasa u srednjem Egiptu i čuvaju se u *Penn Museum*, Pennsylvania, SAD.

Antički filozofi razlikovali su pojam postulata od aksioma. Postulat je evidentna tvrdnja koja je vezana uz neko specifično područje, a aksiom je evidentna tvrdnja koja je zajednička za sva znanstvena područja. Euklid ih također razlikuje, a neki prevoditelji Euklidove aksiome prevode kao "opći pojmovi[14]". Ja sam ih nazvao "univerzalna pravila razumijevanja" s alt. nazivom "aksiomi" u zagradama.

2.2 Neeuklidske geometrije

2.2.1 Sferna geometrija

Gauss je bio među prvima koji je razmišljao o tome da postoji više od jednog pravca kroz točku izvan zadanog pravca, a koji ne sijeku zadani pravac. Ništa nije objavio ali postoje zapisi njegovih studenata o tome i korespodencija s drugim matematičarima tog vremena iz koje se može zaključiti da je tako bilo. Godine 1830. Bolyai i Lobačevski objavljuju revolucionarni rad o neeuklidskoj geometriji, ali su ih njihovi suvremenici ignorirali. Čini se da svijet nije bio spreman prihvatiti činjenicu da postoji geometrija u kojoj Euklidov aksiom o paralelama ne vrijedi.

Zanimljivo je da je i prije Bolyaia i Lobačevskog postojala već jedna neeuklidska geometrija, ali je matematičari nisu doživljavali kao takvu: *Geometrija sfere*. Pravci u toj geometriji su presjeci ravnina koje prolaze centrom sfere sa sferom — glavne kružnice. Kroz dvije točke koje su dijametralno suprotne postoji beskonačno pravaca što je u suprotnosti s Euklidovim aksiomom da se kroz dvije različite točke može povući samo jedan pravac.

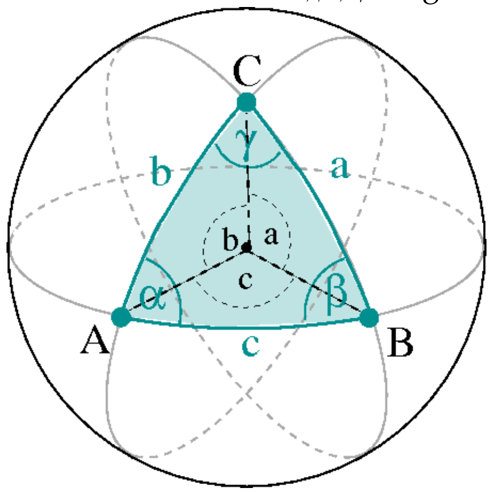
U sfernoj geometriji je suma kuteva u trokutu veća od $180°$, a moguće je konstruirati i trokut s tri prava kuta.

2.2.2 Hiperbolička geometrija

Talijanski matematičar Beltrami bio je inspiriran idejom 'pravaca' kao presjekom plohe (sfere) i ravnina i umjesto sfere (jednadžbe $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) promatrao je

[13] U svojoj knjizi *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*, Oxfod (1999)
[14] eng. common notions.

Slika 1: Sferni trokut. Kutevi α, β, γ mogu biti i pravi.



hiperboličku mnogostrukost čija je jednadžba

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{1}$$

Pravci na toj mnogostrukosti su presjeci ravnina kroz ishodište i te mnogostrukosti. Takav model inspirirao je i Felixa Kleina i Poncaréa[15] da kreiraju nove modele hiperboličke geometrije. Jednadžba (1) određuje dvije grane rotacionog hiperboloida čiji su vrhovi u točkama $z = \pm 1$, a asimptotski stožac tog hiperboloida ima jednadžbu $x^2 + y^2 = z^2$. Poincaréov model hiperboličke ravnine uključuje gornju granu hiperboloida, označimo ju s H, xy-ravninu koja prolazi ishodištem, označimo ju s K i ishodište O i točku $S = (0, 0, -1)$.

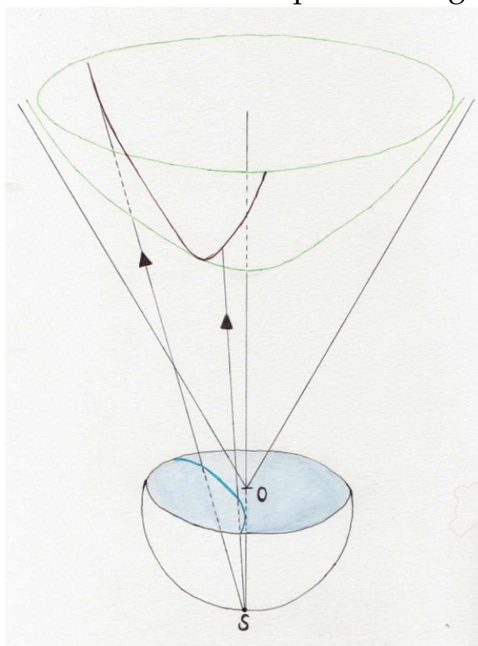
- Točke hiperboličke ravnine H_K su projekcije P' točaka $P \in H$ na K, tj. presjecišta segmenta SP, $P \in H$ s ravninom K. Sve točke P' leže u unutrašnjosti diska $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ koji leži u ravnini K.

- Pravci hiperboličke ravnine su projekcije Beltramijevih pravaca (krivulja) na H. Zatvorenje tih projekcija su dijelovi kružnica unutar H_K koje su okomite na rub diska, a rubne točke diska predstavljaju beskonačno daleke točke pravca.

Može se dokazati da je suma kuteva u hiperboličkom trokutu manja od $180°$.

[15] Henri Poincaré (1854-1912) filozof, fizičar, matematičar, razvio je filozofski pravac zvan *konvencijalizam* — vjerovanje da su fizikalni zakoni samo konvencije među znanstvenicima i ništa više.

Slika 2: Poincaréov model hiperboličke geometrije



Koja je geometrija stvarna? Pitanje je zapravo besmisleno jer je odabir geometrije i mjerenja stvar dogovora i nema načina da se eksperimentalno provjeri u kojoj geometriji živimo, euklidskoj ili hiperboličkoj (Poincaré, 1895).

3 Euklidska geometrija

Geometrija koju je Euklid pokušao aksiomatski i logički povezati nosi njegovo ime jer je bio prvi koji je sakupio, sistematizirao i nadopunio dotadašnja znanja iz geometrije u jednoj cjelini. Projekt ne samo da je vrijedan pažnje, nego je bio i ostao inspiracija za sva buduća pokoljenja. Kao polazište u istraživanju tog područja toplo preporučam sadržaj web portala `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/Euclid.html`. Na samo što taj sadržaj sadrži definicije, tvrdnje i dokaze već je bogat komentarima i uputama kako razumjeti misaoni sklop tadašnjih matematičara i kulturnog okruženja općenito.

Prije daljnjeg izlaganja citirajmo Davida E. Joyca, autora gore spomenutog web portala, u komentarima nakon propozicije P. VI-1.

Nevjerojatno je koliko se matematika promijenila tijekom prošlog stoljeća.

Početkom 20. stoljeća Heath[16] *je još uvijek mogao likovati nad superiornošću sintetičke geometrije, iako je možda bio jedan od posljednjih koji je to učinio. Sada, u 21. stoljeću, sintetička geometrija je gotovo pala u zaborav, dok je analiza, zasnovana na različitim konceptima* limesa, *postala dominantna.*

Bilo je potrebno vrijeme da se pronađe temelj za matematičku analizu kao čvrstu ili čvršću od geometrije. U 17. stoljeću, u vrijeme nastanka diferencijalnog i integralnog računa, geometrija se smatrala najpouzdanijim opravdanjem za kalkulus.

U prvoj polovici 19. stoljeća razjašnjen je pojam limesa i limes je postao temelj matematičke analize. Heathova bi pritužba tada bila valjana jer teorija realnih brojeva još uvijek nije bila utemeljena.

U drugoj polovici 19. stoljeća Weierstrass, Cantor i Dedekind uspjeli su zasnovati teoriju realnih brojeva na teoriji prirodnih brojeva i nešto teorije skupova, tako da je početkom 20. stoljeća već postojao dobar temelj za modernu matematičku analizu. Svejedno, taj bi se novi temelj još uvijek mogao nazvati Eudoksovim jer je moderna definicija realnog broja ista kao njegova, ali u umotana u moderno ruho.

3.1 Zasnivanje

U ovom tekstu zanimaju nas osnove euklidske geometrije i njeno zasnivanje i o tome Euklid raspravlja u I knjizi *Elemenata*. U samom početku iznose se definicije, postulati i aksiomi. Neki komentatori aksiome nazivaju *općim pojmovima*, ja sam ih nazvao *univerzalnim pravilima razumijevanja*. Što se definicija tiče komentirat ćemo samo neke od ih u trenutku kad će se javiti potreba za time.

3.1.1 Euklidovi postulati[17].

U knjizi I *Elemenata*, Euklid započinje s opisom odnosa među veličinama i odmah prelazi na postulate ravninske geometrije. Navodimo svih 5 postulata potpunosti radi.

Postulat p. I-1 Kroz bilo koje dvije točke moguće je provući segment (dužinu).

[16] Sir Thomas Little Heath (1861 – 1940), Britanski matematičar i povjesničar. Preveo Euklidova, Apollonijeva, Aristarhusova i Arhimedova djela na engleski.

[17] Ovo je moderana interpretacija (prijevod) Euklidovih postulata kakvi se pojavljuju danas u udžbenicima i korišteni su termini (*pravac*) kojeg Euklid nije koristio, bar ne na način kako ga mi danas doživljavamo. Vidi također raspravu u odsječku 3.3.1 na str. 34 pod nazivom Pravac je produljenje dužine.

Postulat p. I-2 Dužinu je moguće neprekidno produljivati.

Postulat p. I-3 Moguće je nacrtati kružnicu bilo kojeg radijusa s centrom u bilo kojoj točki.

Postulat p. I-4 Svaka dva prava kuta su kongruentna.

Postulat p. I-5 Ako pravac siječe druga dva pravca tako da je zbroj kuteva s iste strane pravca manji od dva prava kuta, tada se ti pravci sijeku s one strane polaznog pravca gdje je zbroj kuteva manji od dva prava kuta.

Godine 1795, John Playfair je ponudio alternativnu verziju petog postulata koja se često spominje kao Euklidov u mnogim udžbenicima.

Postulat I-5′ (Playfair) Kroz točku izvan pravca moguće je povući samo jedan pravac koji ne siječe zadani pravac.

Posljedica toga je da za svaka dva različita pravca u ravnini samo jedna tvrdnja je istinita: (1) pravci se sijeku ili (2) pravci su paralelni.

Euklidov V aksiom o paralelama ududara po svojoj složenosti od ostalih i matematičari nakon njega su ga pokušavali dokazati kao posljedicu ostala četiri. Nisu uspjeli u tome, ali su došli do niza ekvivalentnih tvrdnji od kojih spominjemo samo neke:

1. *Suma kuteva u trokutu iznosi* 180°. *Euklid bi umjesto* 180° *rekao dva prava kuta.*

2. *Postoje slični trokuti koji nisu kongruentni.*

3. *Dva pravca koja su paralelna s trećim pravcem su i međusobno paralelna.*

4. *Ako pravac siječe jedan od dva paralelna pravca i sva tri su u istoj ravnini tada on siječe i drugi pravac (Proclus).*

5. *Svaka dva paralelna pravca imaju zajednički okomiti pravac.*

6. *Pitagorin poučak.*

Također se pokušavalo, polazeći od aksioma euklidske geometrije, doći do kontradikcije, što bi značilo da je sustav aksioma kontradiktoran, ali bez uspjeha.

3.1.2 Univerzalna pravila razumijevanja. Aksiomi

Euklid uvodi određena pravila kao osnove razumijevanja (zaključivanja). Ima ih ukupno pet od kojih su prva tri, kako zaključuju povijesničari, bila poznata još u doba Eudoxa i Aristotela, a preostala dva su kasnije dodana[18].

PR-1 Stvari koje su jednake istoj (stvari) su također jednake (tranzitivnost).

PR-2 Ako jednakim (stvarima) dodamo jednake, tada su i cjeline jednake (aditivnost konkatenacije).

PR-3 Ako jednako izdvojimo iz jednakih (stvari), preostalo je jednako.

PR-4 Stvari koje se preklapaju su međusobno jednake.

PR-5 Cjelina je veća od (njenog) dijela.

Dijelovi i cjeline o kojima se govori u ovim pravilima su istovrsne; to mogu biti: dužine, kutevi, površine, razne figure...

Euklid spominje još dva pravila ali ih ne navodi kao *pravila razumijevanja*. Mi ćemo ih, jednostavnosti radi, označiti s PR-6 i PR-7. To su:

PR-6 Polovice jednakih (cjelina) su jednake.

PR-6 Dvostruko od jednakih (cjelina) je jednako.

3.1.3 Definicije

Euklid u *Elementima* iznosi i definicije geometrijskih pojmova, ukupno njih 23. Popis svih definicija može se naći u hrvatskom prijevodu[19] *Elemenata* od izdavačke kuće Kruzak (1999), a u tekstu koji slijedi navedene su samo one koje su potrebne za razumijevanje samog teksta.

Suvremenom čitatelju, pa čak i onom koji je već upozat s osnovama euklidske geometrije, nije lako razumjeti što je Euklid želio reći. Nekoliko je razloga tu prisutno, a jedan je što Euklid interpretira neke pojmove ovisno o situaciji. Tu mislim prvenstveno na jednakost raznih veličina i objekata.

[18] Vincenzo De Risi u članku *Euclid's Common Notions and the Theory of Equivalence* pretpostavlja da bi to mogao biti Theon iz Alexandrije.

[19] Prevela: Maja Hudoletnjak Grgić

Razumijevanje jednakosti posebno je važno u nastavi i obrazovanju oopćenito i tu treba pažljivo birati riječi, pogotovo ako se u svakodnevnom govoru one drugačije interpretiraju. Što se geometrije tiče prisutan je još jedan pojam, "kongruentnost", kojeg je gotovo nemoguće korektno objasniti u osnovnoj školi bez uvođenja novih dodatnih pojmova iz matematike. Euklid ne koristi pojam "kongruentnost trokuta" već govori o njihovoj *jednakosti*. Mi ćemo u ovom tekstu koristiti njegov naziv i govoriti o jednakosti likova.

Današnje obrazovanje koristi pojam *sukladnost* likova ako su oni izometrična slika jedan drugog. Reći da oni imaju isti oblik i veličinu je matematički nekorektno, ali može poslužiti za razumijevanje pojma sukladnosti u vrtićkoj dobi. Čini mi se još bolje izrezati likove i gibanjem jednog preklopiti s drugim.

Kod uvođenja novih pojmova Euklid je bio vrlo obazriv i radije ga je ostavio intuitivno razumljivim, a kasnije u tekstu ga je (re)interpretirao kako mu odgovara (v. raspravu u pojmu "figura" u odjeljku 3.2.3 pod nazivom Komentari vezani uz pravila razumijevanja na str. 27).

Značenje i tumačenje nekih pojmova u antičkoj Grčkoj i danas radikalno se razlikuju. Dodatna poteškoća, što se geometrije i matematike općenito tiče, je ta što suvremena matematika koristi simbole. Simboli imaju svoju povijest i današnja njihova interpretacija je specifična jer ne nose u sebi samo značenja pojmova već i čitavih procedura. Antička Grčka nije koristila simbole, a nama su ostali samo riječi i crteži i popratni tekst.

3.2 Komentari

Prije nego li prijeđemo na specifične komentare ima nekoliko komentara vezanih uz *Elemente* u cjelini. Ti se komentari odnose na jednakost geometrijskih pojmova što smo već ranije napomenuli, a ovdje ćemo reći nešto više o tome.

Mogućnost uspoređivanja je samo uvod u mjerenje, a jednakost dva objekta je samo specijalni odnos kod uspoređivanja što se veličine tiče. Što se tiče uspoređivanja konkretnih veličina Euklid je donekle uspio definirati jednakost dužina. Što se kuteva tiče, njihovo mjerenje ne može biti korektno definirano sve dok se shvaćaju kao neomeđeni dijelovi ravnine — ono što mjerimo treba biti omeđeno o čemu je nešto više rečeno u odjeljku 3.3.3 na str. 37 pod nazivom Pojam kuta.

Mjerenje[20] kuteva, zajedno s mjerenjem dužine, je na neki način nudi uvod u mjerenje površine što je dodatni argument za potrebom da se kut korektno i razumljivo definira. Tu vezu između kuta i površine uvažava Pitagorin poučak koji,

[20]Mjernje o kojem govorim je mjerenje u današnjem smislu, tj. mogućnost pridruživanja broja nekom objektu u nekom procesu.

prvotno formuliran, povezuje kvadrate nad stranicama trokuta, a ne njima pridružene brojeve. Detaljnije o tome rečeno je u odjeljku 4 na str. 52 pod nazivom Revitalizacija Pitagore.

3.2.1 Komentari vezani uz definicije

Uspoređivanjem tekstova raznih antičkih mislilaca sugerira da su Euklidove definicije naknadno ubačene u *Elemente* negdje u kasnijoj antici, a potiču od Herona[21] (Russo, 1998) ili kasnijih Euklidovih komentatora.

Kad čitanja *Elemenata* javlja se osjećaj da je Euklid imao potrebu nešto definirati u trenutku kad mu je zatrebao pojam koji nije direktno proizlazio iz njegovih crteža ali je bio implicitno prisutan. Na primjer, presjek dviju linija ili segmenata ili segmenta i linije. Mjesto gdje se one presjecaju ima neku ulogu u daljnjoj konstrukciji jer se često javlja potreba da se na njega treba refereirati. Iz tog je razloga bilo potrebno definirati "točku". Jednako tako je i s krajem linije, ako takav postoji. To ne znači da je točka građevni element linije i da se linija sastoji od točaka[22].

Komentirao bih Euklidovu rečenicu iz dokaza propozicije P. I-5 koja glasi:

> *"Uzmimo proizvoljnu točku F na (pravcu) BD (koji je jednak pravcu AD, op. autora)."*

Je li to u suprotnosti s gore spomenutom tvrdnjom da dužina nije sastavljena od točaka? U Euklidovom duhu, na slici 3, **točka F se može dobiti kao presjek kružnice nekog radijusa s centrom u A i pravca AB.**

Definicija I-1.

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

se prevodi kao

Točka je nešto što nema dijelova[23].

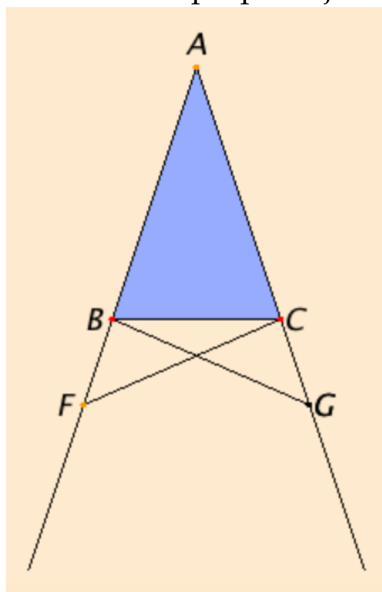
Moderni Google prevoditelj kaže: *"It is a sign, where there is no place"*, što uopće nije uopće loš prijevod. Kad bi Google znao da se radi o rečenici iz geometrije možda bi *znak* (Σημεῖόν) preveo kao *točka*. Drugim riječima *točka* je naznaka, upozorenje

[21] Heron iz Aleksandrije (10–75), grčki matematičar i izumitelj. Najpoznatije djelo *Metrika*.

[22] Vidi raspravu o neprekidnosti kod Aristotela na str. 25 u odjeljku 3.2.2 pod nazivom Postulat p.I-2.

[23] eng. A point is that of which there is no part (Heiberg, 1885).

Slika 3: Slika uz propoziciju P. I-5.



da se tu nešto dešava (presjek, rub nečega)[24]; ona nije mjerljiva ni u kojem smislu. Ova definicija zapravo govori o tome što točka nije, a ne što jest. Indikativno je da ljudi, kad crtaju štapom po zemlji i objašnjavaju jedan drugome kojim putem trreba ići, ne crtaju točku nego umjesto nje stavljaju križić.

Može se raspravljati i o tome da nešto drugo može biti ta osnova na kojoj se gradi geometrija, a ne točka. To nitko ne osporava, međutim točka je odabrana da bude to što jest.

U udžbeničkoj literaturi može se naći definicija: *"Točka je nešto što nema dimenzija"* što je više interpretacija Euklidove definicije jer uvodi dodatni pojam "dimenzija".

Euklidova definicija i nije definicija. Ona samo kaže da je *točka* metafizička osnova, među ostalim pojmovima, koje zajedno grade geometriju. Sloboda da se neki pojmovi ne definiraju već se definira odnos među njima je visok stupanj apstrakcije kojeg si je dopustio tek Hilbert. Euklid je bio vrlo blizu.

[24] Sâm naziv točka u hrvatski jezik vjerojatno je došao preko engleskog u kojem *point* nosi i značenja kao što su: pokazivati, uperiti, indikacija, smisao, što mi se čini bolji opis onoga što je Euklid želio reći. Riječ "točka" je vizualnog karaktera, što također ima smisla, a ne smislenog.

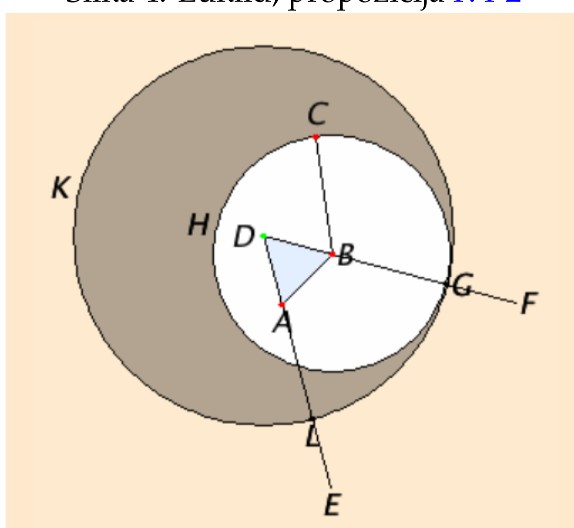
3.2.2 Komentari vezani uz postulate.

Cilj ovih komentara je da je Euklidove postulate možda bolje shvaćati kao upute za stvaranje geometrijskih konstrukcija nego kao aksiome u današnjem smislu.

Postulat p. I-1. Euklidov postulat I-1 kaže da je kroz bilo koje dvije točke moguće povući segment. Iako nije eksplicitno rekao da je **segment jedinstveno određen** s njegove dvije krajnje točke on to podrazumijeva u dokazima teorema i propozicija. Takva pretpostavka zapravo govori o strukturi prostora (ravnini) u kojem se sve događa, a ne samo o segmentima. Primijetite da to nije istina u sfernoj geometriji. Postulat o paralelama jednako tako ulazi u strukturu prostora ako ne i dublje i bilo bi dobro podrobnije istražiti odnos ta dva postulata. Autoru ovog teksta nije poznato je li netko u povijesti to detaljnije proučavao.

U propoziciji P. I-2 Euklid daje konstrukciju dužine koja ima jedan kraj u zadanoj točci A i jednaka je zadanoj dužini $\overline{BC}$.

Slika 4: Euklid, propozicija P. I-2



Konstrukcija je ingeniozna i ide na sljedeći način. (1) *Prvo* se konstruira jednakostraničan trokut $\triangle ABD$ nad segmentom $\overline{AB}$ kao osnovicom. (2) *Zatim* se konstruira kružnica s centrom B i radijusom $\overline{BC}$ koja siječe pravac DB u točci G. (3) *Slijedi* konstrukcija kružnice s centrom u D i radijusom DG koja siječe pravac DA u točci L. Dužina $\overline{AL}$ je tražena duljina. Da je tome tako slijedi iz jednakosti dužina $\overline{DB}$ i $\overline{DA}$ i jednakosti dužina $\overline{DG}$ i $\overline{AL}$.

Posljednja rečenica zaslužuje posebnu pažnju. Segment $\overline{DB}$ je dio segmenta $\overline{DG}$ i segment $\overline{DA}$ je dio segmenta $\overline{DL}$. Segmenti $\overline{DG}$ i $\overline{DL}$ su jednaki jer točke G i L leže na istoj kružnici s centrom u D. Isto tako su $\overline{BC}$ i $\overline{BG}$ jednaki jer C i G leže na zajedničkoj kružnici s centrom u B.

Nadalje, segmenti $\overline{DB}$ i $\overline{DA}$ su jednaki jer su to stranice jednakostraničnog trokuta. Euklid zaključuje da su segmenti $\overline{BG}$ i $\overline{AL}$ jednaki jer su to ostaci kad se iz jednakih cjelina izvade jednaki dijelovi (PR-3). Dakle, $\overline{AL}$ jednako je $\overline{BG}$ jednako je $\overline{CB}$ zbog tranzitivnosti (PR-1).

Postulat p. I-2. Termin 'neprekidno' u tom postulatu možemo interpretirati na više načina. Jedno je sigurno, a to je da to ne uključuje potpunost i povezanost u današnjem smislu jer takvo nešto nije u skladu s tadašnjim poimanjem kontinuuma u antičkoj Grčkoj.

Aristotel naglašava da neprekidnost nije atribut neke veličine; on ne govori o neprekidnoj cjelini već govori o neprekidnom dodiru (konekciji) dijelova koji čine cjelinu. Neprekidnost je relacija među stvarima koje se dodiruju (graniče), gdje granice uključuje i točke[25].

Druga moguća interpretacija bi se odnosila na podudarnost rubnih točaka dviju dužina koje se nadovezuju jedna na drugu, a treća u mogućnosti negraničenog broja ponavljanja postupka produljivanja.

Postulat p. I-3. Ono što još nedostaje u tom postulatu je ambijentalna ravnina u kojoj crtamo kružnicu.

Ilustrirajmo taj komentar primjerom. U propoziciji P. I-1 Euklid daje konstrukciju jednakostraničnog trokuta. U toj konstrukciji se konstruira kružnica s centrom u A i radijusom $\overline{AB}$, kao i kružnica s centrom u B i radijusom $\overline{BA}$. Euklid podrazumijeva da se one sijeku, štoviše sijeku se u dvije točke, ali on to uzima bez komentara. Nadalje, dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ imaju jednu zajedničku točku C, ali nije jasno zašto ne bi imali još neku.

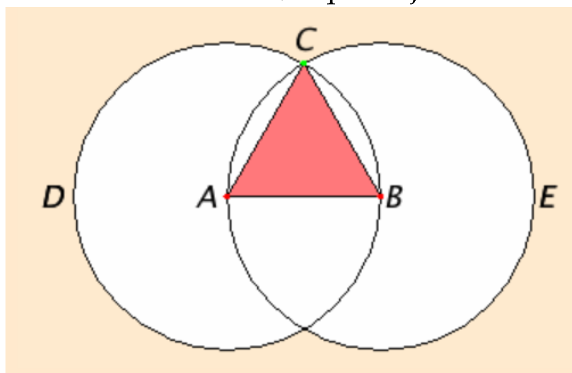
Dvije su dodatne napomene vezane uz gornju Euklidovu konstrukciju.

(1) Kako znademo da se dvije sijeku kružnice u točki C?

(2) Kako znademo da dužine AC i BC nemaju još neku zajedničku točku osim točke C.

[25] Tu ideju dalje razvija Leibniz u svom rukopisu *Specimen geometriae luciferae* i još nekima povezanih s njim, a koji datiraju negdje oko sredine 1690. To je prvi rukopis koji problem kontinuiteta stavlja u sam centar rasprave o tom bazičnom pojmu. Leibnizov pojam neprekidnosti je toliko apstraktan za ono doba i uključuje ono što bismo danas nazvali jednoparametarske familije objekata.

Slika 5: Euklid, ropozicija P. I-1



Što se tiče tvrdnje (1), stav je matematičara današnjice, da Euklid implicitno uvlači tvrdnju o neprekidnosti krivulje ili o neprekidnosti prostora u pozadini. Ako je tome tako onda je Euklid učinio propust u dokazu kojeg bi trebalo ispuniti nekim aksiomom ili više njih. To je, između ostalih, učinio Hilbert u svojoj knjizi *The Foundations of Geometry* (Hilbert, 1899). Ono što je zanimljivo je da niti jedan antički mislilac nije smatrao pitanje presijecanja među krivuljama i drugim geometrijskim likovima kao neki temeljni problem.

De Risi (Risi, 2021) upozorava da je drevna geometrija vrlo različita od današnje i naše današnje gledanje na neprekidnost dovodi do očekivanja da ono bude uključeno u osnove matematike. Što se Euklidove geometrije tiče bilo bi dovoljno postulirati odnos *kružnica-segment* i *kružnica-kružnica*[26] umjesto da se razvija neka opća teorija presjecanja.

Zašto to Euklid nije napravio? De Risi pokušava odgovoriti na to pitanje proučavajući odnose geometrijskih figura i crteža s tekstom dokaza u antičkoj Grčkoj. De Risi tvrdi da je antičko shvaćanje pravca, kružnice i linije općenito takvo da one nisu složene od točaka, ali tamo gdje dvije linije sijeku jedna drugu to mjesto je granica dijela presiječene krivulje, a granice linija su točke prema Definiciji D-3. Te rubne točke nastaju presijecanjem i tamo nisu bile prije toga.

Što se tvrdnje (2) tiče Euklid spominje nešto slično toj tvrdnji u propoziciji P. XI-1 (knjiga XI). Po mišljenju mnogih povjesničara ta propozicija nije sasvim razumljiva kao ni njen dokaz. Međutim, dokaz te tvrdnje je relativno jednostavan ako definiramo segment kako je to učinjeno u paragrafu 3.3.1 pod nazivom Segment (bis). Ta nova definicija segmenta je suvremena zakrpa Euklidovog teksta, što ne znači da se ona ne može koristiti u suvremenoj nastavi geometrije.

[26]Odnos *segment-segment* već je postuliran u Postulatu p. I-5

Postulat p. I-5. U postulatu I-5 zapravo se tvrdi da ako dva segmenta sijeku treći pod jednakim kutevima tada produženi u istom smjeru nemaju zajedničkih točaka. Svaki imalo rigorozniji mislilac u tome više vidi interpretaciju nego postulat i potreban je napor da bi se to preciziralo. Osim toga, tu se koristi pojam "smjer" kojeg Euklid intuitivno koristi ali ga zaobilazi definirati.

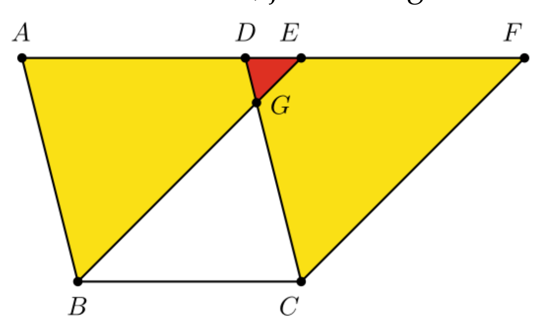
3.2.3 Komentari vezani uz pravila razumijevanja

Na prvi pogled pravila su intuitivno jasna ako imate u glavi neki model dok ih čitate. Međutim, izdignuta izvan svih mogućih modela ona su totalno zbunjujuća; ne znamo što je cjelina, što je dio i što znači dodati ili oduzeti. Potreban je bar neki model, iz jednostavnog razloga što se naše apstraktno razmišljanje ipak bazira na pojedinostima.

Euklid koristi pojam *jednake figure* kao primitivni pojam za koji nije apriori jasno što to znači. Također nije definiran niti pojam *figura* iako se iz teksta može zaključiti da se to odnosi na pravilne likove (trokuti, četverokuti,...) i njihove kombinacije.

Michael Beeson u svom članku *On the notion of equal figures in Euclid* (Beeson, 2022) sugerira da Euklid pod jednakim figurama podrazumjeva figure jednakih površina. Jednostavan primjer u kojem se to naslućuje je propozicija P. I-5 u kojoj se tvrdi: *da su dva paralelograma jednakih baza između dviju paralela jednaka*. Jedna

Slika 6: Euklid, jednake figure



moguća situacija prikazana je slikom 6. Evo Euklidovog razmišljanja uz male preinake.

> *Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{EF}$ su jednake jer paralelogrami po pretpostavci imaju jednake baze. Tada su $\overline{AE}$ i $\overline{DF}$ jednake dužine jer su nastale od jednakih baza kojima su dodane (konkatenirane) jednake dužine ($\overline{DE}$).*

Trokutovi $\triangle ABE$ i $\triangle DCF$ su jednaki jer imaju jednake odgovarajuće stranice. Ako svakom od njih oduzmemo trokut $\triangle DEG$ (crveno obojen) rezultat su jednaki četverokuti $ABGD$ i $CFEG$. Ako svakom od njih dodamo trokut $\triangle BCG$ kao rezultat dobivamo polazne paralelograme $ABCD$ i $BCFE$ koji su jednaki.

U nizu gornjih tvrdnji stoji i tvrdnja da *su četverokuti $ABGD$ i $CFEG$* jednaki likovi iako čak nisu niti kongruentni. Beeson nudi zaključak da se jednakost, o kojoj Euklid ovdje priča, odnosi na površine.

Zašto Euklid izbjegava govoriti o površini? Ako bi uvodio taj pojam onda bi ga trebao definirati ili aksiomatizirati. U oba slučaja upada u poteškoće jer mjeriti površinu znači pridružiti nekom obliku (figuri) broj koji nije geometrijski koncept. Druga poteškoća je u (ne)mogućnosti pridruživanja površine svakoj figuri. Koje su to figure koje imaju površinu, a koje nemaju. Suvremena teorija mjere se ne baš jednostavno nosi s takvim pitanjima. Posebno pitanje je aditivnost površine kod dijeljenja cjeline na dijelove. Interpretirajući *pravila razumijevanje* za svaki tip objekata na svoj način on je bio uvjeren da može zaobići gore navedene poteškoće. *Jednake figure* ostaje nedefiniran primitivan pojam.

Beeson u gore spomenuto članku tvrdi da je Euklid mogao korektno definirati "jednakost figura" ostajući dosljedan svojoj geometrizaciji. Jedan od načina je da se uvede pojam "jednakih trokutova" i "jednakih četverokuta" koji počivaju na pojmu sličnosti i nekim svojstvima proporcija. Detalji takvog pristupa su van interesa ovog teksta.

Možda je korisno još napomenuti da navedena pravila govore o dovoljnim argumentima za jednakost (figura) ali ne i nužnim.

3.2.4 Broj kod Euklida?

Postulat p. I-3 spominje pojam 'radijus'. Radijus može imati dvojako značenje ovdje. Segment između dvije zadane točke ili broj pridjeljen tom radijusu. Historičari tvrde da se radi o prvom slučaju iako je Euklid dio knjige V od *Elemenata* posvetio omjerima dviju dužina (Eudoxova teorija proporcija).

Bez obzira na to, postulat kaže da je radijus ovdje proizvoljan. Skup iz kojeg uzimamo radijuse može biti i konačan, ovdje to nije rečeno, a ako je tome tako onda modeliramo 'konačnu geometriju'. Ako Euklid ne misli na konačnu geometriju, a pretpostavljam da je tako jer je znao da postoji beskonačno mnogo (prostih) brojeva, onda nije sasvim jasno, u današnjem smislu poimanja broja, jesu li ti radijusi prirodni, racionalni ili realni brojevi.

Taj aksiom ima za posljedicu da točaka na pravcu ima isto toliko koliko i mogućih radijusa ako dozvolimo da kružnica s centrom na pravcu siječe taj pravac u bar još jednoj točci. Takvo razmišljanje vodi na ono što danas nazivamo *brojevni pravac* koji se u nastavi matematike uzima zdravo za gotovo i bez ikakvih komentara. Starogrčki matematičari nisu poznavalu strukturu realnih brojeva, nisu imali pojam potpunosti, ali su još i prije Euklida znali da postoje brojevi (čitaj 'dužine') koji nisu omjeri dva cijela broja u današnjem smislu cijelog broja.

3.3 Osnovni pojmovi. Staro i novo

Osnovni geometrijski pojmovi su: točka, dužina, trokut, četverokut, pravokutnik, pravac, ravnina, kut…S tim pojmovima učenici se susreću već u četvrtom razredu osnovne škole, u petom razredu neki od tih pojmova već se pokušavaju definirati, a u šestom razredu učenici se detaljnije upoznaju s trokutom i njegovim konstrukcijama.

Presudnu ulogu u nastavi geometrije igraju alati *šestar* i *ravnalo*. To su pomagala koja su izuzetno korisna i uz njihovu pomoć izgrađena je ova naša civilizacija: ceste, građevine, brodovi…. Objasnit ćemo njihovu ulogu u geometrijskim konstrukcijama i opozoriti na njihov doseg i ograničenja.

Euklidska geometrija danas, onako kako je predstavljena u udžbenicima nije zamišljena da prati Euklidove *Elemente* niti da bude konzistentna. To je nakupina činjenica za koje se smatra da su potrebne za razumijevanje današnje tehnologije i sustavna je na svoj nezgrapan način. Kažem nezgrapan jer se uvode i pojmovi koji su proizvod kasnijeg doba (18. st.) kao što je na primjer metrika, a da ne spominjem računalnu tehnologiju kojoj tu zapravo nema mjesta.

Uvođenje metrike u *Elemente* narušava izrazito geometrijsku strukturu Euklidovog teksta i uvodi dodatne nejasnoće kojih ionako ima dovoljno. Međutim, obrazovni sadržaj to sebi može dopustiti je ionako nije niti potpun niti konzistentan niti razumljiv što se osnovnih pojmova i njihovog odnosa tiče. Bez obzira na sve što je rečeno geometrija je uvod u apstraktno razmišljanje i ne vidim niti jedan drugi sadržaj koji bi ju u toj namjeni mogao zamijeniti.

3.3.1 Točka, dužina, pravac

Točka. Točka je vrlo apstraktan pojam, Euklid ju zamišlja kao nešto što nema dijelova. U modernim udžbenicima nalaze se definicije poput: *Točka je osnovni objekt u geometriji bez dimenzije, tj. njena širina, dubina i visina su jednake nuli*. Koliko je nepotrebnih i zbunjujućih novih termina u opisu ovog fundamentalnog pojma koji je intuitivno jasan. Euklid kaže da

točka nema dijelova, odnosno da je nedjeljiva

i točka. Drugim riječima, sve linije, likove i oblike možemo rastavljati osim točke. Njena je suštinska funkcija razlikovnog karaktera, što znači da ako dva oblika nemaju zajedničkih točaka ili postoje točke koje pripadaju jednom objektu ali ne i drugom, oni su različiti. Nije neznanje ako se kaže da je točka pojam koji se ne definira. Za Kanta točka nije prepoznatljiv dio prostora, za njega je točka naprosto granica nečega u prostoru.

Neki moderni udžbenici u Hrvatskoj uvode pojam točke kao element skupa koji se naziva ravninom, gdje je ravnina skup točaka. U težnji da koriste rječnik teorije skupova ulaze u cirkularnost. Rečeno sarkastičkim tonom, u tom smislu je svaki skup točaka ravnina pa tako i moj džep.

Udaljenost točaka. Udaljenost kao pojam u današnjem smislu ne nalazi se u Euklidovim *Elementima* i današnja geometrija u školi je određena kompilacija njegovih tekstova i suvremenih potreba. Euklidove definicije i pojmovi su nejasni i nije moguće na njima sustavno i korektno graditi bilo kakvu teoriju. On je bio i ostao veliki inspirator.

U tekstu koji slijedi pretpostavljamo da znademo izmjeriti udaljenost točaka nekim instrumentom kao što je, na primjer, metar ili milimetarsko ravnalo. Takav pristup geometriji je intuitivan i prilagođen je učenicima koji već imaju određeno predznanje i iskustvo s geometrijom ravnine i prostora. To je tradicionalni pristup u gotovo svim svjetskim udžbenicima, a samom teorijskom konstrukcijom te udaljenosti ćemo se pozabaviti u paragrafu 3.3.1 na str. 35. Osnovnu ulogu u tom pristupu ima šestar kao pomagalo koje 'čuva udaljenost' između dviju 'izmjerenih točaka'.

Same točke razlikujemo uz pomoć udaljenosti što predstavlja kvantitativnu mjeru razlikovanja točaka. Udaljenost točaka je broj pridružen dvjema točkama. Za dvije točke A i B udaljenost označavamo s $|AB|$ i dodatno zahtijevamo simetričnost u smislu $|AB| = |BA|$. Ako procedura mjerenja zahtijeva kretanje od jedne točke do druge to znači da je svejedno od koje točke počinjemo 'mjeriti' udaljenost.

> Jednakost točaka. Karakterizacija.
> *Dvije točke su jednake ako i samo ako je njihova međusobna udaljenost jednaka nuli.*

Ovo svojstvo udaljenosti nije eksperimentalna činjenica, to je formulacija našeg viđenja stvarnosti koju nazivamo *definitnost* udaljenosti. To je svojstvo ovog univerzuma u ovom trenutku i mi ga uvažavamo kao dogovor u opisivanju realnosti. Ako je to dogovor, to znači da ga možemo i promijeniti.

Sve točke P koje su na udaljenosti r od zadane točke C nazivamo *kružnicom* radijusa r s centrom u točki C i označavamo ju s $K(C, r)$. Šestar je (jedna od) naprava koja pamti udaljenost među točkama i njime crtamo kružnicu.

Simetričnost udaljenosti nije prisutna u svim situacijama. U gradskom prometu nisu sve ulice dvosmjerne i udaljenost od jednog raskršća do dugog može ovisiti o početnoj točki mjerenja. Taksista koji mjeri tu udaljenost poštuje pravila kretanja po ulicama i može izmjeriti različite udaljenosti tj. $|AB| \neq |BA|$. Euklidska udaljenost, o kojoj govorimo, pretpostavlja da između točaka A i B nema takvih 'pravila vožnje'.

Dužina. Relacija trokuta. Ako u osnovnoj školi kažemo da je dužina (segment) određena s dvije međusobno različite točke to je sasvim dovoljno. Naravno, treba napomenuti da ne postoje dvije dužine koje imaju zajedničke krajeve što Euklid zaboravlja reći.

Udžbenici opisuju dužinu kao: *Ravnu crtu koja povezuje dvije točke*, što otvara nova pitanja. Euklid definira (Definicija I-2) crtu kao nešto što ima duljinu ali nema širinu, ali pojmove "širina" i "duljina" ne objašnjava, dok "ravnu crtu" shvaća kao

onu crtu koja se ravnomjerno prostire među točkama po sebi.

Takva crta lokalno izgleda isto kao i ona sama[27]. Dio glavne kružnice na sferi također bi zadovoljava ovaj opis, samo što u tom slučaju nije prisutna jedinstvenost. Postoje točke na sferi koje možemo povezati s beskonačno mnogo "segmenata", sjeverni i južni pol na primjer. Ono što nedostaje u toj definiciji je "ravnost" pozadinske plohe na kojoj leži ta crta.

Prvo pitanje koje se postavlja nakon uvođenja dužine je kako ustanoviti je li neka točka leži na zadanoj dužini ili ne? Intuitivno prihvaćamo

Točka na dužini.
(A) *Točka ne leži na zadanoj dužini ako s krajevima te dužine čini trokut*,
(B) *Točka C leži na zadanoj dužini $\overline{AB}$ ako je*

$$|AC| + |CB| = |AB|. \tag{2}$$

[27] eng. A straight-line is (any) one which lies evenly with points on itself. Ovo je više opis nego definicija. Korektno se dužina može definirati uz pomoć metrike koju Euklid nije imao (v. Ravna crta (bis) niže u tekstu).

Ovo gore rečeno zaslužuje posebnu pažnju. Izjava (B) je metrička karakterizacija kolinearnosti točaka. Ako to nije slučaj onda točke čine trokut. Drugim riječima, za točku C koja nije na dužini $\overline{AB}$ vrijedi:

$$|AC| + |CB| < |AB|$$

ili

$$|AC| + |CB| > |AB|.$$

Prva nejednakost nije u skladu s našim iskustvom jer kad bi ona vrijedila onda bi putovanje od A do B bilo kraće preko treće točke C nego direktno po dužini $\overline{AB}$. U takvom prostoru možda ne bi vrijedio ovakav zakon održanja energije u konzervativnom polju kakvog mi poznajemo. Iz tog razloga, odbacujemo prvu mogućnost i uvažavamo drugu. Dakle:

> Relacija trokuta.
> *Za svake tri točke*[28] A, B, C *vrijedi nejednakost* $|AC| + |CB| \geq |AB|$.

Relacija trokuta, uvako iskazana je relacija među brojevima (udaljenostima) i to je relacija koju usvajamo kao aksiom u izgradnji metričke strukture.

Euklid dokazuje relaciju trokuta u propoziciji P. I-20 s tom razlikom što dovodi u odnos konkatenirane dvije stranice trokuta s trećom. Posljedica relacije trokuta je da je segment najkraća crta među svim poligonalnim linijama koje povezuju dvije točke.

Segment (bis). Nakon svega što je rečeno, ravnu crtu bismo mogli definirati uz pomoć udaljenosti na sljedeći način:

> Ravna crta (bis).
> *Crta koja povezuje točke A i B je ravna crta ako za svaku točku C na toj crti vrijedi* $|AC| + |CB| = |AB|$.

Posljedica ovakve definicije je da:

(1) *dva segmenta, ako se sijeku, sijeku se u jednoj točci i*
(2) *ako je C točka na segmentu $\overline{AB}$, onda su segmenti $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ podsegmenti od $\overline{AB}$.*

Dokaz ove posljednje tvrdnje zahtijeva upotrebu relacije trokuta u nekoliko navrata.

[28] kao i za njihovu cikličku zamjenu.

Jednakost dužina. Euklid ne spominje eksplicitno, kao što je već rečeno više puta, što znači da su likovi jednaki, pa tako ne kaže ništa ni za jednakost dužina. Međutim, u definiciji kružnice[29] (Definicija I-15) on navodi da su sve dužine koje povezuju centar kružnice s točkama na njoj jednake jedna drugoj.

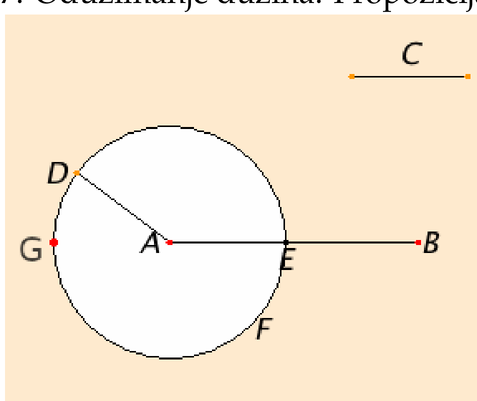
Dužine su, prema tome što je gore rečeno, jednake ako su radijusi iste kružnice ili su indirektno, putem kružnica i *aksioma* (str. 20) usporedive s radijusima iste kružnice. Na taj način Euklid zapravo postulira jednakost dužina specifičnog tipa, a dalje koristi *univerzalna pravila razumijevanja* odnosno aksiome.

Takav pristup on koristi u konstrukciji jednakostraničnog trokuta (propozicija P. I-1) (slika 5) i konstrukciji dužine s početkom u zadanoj točci koja je jednaka zadanoj dužini (propozicija P. I-2) (slika 4) koje su polazne konstrukcije za sve ostale.

Na taj način Euklid zaobilazi uobičajene transformacije ravnine: translacija, rotacija, zrcaljenje koje on ne koristi kao takve. Te izometrije su produkt geometrije 18. st. i kasnije. Naravno da nema razloga, što se nastave geometrije u školi tiče, ne spominjati te transformacije. Svi mi mašemo rukama i koristimo izrezane likove kad želimo pokazati kad su oni jednaki, a da jednakost nismo definirali.

Konkatenacija. Produljenje dužine. Dvije dužine konkateniramo tako da ih smjestimo na zajednički pravac na način da imaju zajedničku samo jednu točku. Lijepo rečeno, ali kako to provesti uz pomoć ravnala i šestara ili samo pomoću šestara. Ideja za takvu konstrukciju već se nalazi u propoziciji P.I-3 gdje Euklid "odu-

Slika 7: Oduzimanje dužina. Propozicija P. I-3



[29] A circle is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure equal one another.

zima" jednu dužinu od druge (slika 7). Dovoljno je točki E odrediti dijametralno suprotnu točku G na kružnici F. To se može učiniti konstrukcijom šesterokuta upisanog u kružnicu F s jednim vrhom u točci E. Dužina GB ja tada *konkatenacija* dužine $\overline{AB}$ i dužine C ili *produljenje* dužine $\overline{AB}$ dužinom C. Rezultat konkatenacije označavamo kao $\overline{AB} \circ C$.

Konstrukcija uz pomoć ravnala je definitivno prilagođena učenicima osnovne škole jer ravnalo pamti relaciju trokuta. Za produljenje ravne crte dovoljno je "priljubiti ga uz ravnu crtu" i produljiti ju na odgovarajuću stranu.

Pravac je produljenje dužine. Pravac za Euklida je moguća ekstenzija dužine, a dužina ima potencijal da bude produljena. Svaki korak produljivanja odvija se u ograničenom području kojeg određuje crtaća ploha i ekstenzija dužine je opet dužina koja može biti produljena. Grci nisu imali pojam 'beskonačno' i ako kažemo da je pravac beskonačna ravna crta, onda takvo nešto ne postoji u Euklidovoj geometriji.

(Kiselman, 2015) također potvrđuje tu tezu. Termin koji je Euklid koristio za 'ograničenu ravnu crtu' je *eutheia* i to se eksplicitno vidi iz njegove definicje D. I-4 iz prve knjige *Elemenata*. Također, u propoziciji P. I-12, u kojoj je opisan postupak crtanja okomice na pravac, *eutheia* poprima prefiks *apeiros* što se može prevesti kao 'beskonačno', 'bez granice' ili 'neodređeno' i taj prefiks bi bio nepotreban kad bi *eutheia* značilo 'pravac'.

Međutim, u dokazu propozicije P. I-22, *eutheia* odjednom znači zraka što se lako može ustanoviti u paralelnom grčko-engleskom prijevodu (Heiberg, 1885).

U postulatu p. I-2 koji glasi: *Dužinu je moguće neprekidno produljivati*, korišten je termin *eutheia* za ono što se produljuje, a to nikako nije pravac. Iz toga također zaključujemo da *eutheia* znači ograničena ravna crta.

Autori udžbenika govore o pravcima kao o neograničenim ravnim crtama misleći da su time postigli nešto bolje i pametnije, ali opisani postupak produljivanja je zapravo karakterizacija pojma *beskonačno*[30] ili *neomeđeno*. Čiča Euklid je čini se znao za zamku 'beskonačnosti' i nije bez razloga definirao pravac kao potencijalo produljenje dužine.

[30] Za niz brojeva $x_n, n \in \mathbb{N}$ kažemo da je neomeđen odozgo ako za svaki broj $M > 0$ postoji element niza $x_k, k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k > M$. Tada se kaže da je limes superior tog niza beskonačno. To isto, ispričano u kontekstu produljivanja dužine, zvuči ovako: Ako za svako produljenje dužine $\overline{AM}$ postoji mogućnost produljenja koje sadrži točku M, a dodatno produljenje je veće od nekog unaprijed zadanog iznosa, onda je konstrukt (tj. pravac) nastao produljivanjem neomeđen. Ova tvrdnja, poznata kao Arhimedov aksiom, je karakterizacija beskonačnosti koju su stari Grci prihvaćali kao aksiom.

Što se hrvatskog obrazovnog portala e-Škola tiče tamo se, u Matematici za 5. razred, pravac uvodi odmah nakon točke. Autori ga ne definiraju nego ga opisuju *kao ravnu neomeđenu crtu koja se sastoji se od beskonačno mnogo točaka*, dok je ravnina *skup točaka koja ima beskonačno mnogo elemenata*.

Konstrukcija mjere udaljenosti. Opisano Euklidovo produljenjue dužine je klasičan primjer pripreme za konstrukciju *ekstenzivne mjere* ϕ koju ćemo zvati *duljinom*.

Dva su uvjeta za egzistenciju takve mjere bez obzira na kakvom skupu entiteta ju gradimo. Prvi je mogućnost *konkatenacije* (nadovezivanja) objekata koje želimo mjeriti, s to su ovdje dužine (štapovi). Produljenje jednog štapa drugim je upravo takvo nadovezivanje. Konkatenacija je algebarska operacija na skupu štapova jer je rezultat konkatenacije dva štapa opet štap (oznaka $\circ$).

Drugi je uvjet mogućnost uspoređivanja štapova. Štapove uspoređujemo tako da priljubljene štapove postavimo na pod prostorije i njihove krajeve prislonimo uz zid. Pogledom na druge vrhove štapova možemo ustanoviti koji od dva štapa je *dulji* ili *jednako dug* kao onaj drugi (oznaka $\succcurlyeq$). Ovo je vrlo gruba ideja koja se uz pomoć neke tehnologije može dodatno razraditi i poboljšati.

Precizirajmo malo gornja razmatranja. Osim kod mjerenja štapova, konkatenacija je prisutna i u slučaju mjerenja masa:

$$a \circ b \text{ za nadovezivanje jednog štapa na drugi,}$$
$$m_1 \circ m_2 \text{ za sjedinjenje dviju masa u jednu cjelinu.}$$

Konkatenacija paru (a, b) objekata pridružuje treći objekt $a \circ b$ koji je rezultat konkatenacije.

Mjerni instrument, odnosno mjera $a \mapsto \phi(a)$ kao funkcija, objektu pridružuje broj i ta procedura ima, odnosno zahtijevamo da ima, određena svojstva bez kojih ne bismo bili u stanju donositi zaključke niti formulirati fizikalne zakone. Ti zahtjevi se zapisuju u niže navedenoj formi i mjeru koje udovoljava tim zahtjevima nazivamo `ekstenzivna mjera`. Evo tih zahtjeva

`Ekstenzivna mjera.`

$$\forall a, b,\ a \succcurlyeq b \iff \phi(a) \geq \phi(b), \tag{3}$$
$$\forall a, b,\ \phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b). \tag{4}$$

Osnovno pitanje koje se postavlja je kakvi su dodatni zahtjevi na preferenciju $\succcurlyeq$ i konkatenaciju $\circ$ da bi bili zadovoljeni zahtjevi (3) i (4). Nećemo navoditi sve uvjete na preferencijalnu strukturu koja to osigurava; to je sadržaj Hölderovog teorema, a njegov potpuni iskaz može se naći u knjizi *Measurement theory* (Roberts and Luce, 1968, str. 122).

Jedan od uvjeta koji osiguravaju egzistenciju ekstenzivne mjere je tzv.

> `Arhimedov aksiom.`
> Za svaka dva elementa $a, b \in S$
>
> $$2a \succ a \implies \text{postoji broj } n \text{ tako da } na \succ b,$$
>
> gdje se na definira induktivno; $1a = a$ i $na = (n-1)a \circ a$.

Arhimedov aksiom u našem slučaju leži u mogućnosti produljivanja štapova neohraničen broj puta s uvijek istim štapom.

Šro se gometrije tiče, bez obzira radi li se o mjerenju dužina ili kuteva treba ih znati uspoređivati i konkatenirati (zbrajati). Što se kuteva tiče Euklid ne razlikuje objekte i njihovu mjeru jer nije imao razvijen ni pojam broja niti algebru. Bez obzira na to dat ćemo nekoliko ideja kako se to može uklopiti u njegove obrasce.

U današnjem obrazovanju, od osnovne škole pa nadalje jednakost objekata definira se preko jednakosti njihovih mjera, a da te mjere nisu ni konstruirane. **Jednakost objekata, zajedno s konkatenacijom, je primarna, a jednakost njihovih mjera je sekundarna i o tome govori Hölderov teorem.**

3.3.2 Paralelni pravci

Pravci u ravnini su paralelni ako se ne sijeku, tj. nemaju zajedničkih točaka. Pojam paralelnosti odnosi se na dva pravca iako ima smisla govoriti i o skupu paralelnih pravaca ili snopu paralelnih pravaca.

Pitanje koje je zaokupljalo Euklida i mnoge matematičare nakon njega je kako utvrditi je li se pravci sijeku ili ne, a da se ne mora "gledati u beskonačnost". Ako se i sijeku to može biti van našeg vidokruga ili dosega naših mjernih instrumenata. Prema tome, kriterij za paralelnost treba pronači u konačnosti. O tome govori peti postulat iz I knjige Euklidovih *Elemenata* iskazan u odjeljku Euklidovi postulati[31] na str. 19. Prepišimo taj postulat ali bez korištenja pojma pravac:

> Postulat I-5 (bis)
> *Ako jedna dužina siječe druge dvije dužine tako da je zbroj kuteva s iste strane tih dužina manji od dva prava kuta, tada se produljenja tih dviju dužina sijeku s one strane polazne dužine gdje je zbroj unutarnjih kuteva manji od dva prava kuta.*

Euklidov V postulat govori o odnosu pravaca van našeg vidokruga i na suptilan način izražava Euklidov osjećaj da svaka točka na paraleli kroz točku P ima jednaku udaljenost od pravca p kao i točka P. O dokazu te tvrdnje možemo razgovarati tek nakon uvođenja pojma okomice i udaljenosti točke od pravca.

3.3.3 Pojam kuta

U udžbenicima geometrije danas u svijetu pojam kuta je dvoznačan. Neki ga shvaćaju kao 'dio ravnine', a drugi kao broj (mjera, vrijednost). Komentirat ćemo oba pojma i ukazati na nekorektnosti i poteškoće koje se javljaju u nastavi i protežu se kroz cijelo osnovno i srednjoškolsko obrazovanje i kasnije.

Kut kao dio ravnine. U takvom pristupu kut se najčešće definira kao *"dio ravnine omeđen s dva pravca koji se sijeku"*. Postoji još jedna definicija koja kaže da je: *"Kut dio ravnine omeđen s dva polupravca koja imaju zajedničku točku (vrh kuta)"*. Takva definicija kuta je najčešća u nastavi.

U općem položaju pravaca u ravnini, dio ravnine izvan pravaca je nepovezan i sastoji se, korektno govoreći, od 4 komponente povezanosti. Koja od tih komponenti je kut? Druga definicija je nešto preciznija, ali također implicitno sugerira da je kut neomeđen. Ako se kut želi definirati tako da se može mjeriti tada niti jedna od gornjih definicija nije dovoljno precizna i korektna bez većih korekcija.

Da bi se kut mogao mjeriti nužno je definirati ga na nekoj omeđenoj konfiguraciji i zatim dokazati invarijantnost tog pojma i njegove mjere na transformacije za koje očekujemo da čuvaju mjeru kuta. To je moguće napraviti i na srednjoškolskoj razini (v. odjeljak Mjerenje kuteva na str. 55).

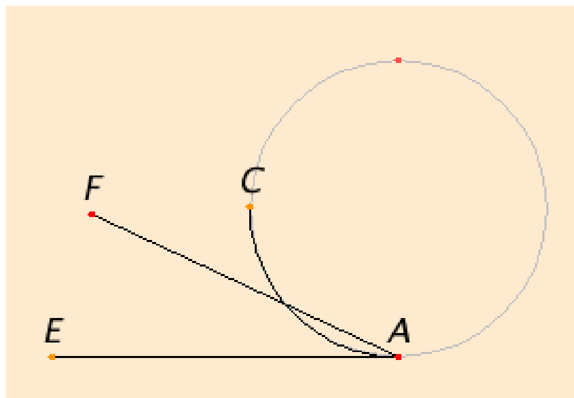
Euklidova definicija kuta. Pojam kuta je izuzetno kompleksan i teško ga je korektno definirati u ovom trenutku bez ulaženja u cirkularnost. Definicije u udžbenicima su uglavnom opisne, a to je slučaj i s Euklidovom definicijom kuta.

Euklidova definicija kuta (sl. 8) je (*Elementi*, knjiga I, definicija I.D-8):

> `Kut (Euklid).`
> *Ravninski kut je nagib između dviju linija u ravnini koji se sijeku i ne leže na istoj dužini.*

U svakodnevnom jeziku nagib je sinonim za kut i Euklidova definicija je cirkularna. Korektna definicija bi novi matematički pojam trebala definirati pomoću poznatih što u ovom slučaju to baš i nije slučaj; 'nagib' i nije neki matematički pojam. Drugi sinonimi za 'nagib' su: naklonost, sklonost, težnja... koji izražavaju potencijal nečega (ili nekoga) da prihvati ili postane nešto drugo. U tom smislu 'nagib' između zraka uključuje potencijalnu dinamiku transformacije jedne zrake u drugu samo je pitanje kako to korektno izraziti. Formalno gledajući to je uređen par[32] (p, q) zraka ali takva definicija nema 'geometrijski naboj'.

Slika 8: Euklidova definicija kuta.



Euklidova ilustracija vezana uz kut prikazana je na slici 8. Umjesto uređenog para zraka $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$ možemo pisati $\angle FAE$ ili naprosto $\angle A$ ako točka A nema više s njom incidentnih zraka. Tu točku nazivamo *vrhom* kuta, a zrake $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{AE}$ su rubne zrake kuta. Euklidova definicija je ipak univerzalnija od one udžbeničke jer se dodatno može proširiti i na kut između kružnice (krivulje) i pravca kako je to prikazano na slici 8. Kut između luka krivulje CA i pravca (dužine) $\overline{EA}$ je kut koji nastaje u graničnom procesu[33] od kuta $\angle CAE$ kad se točka C približava točki A po luku krivulje.

Kao nadopunu Euklidu može se uvesti pojam *vanjskog kuta* kao "nadogradnju" do punog kuta. Za svaku točku vanjskog kuta A i svaku točku B unutrašnjeg kuta, koje nisu na rubnim zrakama, segment $\overline{AB}$ siječe jednu od rubnih zraka.

[32]Termin "uređen" ovdje znači da je važan poredak objekata u zagradama koji su odvojeni zarezom. To bi značilo da je kut (p, q) različit od kuta (q, p). U prvom slučaju zraka p inklinira zraci q, a u drugom zraka q inklinira zraci p. Drugim riječima, uređen par određuje orijentaciju kuta. Euklid nije koristio orijentirane kuteve pa nećemo niti mi u ovom tekstu.

[33]Pojam *granični proces* je termin suvremene matematike i spada u matematičku analizu, ali sam ga ovdje upotrijebio jer je intuitivno jasan i razumljiv. Drugim riječima, u graničnom proscesu $C \to A$, C se približava A, a to znači da je udaljenost $|CA|$ infinitezimalno mala veličina, tj. manja od bilo kojeg konačnog iznosa. Začetnici modernog infinitezimalnog računa su Newton i Leibniz.

Kut kao element trukuta. Ako pažljivije čitamo sliku 8 vidi se da Euklidova definiciji kuta ne ovisi o izboru točaka E i F na zrakama $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AF}$ respektivno. Drugim riječima, dovoljno je uzeti konkretne točke E, F i promatrati trokut $\triangle FAE$. U tom trokutu kut je otvor pod kojim se vidi nasuprotna stranica. Stranice $\overline{AF}$ i $\overline{AE}$ tokuta su *rubne* stranice kuta.

Jednakost likova i veličina Euklid ne definira eksplicitno[34], katkada ih smatra jednakima ako imaju jednaku površinu (Beeson, 2022) (v. str. 27 ovog teksta). Međutim, pažljivije čitanje propozicije P. I-4, nudi zaključak da bi jednakost trokutova trebala značiti jednakost njegovih stranica i njima odgovarajućih kuteva. Drugim riječima, jednakost trokutova i jednakost kuteva su neraskidivo vezani. Nadalje, u propoziciji P. I-8 pretpostavka o jednakosti stranica trokutova je dovoljna za jednakost kutova. Nakon gore rečenog, Euklid bi mogao definirati jednakost[35] trokutova na sljedeći način:

> `Jednakost trokutova.`
> *Za dva trokuta kažemo da su jednaka ako imaju tri para jednakih stranica.*

Drugim riječima, ako je $|AB| = |A'B'|$ & $|BC| = |B'C'|$ & $|CA| = C'A'|$ onda su trokutovi $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ jednaki.

Dodatno, ako im se vrhovi preklapaju, onda im se i stranice preklapaju pa su jednaki. Napomenimo da trokutovi $\triangle ABC$ i $\triangle ACB$ nisu nužno jednaki.

Jednakost kuteva. Euklid prvi put koristi pojam jednakosti kuteva u propoziciji P. I-4 ali ga ne definira. Pogledajmo iskaz te propozicije radi lakšeg razumijevanja teksta koji slijedi. Iskaz te propozicije u *Elementima* i ovaj ovdje neznatno se razlikuju.

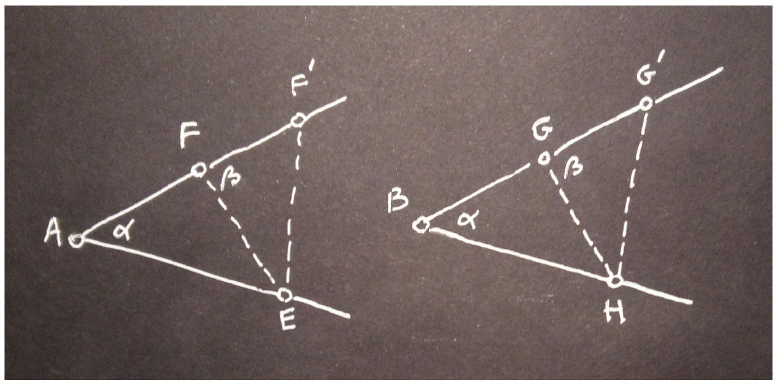
> `Propozicija P.I-4.`
> *Ako dva trokuta imaju jednake dvije stranice jednake kuteve omeđene tim stranicama onda su stranice nasuprot tih kuteva jednake i preostali kutevi su jednaki i trokutovi su međusobno jednaki.*

Neki komentatori Euklidovog teksta smatraju da bi se dio te propozicije mogao uzeti kao jednakost kuteva, što je Hilbert i učinio u svojoj knjizi *Zasnivanje geometrije* (Hilbert, 1899). Evo moguće definicije jednakosti kuteva (v. također sliku 9).

[34] osim za prave kuteve u Postulatu p. I-4.
[35] sukladnost

`Jednakost kuteva.`
Kažemo da su kutevi $\angle FAE$ i $\angle GBH$ jednaki ako i samo ako za točke E, B, G, H na rubnim zrakama tih kuteva jednakosti $|FA| = |GB|$ & $|EA| = |HB|$ imaju za posljedicu $|FE| = |GH|$.

Slika 9: Jednakost kuteva.



Napomene uz definiciju. Tri su napomene.

Napomena1. Definicija se odnosi na kuteve koji su kutevi trokuta. Za kuteve veće od ispruženog kuta definicija se može proširiti bez velikih poteškoća. Detalje ostavljam čitatelju. Pitanje je što je s ispruženim kutevima? Jednakost ispruženih kuteva treba postulirati što je Euklid indirektno i učinio na način da je postulirao jednakost pravih kuteva.

Napomena2. Pretpostavimo, za raspravu u okviru napomene, da je trokut $\triangle AFE$ pravokutan. Tada omjer

$$\lambda := \frac{|AF|}{|AE|}$$

ne ovisi o duljinama stranica $|AF|$ i $|AE|$ (sve dok je trokut pravokutan). To je posljedica Thalesovog teorema o proporcijama (theorem 3.1). Drugim riječima kut je jednoznačno određen omjerom λ kojeg, apstraktno govoreći, možemo uzeti kao vrstu mjere kuta. U udžbenicima i drugim popratnim sadržajima su pojam kuta i njegove mjere isprepleteni, što ima svoje "opravdanje" u ovome što je upravo rečeno. Iz tog razloga, često se govori da su kutevi jednaki ako imaju jednaku mjeru bez obzira kako je ta mjera definirana[36].

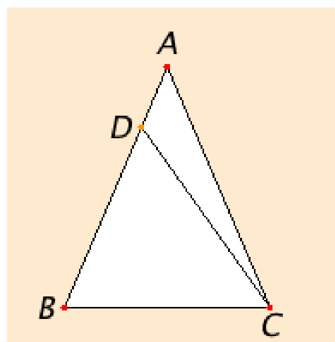
[36] sec.mjerenje.kuteva

Također je važno napomenuti da jednakost kuteva $\angle A$ i $\angle B$ na slici 9 povlači jednakost svih ostalih kuteva u trokutovima $\triangle AFE$ i $\triangle BGH$. Nadalje, ako je $|AF'| = |BG'|$ onda je i $|F'E| = |G'H|$ i dodatno slijedi jednakost vanjskih kuteva $\angle F'FE$ i $\angle G'GH$.

Napomena3. Propozicija P. I-4 i propozicija P. I-5 iz *Elemenata* su sada direktne posljedice definicije jednakosti kuteva. Međutim, uz ovakvu definiciju jednakosti kuteva, dokaz propozicije P. I-6 je neznatno drugačiji. Evo te propozicije i njenog dokaza.

`Propozicija P.I-6.`
Ako su dva kuta u trokutu jednaka da su onda i nasuprotne stranice jednake.

Slika 10: Skica uz propoziciju P. I-6.



Dokaz. Pretpostavimo da su kutevi $\angle B$ i $\angle C$ u trokutu $\triangle ABC$ međusobno jednaki. Kako je $\overline{BC}$ zajednička stranica stranica trokutova $\triangle ABC$ i $\triangle ACB$, onda po definiciji jednakosti kuteva na zraci $\overrightarrow{BA}$ postoji točka D takva da su dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$ jednake — dakle $|BD| = |AC|$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $DB \leq AB$.

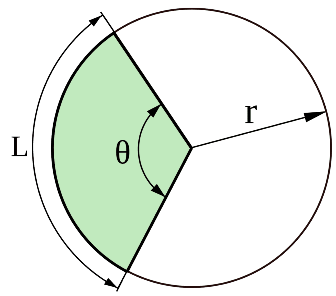
Posljedica toga je da su i nasuprotne stranice tih kuteva jednake, tj. $\overline{DC} = \overline{AB}$. Za trokutove $\triangle ABC$ i $\triangle DCB$ sada imamo: $|DC| = |AB|, |BD| = |AC|$ i $\overline{BC}$ je zajednička stranica, što znači da su jednaki po definiciji jednakosti trokutova.

Euklid dalje zaključuje da je to nemoguće jer cjelina ne može biti jednaka nekom njegovom dijelu prema aksiomu I. PR-5. Dakle, polazna pretpostavka da je $|BD| <$ $|BA|$ je kriva i vrijedi $|BD| = |BA| = |AC|$ što se i htjelo dokazati.

Još jedan komentar vezan uz jednakost kuteva. U propoziciji P. I-15 Euklid dokazuje jednakost vršnih kuteva kod presjecanja dviju dužina. Dokaz bi trebalo modificirati na način da se ova definicija jednakosti može koristiti. Jedna mogućnost je da presjek dužina E bude polovište dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ (vidi sliku) što se može pretpostaviti bez smanjenja općenitosti.

Kut kružnog isječka. Kružni isječak Euklid definira u definiciji D.III-10. Ta definicija odnosi se na centralne kuteve manje od dva prava kuta. Kut θ s vrhom u centru kružnice jednoznačno je određen s lukom kružnice kojeg krakovi kuta presjecaju.

Slika 11: Kružni isječak.



Takav pogled na kut prirodno određuje njegovu mjeru koja je omjer luka isječka i radijusa kružnice L/r. Vidi također odjeljak 4.2.4 na str. 59 pod nazivom Lučna mjera kuta.

3.4 Okomitost pravaca

Neki udžbenici iz geometrije, a tu spada i udžbenik iz matematike za 6. razred od *Školske knjige*, definiraju okomitost pravaca na sljedeći način:

Kažemo da su pravci okomiti ako dijele ravninu[37] *na četiri jednaka dijela.*

Ta je definicija i pojmovno i metodološki zastranila. Kao prvo, **nije jasno što se podrazumijeva pod jednakošću dijelova ravnine**. Svaka dva pravca koja imaju zajedničku točku, a nisu identična, dijele ravninu na četiri dijela[38]. Ako spomenute dijelove označimo redom, u smjeru kazaljke na satu, s: A, B, C, D, pitanje je što znači $A = B$?

Ako se misli na njihov kardinalitet, onda je to istina, ali u tom slučaju se svaka dva pravca sijeku pod pravim kutem. Očito da je pisac želio reći da je $\mu(A) =$

[37] Ovdje se misli na ravninu u prostoru određenu tim pravcima.

[38] To je manje više prihvatljivo kad se pogleda slika, ali pokušajte to i dokazati iz Euklidovih aksioma i njihovih proširenja.

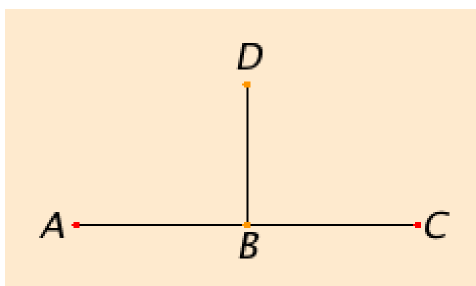
$\mu(B) = \mu(C) = \mu(D)$ gdje je μ neka mjera kuta. Međutim, pojam mjere nije moguće definirati na neograničenim dijelovima ravnine.

Neki argumentiraju takav pristup kao 'pedagoško pojednostavljenje' koje je dozvoljeno u nastavi. Međutim, čemu uvoditi pedagoško pojednostavljenje za nešto što naprosto ne postoji niti je moguće opravdati na nekoj višoj razini. Na takve fundamentalne omaške u nastavi naići ćete i u 'višoj matematici', a ne samo u osnovnoj školi.

Pravi kut. (Euklidova definicija)

> *Kad jedna dužina stoji u odnosu na drugu dužinu tako da su susjedni kutevi jednaki (v. sliku 12), svaki od tih tih kuteva nazivamo* pravim kutem*, a prva dužina je* okomica *na drugu.*

Slika 12: Pravi kut i okomica.



Euklid uvodi aksiom da su svi pravi kutevi jednaki (postulat p. I-4, str. 19) otvarajući time mogućnost da pravi kut bude mjerna jedinica za kut. Euklid ništa ne govori o produljenju okomice, ali pokazuje način njene konstrukcije.

Direktno iz definicije slijedi da ako je jedna dužina okomita ne drugu tada je i druga dužina okomita na prvu, što motivira sljedeću definiciju:

> Definicija okomitih pravaca.
> *Kažemo da su pravci okomiti ako se sijeku pod pravim kutem.*

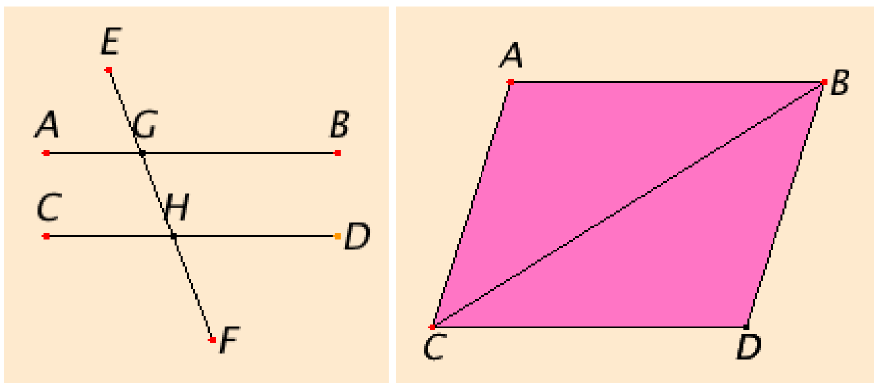
Navodimo neke Euklidove tvrdnje na koje ćemo se pozivati kasnije u tekstu. Pojmove koji nisu definirani treba potražiti u *Elementima*. Tvrdnje navodimo baz dokaza.

P. I-27 Ako pravac siječe druga dva pravca i tvori s njima jednake izmjenične kutove, onda su ta dva pravca paralelna.

P. I-29 Ako pravac siječe paralelne pravce, onda on s njima tvori jednake izmjenične kutove, vanjski kut jednak je unutrašnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta[39] s iste strane jednaka su dvama pravim kutovima.

P. I-34 U paralelogramu su nasuprotne stranice i kutovi međusobno jednaki i dijagonala ga raspolavlja.

Slika 13: Vezano uz propozicije P. I-29 i P. I-34.



3.4.1 Pitagorin poučak

Pitagorin poučak je centralna tvrdnja po važnosti i posljednja u nizu tvrdnji I knjige *Elemenata*.

> Pitagorin poučak.
> *Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama ako i samo ako je trokut pravokutan.*

Ovdje Euklid pod pojmom 'kvadrata' misli na kvadrat kao četverokut i na njegovu površinu kako bi ih mogao zbrajati. Neki povjesničari matematike tvrde da nigdje u *Elementima* Euklid ne govori da je površina kvadrata jednaka kvadratu stranice[40]. U tom smislu, dokazi Pitagorinog poučka koji koriste formulu $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ nisu u Euklidovom duhu — Euklid nije bio algebraičar. Obrat Pitagorinog poučka

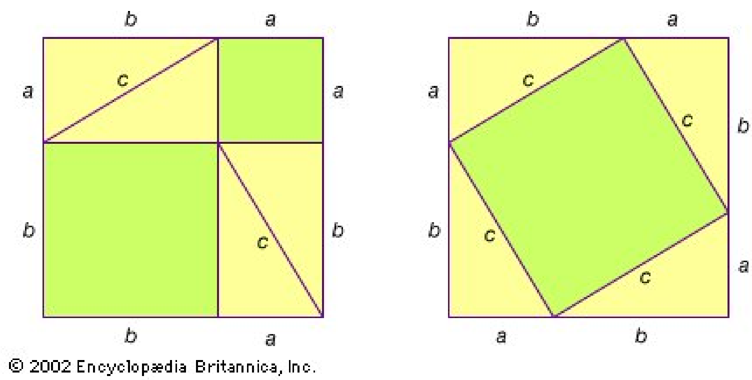
[39] Misli se na njihov zbroj.

[40] Kad bi Euklid shvaćao kvadrat nad stranicom kao broj onda bi dokaz propozicije P.III-2 u kojem dokazuje da je krug konveksan uz pomoć Pitagorinog poučka bio gotov u dva reda.

niže u tekstu slijedi Euklidovu misao ali koristi činjenicu da je površina kvadrata jednaka kvadratu stranice[41].

U literaturi, udžbenicima, a i u samim *Elementima* Pitagorin poučak poznat je u 'ako' formi, tj. u formi: *"U pravokutnom trokutu kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama."*. Euklid odmah nakon te direktne tvrdnje dokazuje i obrat: *"Ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama, onda je trokut pravokutan"*.

Slika 14: Dokaz Pitagorinog poučka bez riječi. Direktna forma.



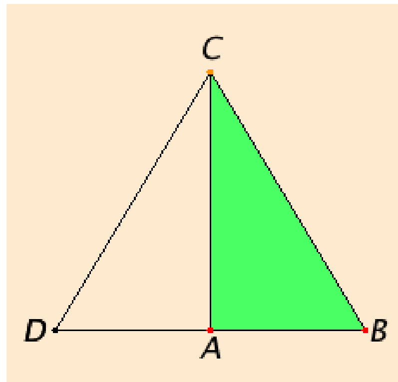
Direktna tvrdnja Pitagorinog poučka. Dokaz prve tvrnje ('ako' forma) ostavljamo čitatelju da ga promađe u literaturi ili da ga sam dokaže. Poznato je oko 400 dokaza Pitagorinog teorema, a jedan među njima je i Einstajnov. Donosimo jedan dokaz bez riječi (v. sliku 14).

Obratna tvrdnja Pitagorinog poučka. Dokaz obrata je kratak.

Pretpostavimo da stranice a, b, c tokuta $\triangle ABC$ (slika 15) zadovoljavaju relaciju $b^2 + c^2 = a^2$ i promatrajmo pravokutan trokut $\triangle ACD$ tako da $|AD| = |AB|$ i $\angle A$ je pravi kut. Za taj pravokutan trokut vrijedi Pitagorin poučak pa je $|AD|^2 + |AC|^2 = |DC|^2$ odnosno $|DC| = a$. Trokutovi $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ su sukladni jer imaju sve tri stranice jednake, odakle slijedi da je kut $\angle BAC (= \angle DAC)$ pravi kut. $\square$

[41] U propoziciji P. I-48 (obrat Pitagorinog teorema) Euklid doslovce kaže (engleski prijevod *Elemenata* na internetu): *In the triangle ABC let the square on one side BC equal the sum of the squares on the sides BA and AC...* U toj rečenici 'square on the side BC' znači 'kvadrat nad stranicom BC', a moderni prevoditelj to može interpretirati kao BC^2. Tako je u njemačkom prijevodu *Elemenata* od Thaera.

Slika 15: Dokaz obrata Pitagorinog poučka.



Pitagorine trojke. Trokut $\triangle ACB$ za koji vrijedi relacija $a^2 + b^2 = c^2$ među njegovim stranicama nazivamo *Pitagorinim trokutom*. Osim antičkih Grka, takve trokutove proučavali su i u Mezopotamiji i u drevnoj Kini i Indiji[42]. Sam naziv Pitagorin trokut dolazi od Proclusa[43], stoljećima kasnije, jer je Pitagorin poučak bio poznat pitagorejcima ako ne i samom Pitagori. Brojevi (dužine) a, b, c Pitagorinog trokuta poznate su pod nazivom *Pitagorine trojke*. Evo nekih primjera Pitagorinih trojki a-b-c: 3-4-5, 5-12-13, 15-20-25…

Zašto je Pitagorin trokut koristan? On je već prisutan u nastavi geometrije stoljećima kroz pribor za crtanje koji uključuje: ravnalo i šestar (u skromnijoj verziji) ili jedan (ili dva) pravokutna trokuta, ravnalo, kutomjer i šestar (u bogatijoj verziji). Takav pribor omogućava učeniku da crta paralene i okomite dužine (pravce), raspolavlja kuteve i dužine… Nastavnik bi trebao razumjeti matematičku pozadinu korištenja tih pomagala, ali za učenika je dovoljno ako ih zna pravilno koristiti.

Test okomitosti pravaca. Neka su p, q dva različita pravca koja se sijeku u točki O i P, Q dvije točke na pravcima p, q respektivno koje su različite od O. Prema Pitagorinom poučku pravci p i q su međusobno okomiti ako i samo ako je

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = |PQ|^2. \tag{5}$$

Za zadana dva pravca p, q formulu (5) možemo shvaćati kao test odnosno provjeru jesu li ti pravci okomiti ili ne i to se može učiniti pomoću ravnala s mjerilom.

[42] Baudhayana Śulba-sutra, 800 – 400 p.n.e

[43] 412–485, grčki filozof, matematičar i pjesnik. Vrstan komentator Euklidovih djela.

3.4.2 Računanje udaljenosti. Izometrija

Pitagorin poučak omogućava računanje udaljenosti među točkama u ravnini ako znademo mjeriti udaljenost na dvama međusobno okomitim pravcima u toj ravnini. Ako su dane dvije različite točke A, B ravnine i p, q dva fiksna međusobno okomita pravca onda se povuku paralele p', q' s tim pravcima koje prolaze kroz točke A, B. U općem položaju paralele se sijeku u točki C, dobiveni trokut $\triangle ACB$ je pravokutan, a dužina $\overline{AB}$ je hipotenuza. Udaljenost točaka $|AB|$, ponekad u oznaci $d(A, B)$, je sada

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2}.$$

Pitanje kako mjeriti udaljenost točaka na pravcu. O tome govori Hölderov teorem o kojem je već raspravljano na str. 35. Konstrukcija takve mjere je zapravo konstrukcija realnih brojeva putem Dedekindovih prereza. Na nižem razinama usvaja se zdravo za gotovo da postoji bijekcija između točaka na pravcu i realnih brojeva pod nazivom *brojevni pravac*.

Gornja formula je osnova za uvođenje koordinatnog sustava u ravnini kojeg danas poznajemo kao Descartesov koordinatni sustav.

Euklid u uspoređivanju istovrsnih veličina govori tek kasnije u knjigama VII-IX iako pojam veličina (eng. magnitude) koristi i ranije. Kad govori o proporcijama istovrsnih veličina on ih ne shvaća kao racionalni broj već kao neku novu veličinu i nikad ne govori o jednakim proporcijama.

Izometrija. Moderan pristup euklidskoj geometriji baziran je na grupi izometrija tj. na preslikavanjima ravnine koja čuvaju udaljenost. Drugim riječima, *izometrija* ravnine f je funkcija koja ima svojstvo da je za svake dvije točke A, B ravnine

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

Izometrične figure nazivaju se još i *kongruentnim* figurama. Izometrije u ravnini su linearne transformacije koje uključuju: identitetu, translaciju, rotaciju, zrcaljenje i njihove kompozicije.

O svojstvima udaljenosti smo pričali na str. 32, od kojih je najvažnija *definitnost* i *relacija trokuta*. Time što čuva udaljenost izometrija preslikava kružnice u kružnice istog radijusa. Posljedica relacije trokuta ja ta da izometrija segmente preslikava u segmente i pravce u pravce. Konkretnije, za svaku dužinu $\overline{AB}$ njena unutrašnja točka se izometrijom preslikava u unutrašnju točku dužine $\overline{f(A)f(B)}$. Isto tako izometrične slike paralelnih pravaca su paralelni pravci. Izumetrija čuva kuteve u smislu da kut i njemu izometričan kut imaju istu mjeru.

Najjednostavnija izometrija je translacija. Što se nastave tiče ona se može poučavati na samom početku, odmah nakon uvođenja osnovnih geometrijskih pojmova. Čak nije nužno ni uvoditi pojam translacija. Jednom sam učenicima 5. r. dao za domaću zadaću da nacrtaju trokut $\triangle ABC$ i da na nacrtaju novi trokut $\triangle A'B'C'$ s jednako dugim stranicama tako da točke A, B, A', B' leže na istom pravcu. Na nastavi, prije toga proveli smo sličnu konstrukciju ali za dužinu $\overline{AB}$ umjesto trokuta. Više od pola učenika u razredu je uspješno obavila zadatak. Ova konstrukcija može biti osnova za crtanje paralele što je zapravo uvod u translaciju na svojevrstan način.

3.4.3 Udaljenost točke od pravca

Pojam udaljenosti bio je definiran za dvije točke. Međutim, taj pojam moguće je definirati i za dva geometrijska lika i za neke skupove općenito, ali takva metrika neće uvijek imati svojstvo definitnosti. tj. ako je udaljenost objekata jednaka 0 da su oni nužno jednaki. Udaljenost točke od pravca je prvi korak u proširenju tog pojma koji je intuitivan i konstruktibilan.

Uzmimo da je zadan pravac p i točka Q koja nije na tom pravcu. Ako je O točka na pravcu p takva da je pravac QO okomit na zadani pravac p i ako je P bilo koja druga točka pravca p različita od O onda vrijedi formula (5).

Pažljivo čitanje te formule govori da je udaljenost $|PQ|$ proizvoljne točke P pravca p veća ili jednaka odaljenosti $|OQ|$. To znači da je razumno uzeti tu udaljenost kao udaljenost između točke Q i pravca p, u oznaci

$$d(Q,p) := |QO|.$$

Dva su pitanja koja se postavljaju: (1) *Koliko ima okomica na pravac p kroz istu točku Q?* i (2) *Kako konstruirati okomicu q pravca p kroz točku Q*?

Jedinstvenost okomice. Odgovor na prvo pitanje je:

Kroz točku Q izvan pravca p može se povući jedna jedina okomica na p.

To je jednostavna posljedica Pitagorinog poučka. Kad bi postojale dvije okomice q i q' i dva presjecišta O i O' s pravcem p onda prema formuli (5) slijedi

$$|OQ|^2 + |OO'|^2 = |O'Q|^2$$
$$|O'Q|^2 + |OO'|^2 = |OQ|^2$$

odakle sumacijom slijedi

$$2|OO'|^2 = 0$$

odnosno $O = O'$ zbog definitnosti metrike. $\square$

Konstrukcija okomice. Odgovor na drugo pitanje koristi jedinstvenost okomice. Moguće su dvije situacije: (1) točka Q je izvan pravca p i (2) točka Q nalazi se na pravcu p.

U prvom slučaju odrede se dvije točke A i B na pravcu koje su jednako odaljene od Q i neka je P polovište dužine[44] $\overline{AB}$. Tvrdimo da je pravac q koji prolazi točkama P i Q tražena okomica. U suprotnom, prava okomica bi sijekla dužinu $\overline{AB}$ u točci P' odakle, zbog Pitagorinog poučka, slijedi da je P' polovište dužine $\overline{AB}$ tj. $P = P'$.

Tom konstrukcijom dobili smo i okomicu i polovište dužine. Za konstrukciju polovišta vidi također posljedicu Thalesovog poučka na stranici 52.

Slučaj kad točka Q leži na pravcu ostavljamo čitatelju. $\square$

Okomitost i paralelnost. Evo nekoliko zanimljivih tvrdnji o okomitim i paralelnim pravcima. Dokaz ostavljamo čitatelju (uputa: koristite Pitagorin poučak).

i) Okomica na okomicu pravca je njegova paralela.

ii) Okomica na pravac je ujedno i okomica na njegovu paralelu.

iii) Dvije različite okomice na isti pravac su paralelne.

iv) Dvije točke na paraleli pravca su jednako udaljene od tog pravca.

v) Ako kroz dvije različite točke P i Q jednako udaljene od pravca p povučemo pravac onda je taj pravac paralelan s p.

Dokaz V postulata iz Pitagorinog poučka. Tvrdnja i) ima kao posljedicu V Euklidov postulat. Zaista, neka je P točka izvan pravca p i q okomica na pravac p koja prolazi točkom P. Tada je okomica p' na pravac q u točki P paralela pravca p. U suprotnom bi se p' i p sijekli u nekoj točki Q. U tom slučaju kroz točku Q prolaze dvije različite okomice na pravac q što je nemoguće zbog jedinstvenosti okomice (odjeljak Jedinstvenost okomice na str. 48). Jedinstvenost paralele p' također je posljedica jedinstvenosti okomice.

3.5 Račun omjera. Thales

Thalesov teorem o omjerima je iskazan kao propozicija P. VI-2 *Elemenata*, s tom razlikom što Euklid iskazuje i njegov obrat u toj istoj propoziciji. Euklidov dokaz tog teorema koristi propoziciju P. VI-1 koja tvrdi da:

[44] Vidi P. I-10.

trokutovi[45] *i paralelogrami koji imaju jednake visine odnose se kao njihove baze,*

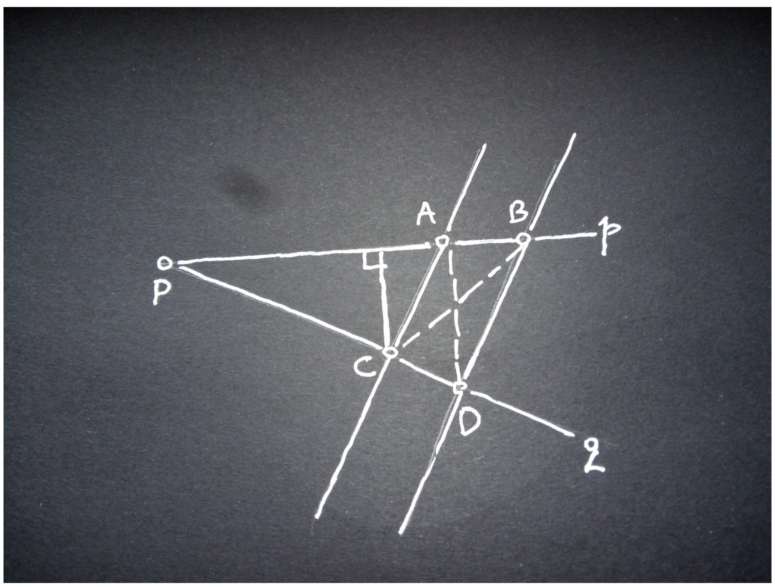
te propoziciju (i njen obrat) P. I-38 koja tvrdi da:

su trokutovi s jednakim bazama između istih paralela međusobno jednaki.

Iskaz Thalesovog teorema u ovom tekstu je nešto modificiran, a sâm dokaz koristi suvremen zapis omjera u formi razlomka, tj. kao a/b.

Teorem 3.1 (Thales[46]. Osnovni teorem o omjerima)**.** *Ako pravac p kroz toku P siječe dva paralelna pravca a, b u točkama A i B onda omjer $|PA|/|AB|$ ne ovisi o pravcu p.*

Slika 16: Thales. Osnovni teorem o omjerima.



Dokaz. Neka je q drugi pravac koji prolazi točkom P koji siječe oba paralelna pravca u točkama C, D kao na slici . Označimo s v_C visinu trokuta $\triangle PAC$ koja odgovara vrhu C i s P_{ABC} njegovu površinu. Ta visina je i visina trokuta $\triangle ABC$ odakle slijedi

45Gdje se se misli na površinu tih trokutova.

46Thales iz Mileta, današnja Turska (624–547 p.n.e.) Putovao u Babilon i Egipat. Niti jedan njegov rukopis nije sačuvan. Proclus mu pripisuje neke teoreme iz *Elemenata*.

formula (6) kao posljedica P. I-38, a na isti način i formula (7).

$$\frac{P_{PBC}}{P_{ACB}} = \frac{|PA|}{|AB|} =: \lambda \tag{6}$$
$$\frac{P_{PBC}}{P_{ACD}} = \frac{|PC|}{|CD|} \tag{7}$$

Tvrdnja će biti dokazana ako dokažemo jednakost

$$P_{ABC} = P_{CDA},$$

što vrijedi jer su trokutovi $\triangle ACB$ i $\triangle ACD$ tokutovi sa zajedničkom bazom AC i jednakih visina. □

Posljedice teorema su sljedeće jednakosti:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|AC|}{|BD|} \tag{8}$$

Ova posljednja jednakost zahtijeva malo dodatnog napora. Potrebno je povući još paralelu s pravcem p kroz točku C i ponovno primijeniti teorem.

Teorem 3.2 (Obrat Thalesovog teorema o omjerima)**.** *Ako pravac p kroz toku P siječe dva pravca a, b u točkama A i B i omjer $|PA|/|AB|$ ne ovisi o pravcu p onda su a i b paralelni pravci.*

Dokaz. Dokaz provodimo kontrapozicijom. Pretpostavimo, suprotno tvrdnji da a i b nisu paralelni. Povucimo pravac q koji siječe pravce a i b u točkama B i D respektivno i povucimo točkom C paralelu a' s pravcem b. Taj pravac siječe pravac p u točci A' različitoj od P jer bi se u suprotnom podudarao s pravcem q pa bi morao sijeći b i biti paralela od b, a to vodi na kontradikciju.

Prema Thalesovom teoremu je sada

$$\begin{aligned}
\frac{|PA'|}{|A'B|} &= \frac{|PC|}{|CD|} \\
\frac{|PA'|}{|A'B|} + 1 &= \frac{|PC|}{|CD|} + 1 \\
\frac{|PA'| + |A'B|}{|A'B|} &= \frac{|PC| + |CD|}{|CD|} \\
\frac{|PB|}{|A'B|} &= \frac{|PD|}{|CD|}.
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci je $|PD|/|CD| = |PB|/|AB|$, odakle slijedi

$$\frac{|PB|}{|A'B|} = \frac{|PB|}{|AB|} \text{ odnosno.}$$
$$A' = A$$

Dakle, pravci a' i a se podudaraju odakle slijedi tvrdnja. $\square$

Raspolavljanje dužine. Formula (8) je polazište konstrukciju polovišta zadane dužine. Ako je zadana dužina $\overline{PB}$ na pravcu p, onda se povuče pravac q i odrede točke C i D tako da je $\overline{PC} = \overline{PD}$. Paralela sa pravcem DB kroz točku C siječe dužinu $\overline{PB}$ u njenom polovištu A.

Na isti način može se konstruirati bilo koji racionalni dio zadane dužine. Dovoljno je znati povlačiti paralele.

Obrat Thalesovog teorem 3.2 je vrlo zanimljiv je može poslužiti u nemetričkom pristupu geometriji koja se ne oslanja na kuteve. Takva je primjer projektivna geometrija o kojoj u ovom tekstu neće biti govora.

4 Revitalizacija Pitagore

Pitagorin poučak je moćan alat. Preko Pitagorinog poučka moguće je računanje udaljenosti točaka u ravnini. Drugim riječima, mogućnost mjerenja udaljenosti na katetama pravokutnog trokuta ($|AC|$ i $|BC|$) omogućava računanje udaljenosti između točaka ravnine ($|AB|$). Drugim riječima, mjerenje udaljenosti među točkama na dva okomita pravca proširuje na čitavu ravninu. To je uvod u pravokutni koordinatni sustav kakav je osmislio Descartes.

Osim mjerenja udaljenosti, ovaj pristup omogućava i mjerenje površine raznih likova na način da se prvo odabere jedinična površina kao što je kvadrat stranice $1\,\mathrm{m}$, na primjer. Euklid ne govori o mjerenju na način kako ga mi danas doživljavamo. On uspoređuje likove[47], prvenstveno paralelograme i trokutove u propoziciji P. I-41 ali ne spominje visinu trokuta. Samo dokazuje da

ako paralelogram i trokut imaju zajedničku bazu, a nalaze se između paralelnih pravaca, tada je paralelogram dvostruki trokut.

Bilo bi preambiciozno reći da mi je cilj zasnovati euklidsku geometriju na Pitagorinom pučku. U tu svrhu bi trebalo definirati pojam okomitosti neovisno o

[47] misleći na njihove površine

aksiomu u paralelama i zatim dokazati Euklidov V postulat, naravno uvažavajući ostale postulate i pripaziti da se ne uđe u cirkularnost. Za početak, korisno je malo detaljnije pozabaviti se Pitagorinim poučkom i njegovim posljedicama i uvidjeti njegovu vezu s nekim drugim tvrdnjama kao što je Thalesov poučak o omjerima na primjer.

4.1 Okomitost (bis)

Pitagorin teorem, odnosno njegov obrat, može se uzeti kao polazna točka u alternativnom pristupu okomitosti pravaca. Obrat Pitagorinog teorema tvrdi, da ako u trokutu vrijedi formula (3.4.1) onda je trokut pravokutan s pravim kutem u vrhu O.

Definicija 4.1 (Ortogonalnost)**.** Neka su dana dva pravca a, b koja se sijeku. Sjecište pravaca označimo s C. Kažemo da su pravci a, b međusobno *ortogonalni*[48] ako postoje točke $A \in a$ i $B \in b$, različite od C tako da vrijedi

$$|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2 \tag{9}$$

U čemi je razlika između ortogonalnosti i Euklidove definicije okomitosti na str. 3.4? Euklidova definicija koristi pojam kuta, a ova koristi samo mjeru udaljenosti među točkama. Drugim riječima ortogonalnost pravaca u smislu definicije 4.1 je pojam neovisan o pojmu kuta. Cilj nam je pokazati da su ortogonalnost i okomitost ekvivalentni pojmovi.

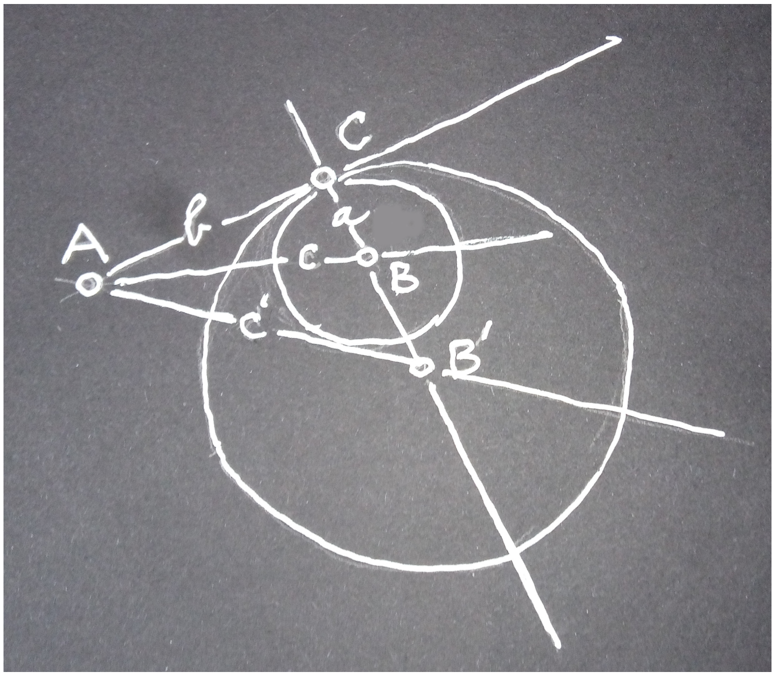
Opravdanje definicije. Definicija ortogonalnosti, ovako kako je sada izrečena, nije operabilna. Ona će postati operabilnom ako za svake dvije točke A, B na ortogonalnim pravcima vrijedi formula (9). U tom smislu

Lemma 4.2. *Ako su pravci a, b ortogonalni u smislu definicije 4.1 onda za svake dvije točke A, B na tim pravcima vrijedi formula (9).*

Dokaz. Dovoljno je tvrdnju dokazati ako variramo jednu od točaka, neka je to točka B. Promatrajmo trokut $\triangle ABC$ i trokut $\triangle AB'C$ kao na slici 17, gdje je B' točka na pravcu a različita od B i različita od C. Jednostavnosti radi, stranice tih trokutova označimo s a, b, c i a', b, c' respektivno.

[48]Koristim riječ ortogonalnost je ne znam za bolju, a koja bi izražavala neku novu vrstu okomitosti u ovom trenutku.

Slika 17: Neovisnost definicije ortogonalnih pravaca o izboru točaka A i B.



Reinterpretirajmo formulu

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c - a) \cdot (c + a),$$

kao potenciju točke A u odnosu na kružnicu s centrom u B i radijusom $r = |CB|$. Pravac b je tangenta te kružnice jer je duljina a ujedno i udaljenost točke B od pravca b.

Za dokaz tvrdnje, dovoljno je uvjeriti se da vrijedi

$$b^2 = (c' - a') \cdot (c' + a'), \tag{10}$$

odnosno da je pravac b također i tangenta kružnice $K(B', a')$, gdje je $a' = |CB'|$.

Pretpostavimo da to nije tako. U tom slučaju kružnica $K(B', a')$ siječe pravac b u još jednoj točci C' koja s C i B' čini jednakokračan trokut $\triangle CB'C'$. Paralela kroz točku B s pravcem $B'C'$ siječe osnovicu trokuta $\triangle CB'C'$ u nekoj točci, označimo ju s C''. Iz Thalesovog teorema o omjerima slijedi da je $|BC''| = a$ što bi značilo da manja kružnica $K(B, a)$ siječe pravac b u dvije različite točke što nije slučaj.

Dakle, b je tangenta na kružnicu $K(B', a')$ i vrijedi formula (10). $\square$

Napomena 1. Definicija ortogonalnosti 4.1 time je opravdana. Štoviše, Euklidova definicija okomitosti pravaca i ortogonalnost pravaca u smislu definicije 4.1 su ekvivalentne. Jedna implikacija je jasna:

Ako su pravci okomiti onda su i ortogonalni u smislu definicije 4.1,

jer vrijedi Pitagorin poučak. Obratno

Ako su pravci ortogonalni u smislu definicije 4.1 onda su i okomiti.

Pretpostavimo da vrijedi formula (9). Neka je A' točka na pravcu a takva da je $|OA| = |OA'|$. Tada je trokut $\triangle ABA'$ jednakokračan i O je polovište njegove osnovice odakle sijedi da je dužina $\overline{OA}$ okomita na dužinu $\overline{OB}$.

Napomena 2. U zasnivanju euklidske geometrije na ortogonalnosti ima još jedna zamka, bar za sada. Definicija 4.1 opravdana je lemom 4.2, a ta je lema posljedica Thalesovog poučka koji je izveden uz pomoć aksioma o paralelama. Drugim riječima trebalo bi izbjeći Thalesov poučak ili bilo što drugo što proizlazi iz aksioma o paralelama.

Metrički aspekt euklidske geometrije, preko Pitagorinog poučka je, bliži današnjem načinu razmišljanja kojeg je zastupao Poincaré, a to je da je metrika stvar dogovora i da ona određuje način razmišljanja koji nije ovijek u skladu s osjetilnim doživljajem naše okoline.

Račun, odnosno jezik kojim govori Euklid, je račun proporcija koji se sačuvao do Newtonove *Principie* pa i u njoj samoj. U takvom računu nema mnogo simbolike i teško ga je pratiti.

4.2 Mjerenje kuteva

Mjera kuta koju želimo definirati je inspirirana Euklidovom propozicijom P. II-12 i propozicijom P. II-13. Jedna i druga su nadopuna Pitagorinog poučka i na neki način su iskorak u trigonometriju.

4.2.1 Konstrukcija mjere kuta.

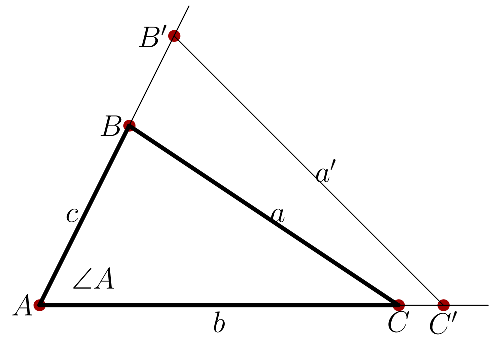
Promatrajmo kut $\angle A$ trukuta $\triangle ABC$. Želimo kostruirati neku mjeru kuta ali na način da ne ovisi o položaju točaka B i C na odgovarajućim zrakama.

Definicija 4.3. Kao mjeru kuta $\angle A$ uz točku A u trokutu uzimamo broj

$$|\angle A| := \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} \tag{11}$$

gdje je a duljina stranice $\overline{BC}$, b je duljina stranice $\overline{AC}$ i c je duljina stranice $\overline{AB}$.

Slika 18: Neovisnost mjere kuta o položaju točaka B i C na zrakama koje izlaze iz točke A u smjeru točaka B i C.



Ta mjera mjeri odstupanje kuta $\angle A$ od pravog kuta i lako se vidi da ne ovisi o položaju točke B na zraci $\overrightarrow{AB}$ i položaju točke C na zraci $\overrightarrow{AC}$. Za dokaz te činjenice uzmimo da je B_0 ortogonalna projekcija točke B na stranicu b. Tada je gornji omjer jednak $\frac{|AB_0|}{c}$ i ne ovisi o položaju točke B na zraci $\overrightarrow{AB}$, što je posljedica Thalesovog teoreme o omjerima (teorem 3.1).

Ako je $|\angle A| = 0$ trokut je pravokutan, tj. $\triangle BAC$ je Pitagorin trokut i $\angle A$ je pravi kut. Ako je $0 < |\angle A| < 1$ onda je kut $\angle A$ šiljast, a ako je $-1 < |\angle A| < 0$ onda je kut $\angle A$ tupi kut. U ekstremnim slučajevima tj. $|\angle A| = -1$ trokut degenerira u segment s najvećim mogućim otvorom, a u slučaju $|\angle A| = 1$ trokut degenerira u segment s najmanjim mogućim otvorom. Ta mjera je jednostavna za računanje jer se mjerenje kuteva svodi na mjerenje duljina stranica trokuta.

U specijalnom slučaju kad su stranice trokuta a i c međusobno okomite onda je

$$|\angle A| := \frac{2c^2}{2cb} = \frac{c}{b}. \tag{12}$$

Ako je čitatelj upoznat s trigonometrijskim funkcijama onda će mu odmah biti jasno da je:

$$|\angle A| = \cos(\angle A).$$

Sličnu mjeru promatra i Wildberger (2005) i mnoge teoreme iz planimetrije dokazuje preko algebarskih identiteta na, kako on kaže, intuitivniji i jednostavniji način koristeći samo razlomke.

Zagovornici 'orijentiranog kuta' shvaćaju kut kao uređen par zraka $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ u kojem je istaknuto koja je zraka prva, a koja druga. Ako prihvaćamo takav pristup onda bi kut kao element trokuta trebalo definirati kao uređenu trojku točaka (B, A, C) vrhova trokuta. Tada bi trebalo razlikovati kut (B, A, C) od kuta

(C, A, B). Nisam zagovornik takvog pristupa u osnovnoj školi, iako je korektan, iz razloga što je zbunjujuć za učenike koji se prvi puta susreću s elementarnim geometrijskim pojmovima. Euklid ne spominje orijentirane kuteve jer njegova ravnina nije orijentirana. Neke od njegovih propozicija (????? na primjer) trebaju dodatne postulate koje Euklid prešutno uvodi. To je slučaj i s orijentacijom koju on implicitno koristi, a treba mu i u V postulatu u kojem se spominju strane (pravca).

4.2.2 Korektnost definicije ortogonalnosti

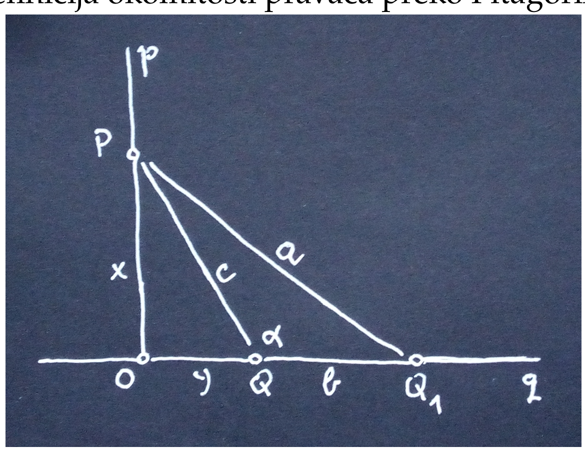
U opravdanju definicije ortogonalnosti 9 koristili smo Thalesov poučak o omjerima koji je indirektna posljedica aksioma o paralelama. Ovdje dajemo još jedan dokaz koji opravdava definiciju ortogonalnosti baziranom na upravo izgrađenoj mjeri kuta (formula (11)). Kao što se vidi iz dokaza i on ovisi o Thalesovom teoremu o proporcijama jer mjera kuta također o njemu ovisi.

Neka su p, q dva različita pravca koja se sijeku u točki O i P, Q dvije točke na pravcima p, q respektivno koje su različite od O (slika 19). Prema definiciji 4.1 pravci p i q su ortogonalni ako je

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = |PQ|^2. \tag{13}$$

Potrebno je dokazati neovisnost definicije o položaju točaka P i Q na pravcima.

Slika 19: Definicija okomitosti pravaca preko Pitagorinog trokuta.



Teorem 4.4. *Pretpostavimo da je $\triangle POQ$ Pitagorin trokut. Ako je točka Q_1 na pravcu q kao na slici 19 tada je trokut $\triangle POQ_1$ također Pitagorin trokut.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati $a^2 = x^2 + (y+b)^2$. Prema formuli (11)

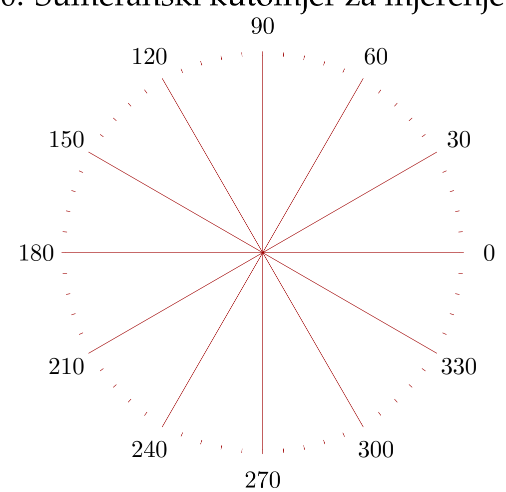
$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 - 2cb|\alpha| \\ &= c^2 + b^2 + 2cb\frac{y}{c} \text{ (formula (12))} \\ &= c^2 + b^2 + 2by \\ &= x^2 + y^2 + b^2 + 2by \\ &= x^2 + (y+b)^2. \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju. □

4.2.3 Sumerani. Stupanj

Današnji način mjerenja kuteva pomoću stupnjeva naslijedili smo od Sumerana. Oni su odabrali mjernu jedinicu kuta na sljedeći način. Puni kut (zapravo opseg kružnice zadanog radijusa) podijelili su na 360 dijelova (stupnjeva), stupanj su

Slika 20: Sumeranski kutomjer za mjerenje kuteva.



podijelili na 60 dijelova (minute) i minutu su podijelili na 60 dijelova (sekunde). Sumerani su bili dobri astronomi i mjerenje zakreta Zemlje (kuta) direktno su povezali s proteklim vremenom i to je jedan od razloga zašto su mjerne jedinice kuta dobile takve nazive. Osim toga broj 360 je djeljiv bez ostatka s 24 broja uključujući 1 i 360. Neki od njih su: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15\ldots$ Broj 60 je djeljiv bez ostatka s brojevima: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$ što omogućava dijeljenje stupnja na manje jedinice. Dakle, $360°$ je praktična mjera za kut[49].

[49]Broj 360, kao broj dijelova kruga, spominje se i u *Ṛg Veda Saṃhita*, konkretno u stihu 1.164.48.

Prirodna jedinica za mjerenje kuta nije stupanj ili minuta nego je puni kut. Puni kut je jedna od rijetkih mjernih jedinica koja je punuđena svima takva kakva je i ne treba posebno dogovaranje oko tog. Razlog zbog kojeg Sumerani nisu uzimali puni kut je pretpostavljam taj, što je nepraktično računati s razlomcima. Njihov heksadecimalnom sustav, tj. u sustav s bazom 60, im je omogućavalo da imaju 60 znakova (uključujući i 0) za ostatke pri dijeljenju sa 60. Heksadecimalni sustav prirodno proizlazi i iz anatomije ljudske šake. Sumerani su brojali na način da su palcem brojali članke na prstima iste ruke počev od najdonjeg članka kažiprsta. Svaki prst ima 3 članka, dakle ukupno 12 članaka na prstima jedne šake, ne računajući palac koji dodiruje članke. Nakon nabrojanih 12 članaka podigli bi jedan prst druge ruke i nastavili s brojanjem. Takvim brojanjem moglo se razlikovati $5 \cdot 12 = 60$ brojeva.

Mjerna jedinica bi mogla biti bilo koja od spomenutih veličina, ali se najčešće uzima stupanj. Mjera nekog kuta se piše u obliku $10^\circ\ 38'\ 26''$ (10 stupnjeva 38 minuta i 26 sekundi). Danas, ako je potrebno preciznije mjerenje, onda se sekunda zapisuje kao decimalni broj.

Sumeranski kutomjer na slici 20 čini se naoko jednostavan, on ne kazuje što je kut, koristan je za mjerenje onih kuteva koji se u geometrijskim konstrukcijama najčešće koriste. Problem s kutevima je taj što ih nije moguće dijeliti uz pomoć ravnala i šestara[50], a druga poteškoća ovakvog pristupa mjerenju kuteva nema mogućnost poopćenja u višim dimenzijama.

Napomena. Stupanj, kao jedinična mjera kuta ne ovisi o radijusu odabrane kružnice.

4.2.4 Lučna mjera kuta

Moderan pristup mjerenju kuta preko radijana (Thompson[51], 1873) također nosi svoje potešoće i nejasnoće. Jedna od njih je iracionalnost mjere kuteva, napr. pravi kut, mjeren u radijanima iznosi $1.570796326\ldots$ što je aproksimacija broja $\pi/2$. Sama oznaka $\pi/2$, bez obzira kako jednostavno izgleda, ne znači da je kut lako izmjeriti. Pogledajmo malo detaljnije Thompsonovu definiciju kuta. Kut θ je definiran kao omjer

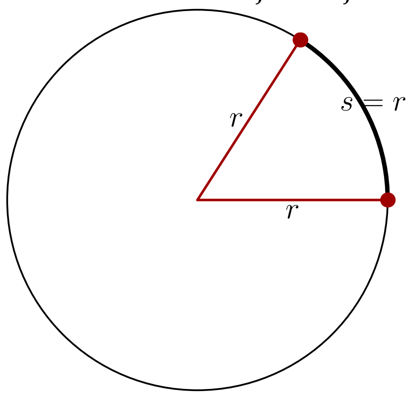
$$\theta := s/r, \tag{14}$$

gdje je s duljina luka kružnog isječka čiji je centralni kut jednak θ, (v. sliku 21), a *radijan* je kut koji odgovara luku duljine r. Ako želimo biti precizni onda ovakva

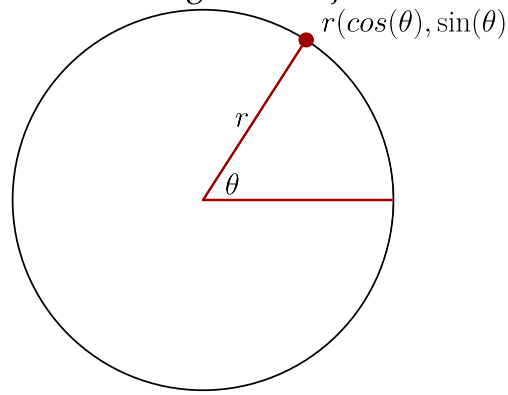
[50] Dijeljenje kuta na tri jednaka dijela pomoću ravnala i šestara nije izvedivo, ali je moguće pomoću cisoidnog šestara.

[51] James Thompson, brat Lorda Kelvina

Slika 21: Definicija radijana



Slika 22: Trigonometrijska kružnica



definicija kuta nije korektna jer nije jasno je li kut dio ravnine, tj. nešto 'geometrijsko' ili je to broj. Druga primjedba odnosi se na jedinicu nazvanu *radijan*. Ako je kut definiran kao omjer

$$\theta = \frac{\text{duljina}}{\text{duljina}}$$

onda je to bezdimenzionalna veličina i nema potrebe nazivati je nekim imenom. Formula (14) zapravo definira mjeru kuta, s tim da je referentni (jedinični) kut nešto što još nije definirano.

Sljedeća primjedba odnosi se na neodređenost kuta u definiciji (14) jer luku duljine $s+2\pi r$ i luku duljine s 'pripada' isti kut. Na primjer, brojevi $5.0471975511966\ldots$, $-2.9528024488034\ldots$ i $1.0471975511966\ldots$ definiraju, do na određenu preciznost, isti kut $(\pi/3)$.

Ono što je možda najveća neprilika u ovom pristupu je praktična nemogućnost računanja duljine luka s. Duljina luka krivulje, pa makar bila i tako jednostavna kao što je kružnica, je kompleksan pojam i nisam siguran da se korektno obrađuje i na univerzitetskoj razini u okviru standardnog kalkulusa.

Uporne pristalice 'radijalnog' pristupa zagovarat će ideju računanja kuteva preko koordinata i trigonometrijske kružnice u kartezijevom sustavu u ravnini. Tu se javlja nova poškoća određivanja kuta preko transcendentnih funkcija *sinus*[52] i *kosinus* što je zapravo prevara. Osim toga, u pristupu preko trigonometrijske kružnice (slika 22) nije eksplicitno rečeno definira li se kut ili trigonometrijske funkcije.

[52]Sanskrtska riječ za polu-tetivu je *jya-ardha* što se ponekad skraćivalo u *jiva*. Na arapskom se ta riječ izgovarala *jiba*, a pisala se, bez samoglasnika, kao *jb*. Latinski prevoditelji odredili su naziv *sinus* kao prijevod od *jb* jer su mislili da se radi o arapskoj riječi *jaib*, što znači grudi, a latinska riječ *sinus*, osim značenja grudi, dodatno znači i zaljev. U engleski jezik *sinus* je ušao kao *sine*.

U principu, ovdje se uvode dvije mjere kuta, jedna je *sinus* kuta $(\sin)$, a druga je *kosinus* kuta $(\cos)$. Niti jedna niti druga vrijednost ne određuju jednoznačno kut u ravnini jer nisu bijekcije na intervalu $[0, 2\pi)$. Uvođenje dvije mjere kuta $\sin$ i $\cos$ (formalno) ima smisla jer prva mjera razlikuje kuteve na intervalima $[0, \pi], [\pi, 2\pi]$, a druga mjera razlikuje kuteve na intervalima $[0, \pi/2], [3\pi/2, 2\pi]$, tako da je kut α jednoznačno određen s parom brojeva $(\sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Koliko je to razumljivo i prihvatljivo za učenika srednje škole je pitanje za sebe.

5 Anketa o točki

Ovo što slijedi su odgovori djece iz 5. razreda jedne osnovne škole u Zagrebu na pitanja: *Što je točka?*, *Što je pravac?*, *Što je ravnina?* i *Što je kut?* U razredu je bilo 17 djece i ovdje je navedeno svih 17 odgovora. Broj djeteta je naveden ispred njegovog odgovora, a odgovori su takvi kakvi jesu zajedno s gramatičkim nepravilnostima (ako ih ima).

Što je točka?

1. točka je oznaka za taj kut
2. točka je mjesto iz kojeg počinje dužina
3. točka je vrh neke ravnine, trokuta ili dužine
4. točka je glavna "točka" na ravnini
5. točka je mjesto gdje se sijeku ili gdje započinje neki pravac ili dužina
6. točka - oznaka ravnine
7. točka - točka kojom označujemo vrh ili kraj neke dužine ili trokuta
8. točka je sjecište i nema stranica ili kuta
9. točka je početak crte (omeđena crtom)
10. točka je . (nacrtana točka)
11. točka je točka u ravnini
12. točka je dio ravnine

13. točka - to je mesto iz kojeg počinjemo
14. točka = sjecište...
15. točka je točka trokuta
16. točka = sjecište dva pravca
17. točka je određeno mjesto na pravcu

Što je pravac?

1. pravac je ravna neomeđena crta
2. pravac je crta koja nije omeđena i nema kraja
3. pravac je crta bez kraja
4. pravac je dužina koja nema točke
5. pravac je ravna crta koja ima svoju točku
6. pravac - ravna neomeđena crta koja nema početak ilik raj
7. pravac - ravnina koja nije omeđena točkama
8. pravac je ravna neomeđena crta
9. pravac je prava crta
10. pravac je __________ (nacrtan pravac)
11. pravac je ravna crta koja omeđuje 2 točke
12. pravac je ravnina koja nije omeđena točkama
13. pravac - to je ravna crta
14. pravac = crta neomeđena ni s jedne strane
15. pravac je pravac
16. pravac je neomeđena dužina
17. pravac je ravna crta

Što je ravnina?

1. ravnina je ravna omeđena crta sa dvije strane
2. ravnina je ravna crta
3. ravnina je dužina omeđena s dvije točke
4. ravnina ili dužina je osnovna jedinica u geometriji
5. ravnina je nešto ravno
6. ravnina - ravna crta
7. ravnina - ravna crta
8. ravnina je ravna podloga
9. ravnina je ravna crta
10. ravnina je ravna crta
11. ravnina je ravna crta koja omeđuje 2 točke
12. ravnina je ravna crta
13. ravnina - je crta
14. ravnina = ravna površina
15. ravnina je ravna crta
16. ravnina = ravna ploha
17. ravnina je ravna ploha

Što je kut?

1. kut je dio ravnine označeno točkom
2. zbroj svih kuteva je $180°$
3. kut je vrh gdje se sijeku dvije stranice
4. kut je zakućen u kutu koji pokazuje koliko je veliki

5. kut je mjesto gdje se dva pravca sijeku i stvaraju šiljasti, tupi kut
6. kut - .....
7. kut - dio u kojem se spajaju dvije ravnine
8. kut je dio trokuta koji je omeđen pravcima
9. kut je u dvije crte (spojen)
10. kut je
11. kut je kut od trokut
12. kut je dio ravnine omeđen dvjema stranama
13. kut -
14. kut = dio geometrijskog lika omeđen krakovima koji se spajaju u jednoj točki
15. kut je kut
16. kut = dio ravnine omeđen krakovima
17. kut mjesto di se sjeku dva pravca (sjecište)

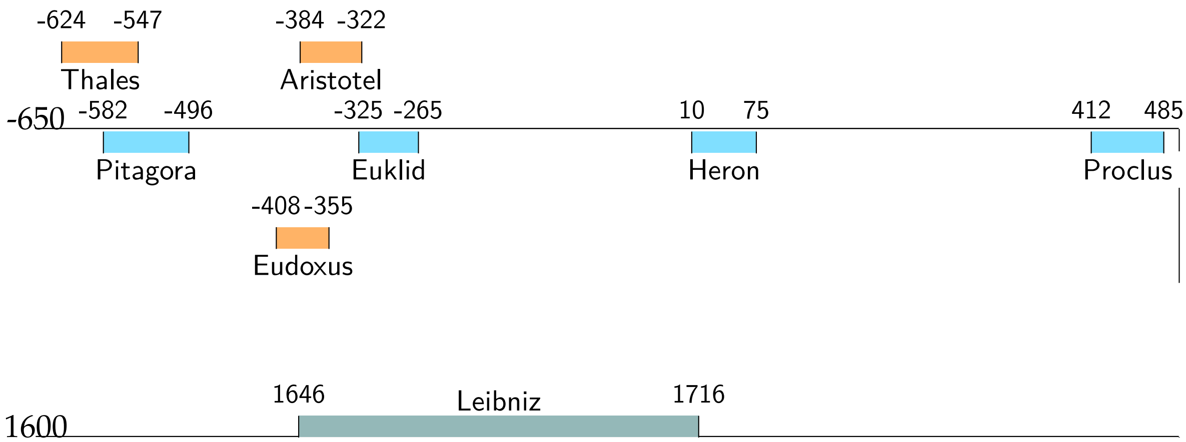
Što se može zaključiti iz gornjih odgovora? Netko bi možda zaključio da djeca nisu ništa naučila. Znači li to da je loše objašnjen sadržaj odgovarajuće nastavne cjeline? Možda je loš udžbenik? Možda je gradivo preteško za njihovu dob? Pažljiviji čitatelj će možda zaključiti da djeca ne pokazuju nepoznavanje gradiva nego da pokušavaju zadovoljiti obrasce koji se ne uklapaju u njihovo intuitivno poimanje osnovnih geometrijskih objekata. Jesu li krivi ti nametnuti obrasci ili njihova intuicija? U ovom slučaju, bio bih slobodan reći ovo prvo, a jedan od primjera koji navodi na takvu misao je definicija okomitosti pravaca o kojoj smo raspravljali (v. str. 42).

Neću tvrditi da se čovjek rađa s dobrom intuitivnom predodžbom prostora već bih radije rekao da ju gradi kroz igru u životnom okuženju u kojem raste. Ono što se postulira i trebalo bi se postulirati u školi, ako se već postulira, su odnosi među apstraktnim objektima, a ne objekti sami.

Kao završni komentar vezan uz anketu je taj da je zakazalo obrazovanje jer se ista pitanja i isti odgovori ponavljaju iz godine u godinu i to već čitavo jedno stoljeće. Ako je tako u matematici kako to izgleda u drugim, manje dorečenim nastavnim sadržajima?

Thales 624–547

6 Vremenska lenta



Literatura

Beeson, M. (2022). On the notion of equal figures in Euclid. *Beitr Algebra Geom*, 64:581–625.

Bergson, H. (1939). *Matière at mémoire. Essai sur la relation du corps à l'esprit*. Les Presses universitaires de France, Paris. Elektronska verzija 2003 à Chicoutimi, Québec (Prvo izdanje 1911).

Euklid ('300 p.n.e.'). *Elementi*. Aleksandria, Ptolomejev Egipat. url: https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html.

Frege, G. (1903). Über die Grundlagen der Geometrie – I. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12:319–24, 368–75. Engleski prijevod: (Frege and McGuinness, 1984, pp. 273–284).

Frege, G. (1906). Über die Grundlagen der Geometrie – II. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15:293–309, 377–403, 423–30. Engleski prijevod: (Frege and McGuinness, 1984, pp. 293–340).

Frege, G. and McGuinness, B. (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. Blackwell Publsishers, Oxford.

Hegel, G. F. (2001). *Science of logic*. Blackmask Online. http://www.inkwells.org/index_htm_fles/hegel.pdf.~Pristupljeno~19.~prosinca~2017.

Heiberg, J. (1883–1885). *Euclid's Elements of Geometry, he Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)*. Teubneri, B.G.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig. Engleski prijevod: Foundations of Geometry, L. Unger (ed.), La Salle: Open Court Press, 1971.

Kiselman, C. O. (2015). Euclid's straight lines. *Nordisk matematisk tidskrift (Normat)*, 60(4):145–169.

Pavković, B. and Veljan, D. (1992). *Elementarna matematika I*. Tehnička knjiga, Zagreb.

Poincaré, H. (1895). L'espace at la géométrie. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 3(6):631 – 646.

Poincaré, H. (2013). *The Foundations of Science: Science and Hypothesis, The Value of Science, Science and Method*. The Science Press, New York.

Risi, V. D. (2021). Gapless Lines and Gapless Proofs: Intersections and Continuity in Euclid's Elements. *Apeiron*, 54(2):233–259.

Roberts, F. S. and Luce, R. D. (1968). Axiomatic Thermodynamics and Extensive Measurement. *Synthese*, 18(4):311–326.

Russo, L. (1998). The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements. *Archive for History of Exact Sciences*, 52(3):195–219.

Wildberger, N. J. (2005). *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*. Wild Egg, Sydney.