

Deriviranje primjenom pravila za deriviranje.

U ovom dijelu se koristi tablica derivacija osnovnih funkcija, kao i osnovna pravila deriviranja.

Derivacije osnovnih funkcija

Osnovna pravila deriviranja

$f(x)$	$f'(x)$
konst.	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

- (1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
 (2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$,
 (3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
 (4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
 (5) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ (c - konstanta).

1. (a) Koristimo pravila (1) i (5) da bi došli do funkcija koje postoje u tablici derivacija osnovnih funkcija:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (3x^2 + 14e^x)' \quad [\text{pravilo (1)}] \\
 &= (3x^2)' + (14e^x)' \quad [\text{pravilo (5)}] \\
 &= 3(x^2)' + 14(e^x)' \quad [\text{pravila za deriviranje funkcija } x^n \text{ i } e^x] \\
 &= 3 \cdot 2x + 14e^x = 6x + 14e^x
 \end{aligned}$$

- (b) Analogan postupak

$$g'(x) = (4 \ln x - 12x^3)' = \frac{4}{x} - 36x^2.$$

2. (a) U ovim zadacima se koristi pravilo za deriviranje kvocijenta (pravilo (4)).

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{3x^2 - \ln x}{x^2}\right)' \quad [\text{pravilo (4)}] \\
 &= \frac{(3x^2 - \ln x)' \cdot x^2 - (3x^2 - \ln x) \cdot x^2}{(x^2)^2} = (*)
 \end{aligned}$$

Sada zasebno izračunamo derivacije brojnika i nazivnika:

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - \ln x)' &= (3x^2)' - (\ln x)' = 3(x^2)' - (\ln x)' \quad [\text{tablica derivacija}] \\
 &= 6x - \frac{1}{x}, \\
 (x^2)' &= 2x,
 \end{aligned}$$

i te derivacije uvrstimo tamo gdje smo stali:

$$(*) = \frac{(6x - \frac{1}{x}) \cdot x^2 - (3x^2 - \ln x) \cdot 2x}{x^4}.$$

Ovdje se možemo zaustaviti, a možemo izraz i malo srediti pa dobijemo

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

- (b) Analognim postupkom se dobije

$$g'(x) = \left(\frac{x + 7 \ln x}{2 - 3x^2}\right)' = \frac{(1 + 7/x)(2 - 3x^2) - (x + 7 \ln x) \cdot (-6x)}{(2 - 3x^2)^2}$$

3. (a) U ovom zadatku se koristi pravilo za deriviranje produkta dviju funkcija (pravilo (3)).

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x + 2x^2 + 3x^3) \cdot \ln x)' \quad [\text{pravilo (3)}] \\ &= (x + 2x^2 + 3x^3)' \cdot \ln x + (x + 2x^2 + 3x^3) \cdot (\ln x)' = (*) \end{aligned}$$

Izderiviramo funkcije zasebno:

$$\begin{aligned} (x + 2x^2 + 3x^3)' &= (x)' + (2x^2)' + (3x^3)' = 1 + 4x + 9x^2, \\ \ln x &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

i uvrstimo ih nazad u izraz za derivaciju produkta funkcija:

$$(*) = (1 + 4x + 9x^2) \cdot \ln x + (x + 2x^2 + 3x^3) \frac{1}{x}.$$

Ovim je zadatak riješen, ali ako se izraz želi još malo pojednostaviti, dobije se

$$f'(x) = (1 + 4x + 9x^2) \cdot \ln x + 1 + 2x + 3x^2.$$

- (b) Postupak je analogan prethodnom, dobije se

$$g'(x) = ((4e^x - x)(2e^x + 3))' = (4e^x - 1)(2e^x + 3) + (4e^x - x) \cdot 2e^x.$$

Ukoliko se prethodni izraz pojednostavi, dobije se

$$g'(x) = 16e^{2x} - 2(x - 5)e^x - 3.$$

4. (a) U ovom zadatku treba svesti izraz sa korijenom na izraz sa potencijom. Naravno, pri deriviranju se koriste standardna pravila.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} \right)' \quad [\text{zamijenimo korijene sa potencijom}] \\ &= \left(\frac{2x - x^{1/2}}{x^{1/3} + 1} \right)' \quad [\text{pravilo (4)}] \\ &= \frac{(2x - x^{1/2})' \cdot (x^{1/3} + 1) - (2x - x^{1/2}) \cdot (x^{1/3} + 1)'}{(x^{1/3} + 1)^2} = (*) \end{aligned}$$

Izračunamo zasebno derivacije brojnika i nazivnika:

$$\begin{aligned} (2x - x^{1/2})' &= (2x)' - (x^{1/2})' = 2 - \frac{1}{2}x^{-1/2}, \\ (x^{1/3} + 1)' &= (x^{1/3})' + (1)' = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \end{aligned}$$

i uvrstimo ih nazad:

$$(*) = \frac{(2 - \frac{1}{2}x^{-1/2}) \cdot (x^{1/3} + 1) - (2x - x^{1/2}) \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}}{(x^{1/3} + 1)^2}.$$

Eventualno se može vratiti oblik sa znakom korijena:

$$f'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) \cdot (\sqrt[3]{x} + 1) - (2x - \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x} + 1)^2}.$$

- (b) Slično kao i u zadatku (a),

$$g'(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3} - 6x^{-4} - 4e^x = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{6}{x^4} - 4e^x.$$

5. Ideja ovog zadatka je da se pokaže da deriviranje ne treba biti samo po varijabli koja se zove x .

$$\begin{aligned} D'(P) &= \left(\frac{P-2}{P^2+1} \right)' = \frac{(P-2)' \cdot (P^2+1) - (P-2) \cdot (P^2+1)'}{(P^2+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (P^2+1) - (P-2) \cdot 2P}{(P^2+1)^2} = \frac{-P^2+4P+1}{(P^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Ovdje se prvo iskoristilo pravilo za deriviranje kvocijenta, a nakon toga su derivirani brojnik i nazivnik svaki za sebe,

$$(P-2)' = (P)' - (2)' = 1, \quad (P^2+1)' = (P^2)' + (1)' = 2P.$$

Derivacija složene funkcije

U slijedećim zadacima se koristi pravilo za deriviranje složene funkcije. Funkcija $f(x)$ se prikaže kao funkcija nekog drugog argumenta (koji je zapravo funkcija od x), $f(x) = g(t)$ pa prilikom deriviranja imamo

$$f'(x) = g'(t) \cdot t'.$$

Na kraju je potrebno sve izraziti u varijabli u kojoj je izražena početna funkcija koju deriviramo.

1. (a) Kada bi u ovom zadatku argument funkcije $\ln$ bio x , primjenili bi pravilo za tabličnu derivaciju funkcije $\ln$ i zadatak bi bio riješen. Ovdje je, međutim, argument funkcije $\ln$ funkcija $3x^2 + 1$. Zato stavljamo zamjenu $t = 3x^2 + 1$. Imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(3x^2 + 1) \right)' = \left(\ln(t) \right)' \quad [\text{stavili smo zamjenu } t = 3x^2 + 1] \\ &= \frac{1}{t} \cdot t' \quad [\text{iskoristili smo tabličnu derivaciju od } \ln x] \\ &= \frac{1}{3x^2 + 1} \cdot 6x \quad [\text{našli } t' \text{ i uvrstili što je } t] \end{aligned}$$

- (b) Slični kao i zadatak (a), samo što smo ovdje stavili $t = 2x + 7$.

$$g'(x) = 2 \cdot e^{2x+7}.$$

2. (a) Funkcije oblika $g(x)^n$ su nekako “najnezgodnije” za uočiti da je ovdje riječ o složenoj funkciji, stoga je zgodno pogledati ovaj zadatak.

$$f'(x) = \left(\underbrace{(1-2x^3)^3}_t \right)' = (t^3)' = 3t^2 \cdot t' = 3 \underbrace{(1-2x^3)^2}_t \cdot \underbrace{(-6x^2)}_{t'} = -18x^2(1-2x^3)^2.$$

Ovdje je iskorišteno da je

$$t' = (1-2x^3)' = (1)' - (2x^3)' = -6x^2.$$

- (b) Ovdje imamo dva problema: složena funkcija i korijen. Kao zamjenu stavimo $t = x^2 + 7$ pa trebamo derivirati $t^{1/2}$. Na koncu se dobije

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 7)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 7}}.$$

(c) U ovome zadatku imamo složenu funkciju oblika $g(x)^n$, s time da je $g(x)$ razlomak:

$$h'(x) = \left[\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^3}_t \right]' = (t^3)' = 3t^2 \cdot t'.$$

Kako je

$$t' = \frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2},$$

dobijemo

$$h'(x) = 3 \underbrace{\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2}_t \cdot \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

3. U ovom zadatku je bitno uočiti da se složene funkcije mogu pojaviti u kao dio funkcije i da bi došli do njih (odnosno do trenutka kada se može napraviti zamjena) treba koristiti pravila deriviranja.

(a) Koristimo pravilo za deriviranje razlike funkcija:

$$f'(x) = \left((2x^2 + 4)^2 - 3x \right)' = \left((2x^2 + 4)^2 \right)' - (3x)'$$

Funkcija $(2x^2 + 4)^2$ je složena funkcija, kao zamjenu treba staviti $t = 2x^2 + 4$:

$$\left(\underbrace{(2x^2 + 4)^2}_t \right)' = (t^2)' = 2t \cdot t' = 2 \underbrace{(2x^2 + 4)}_t \cdot \underbrace{4x}_{t'}.$$

Ovdje smo iskoristili da je $(2x^2 + 4)' = 2(x^2)' + (4)' = 4x$. Kako je $(3x)' = 3$, dobijemo

$$f'(x) = 8x \cdot (2x^2 + 4) - 3.$$

(b) Slično kao u prethodnom zadatku, samo što ovdje imamo zbroj dvije složene funkcije, $(3 - x^3)^5$ i $\ln^2 x$. Kako je

$$\begin{aligned} \left((3 - x^3)^5 \right)' &= 5(3 - x^3)^4 \cdot (-3x^2) = -15x^2 \cdot (3 - x^3)^4, \\ \left(\ln^2 x \right)' &= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

dobije se

$$g'(x) = -15x^2 \cdot (3 - x^3)^4 + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

4. U ovom zadatku se složena funkcija pojavljuje kao dio razlomka ili produkta.

(a) Prvo primjenjujemo pravilo za deriviranje kvocijenta:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(2x+7) - 1}{x^2} \right)' = \frac{(\ln(2x+7) - 1)' \cdot x^2 - (\ln(2x+7) - 1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}.$$

Kako je

$$(\ln \underbrace{(2x+7)}_t)' = (\ln t)' = \frac{1}{t} \cdot t' = \frac{2}{2x+7},$$

pri čemu smo iskoristili da je $t' = (2x+7)' = 2$, dobijemo

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2x+7} \cdot x^2 - (\ln(2x+7) - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\frac{2x}{2x+7} - 2 \cdot (\ln(2x+7) - 1)x}{x^3}.$$

(b) Slična priča kao u prethodnom zadatku, samo što je ovdje riječ o derivaciji produkta. Iskoristimo da je

$$\left(e^{x^2-3}\right)' = 2x \cdot e^{x^2-3}$$

i dobijemo

$$g'(x) = 2x^2 \cdot e^{x^2-3} + e^{x^2-3} = (2x^2 + 1) \cdot e^{x^2-3}.$$

5. (a) U ovom zadatku imamo slučaj višestruko složene funkcije.

$$f'(x) = \left(\sqrt{\ln(2x^2 + 1) - 4x}\right)' = \left[\begin{array}{c} \text{stavimo} \\ t = \ln(2x^2 + 1) - 4x \end{array} \right] = (\sqrt{t})' = (t^{1/2})' = \frac{1}{2}t^{-1/2} \cdot t'.$$

Sada deriviramo zamjenu (t):

$$t' = (\ln(2x^2 + 1) - 4x)' = (\underbrace{\ln(2x^2 + 1)}_v)' - (4x)' = (\ln v)' - 4 = \frac{1}{v} \cdot v' - 4.$$

Kako je $v' = (2x^2 + 1)' = 4x$, dobijemo $t' = \frac{4x}{2x^2 + 1} - 4$ pa je

$$f'(x) = \frac{1}{2} \underbrace{(\ln(2x^2 + 1) - 4x)}_t^{-1/2} \cdot \underbrace{\left(\frac{4x}{2x^2 + 1} - 4\right)}_{t'}.$$

(b) Ovaj zadatak možemo rješavati kao derivaciju kvocijenta dviju složenih funkcija ili kao derivaciju korijena iz razlomka. Ukoliko na derivaciju gledamo kao na derivaciju kvocijenta, dobijemo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x - 1}}\right)' = \frac{(\sqrt{x^2 + 5})' \cdot \sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 + 5} \cdot (\sqrt{x - 1})'}{(\sqrt{x - 1})^2} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \cdot \sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 + 5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}}{x - 1}. \end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili da je

$$(\sqrt{x^2 + 5})' = \left[\begin{array}{c} \text{stavimo} \\ t = x^2 + 5, t' = 2x \end{array} \right] = (t^{1/2})' = \frac{1}{2}t^{-1/2} \cdot t' = \frac{1}{2} \frac{t'}{\sqrt{t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

i, analogno,

$$(\sqrt{x - 1})' = \frac{1}{2}(x - 1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}.$$

Ako na funkciju g želimo gledati kao na korijen iz razlomka, treba se prisjetiti da vrijedi $\frac{x^b}{y^b} = \left(\frac{x}{y}\right)^b$ pa je $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{\frac{x^2 + 5}{x - 1}}$.

Primjena derivacija

Činjenicu da veličina y ovisi o veličini x možemo zapisati kao $y = y(x)$. Ako želimo naći elastičnost veličine y u ovisnosti o x , to radimo pomoću formule

$$E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \quad (1)$$

Grubo govoreći, elastičnost nam kazuje koliko se u postocima promijeni zavisna veličina, ako se nezavisna veličina poveća za jedan posto.

Druga primjena derivacije koju gledamo je traženje ekstrema funkcije jedne varijable. Za funkciju $f : D \rightarrow R$ kažemo da u točki x^* ima **lokalni maksimum** ako postoji interval $I = \langle x^* - c, x^* + c \rangle \subset D$ takav da je $f(x^*) > f(x)$ za svaki $x \in I$. Analogno, f ima u točki x^* **lokalni minimum** ako postoji interval $I = \langle x^* - c, x^* + c \rangle \subset D$ takav da je $f(x^*) < f(x)$ za svaki $x \in I$.

Veza između pojmova lokalnog maksimuma, odnosno minimuma i derivacija je slijedeća: neka je $f : D \rightarrow R$ derivabilna¹ funkcija. Ako u točki x^* funkcija f ima lokalni ekstrem, tada je $f'(x^*) = 0$.

Činjenica da je u točki ekstrema derivacija funkcije jednaka 0 se koristi pri traženju ekstrema. Postupak je slijedeći: neka se traže ekstremi funkcije f .

1. Izračuna se derivacija $f'(x)$.
2. Riješi se jednačba $f'(x) = 0$. Neka su $x_1, x_2, \dots$ rješenja te jednačbe.
3. Za svako rješenje x^* jednačbe $f'(x) = 0$
 - (a) uzmemo jednu točku koja je manja od ("lijevo od") nje (označimo je sa a) i jednu točku koja je veća od ("desno od") nje (tu točku označimo sa b).
 - (b) Izračunamo $f'(a)$ i $f'(b)$. Strogo govoreći, dovoljno nam je naći predznak derivacije u tim točkama.
 - (c) Ako je $f'(a) > 0$, a $f'(b) < 0$, tada funkcija f ima u x^* lokalni maksimum.
Ako je $f'(a) < 0$, a $f'(b) > 0$, tada funkcija f ima u x^* lokalni minimum.
Ako nije nastupio niti jedan od prethodna dva slučaja, tj. $f'(a)$ i $f'(b)$ su istog predznaka, tada u x^* ne postoji ekstrem.

1. Ovdje treba naći elastičnost potražnje o cijeni. Kada u formulu za elastičnost (1) uvrstimo oznake za potražnju i cijenu, dobije se da elastičnost potražnje o cijeni tražimo pomoću formule

$$E_{D,P}(P) = \frac{P}{D(P)} \cdot D'(P).$$

Izračunamo sada $D'(P)$:

$$\begin{aligned} D'(P) &= \left(\frac{P+1}{P^2} \right)' = \frac{(P+1)' \cdot P^2 - (P+1) \cdot (P^2)'}{(P^2)^2} \\ &= \frac{P^2 - (P+1) \cdot 2P}{P^4} = \frac{-P-2}{P^3}. \end{aligned}$$

Sada možemo naći elastičnost na razini cijene $P = 5$: $D(5)$ je $6/25$, $D'(5)$ je $-7/125$ pa je

$$E_{D,P}(5) = \frac{5}{6/25} \cdot \frac{-7}{125} = \frac{-35}{30} = -\frac{7}{6} = -1,17.$$

Interpretacija: ako na razini cijena $P = 5$, povećamo cijenu proizvoda za 1%, potražnja za tim proizvodom se smanjuje (zbog negativnog predznaka elastičnosti) za 1,17%.

2. Postupak je identičan postupku iz prethodnog zadatka. Formula za elastičnost u ovom slučaju postaje

$$E_{S,P}(P) = \frac{P}{S(P)} \cdot S'(P),$$

¹Ako želimo biti baš precizni, trebali bi zahtijevati da f ima derivaciju u svakoj točki domene te da je funkcija f' neprekidna funkcija.

a derivacija funkcije S (ovisnosti ponude o cijeni) je $S'(P) = \frac{P^2 + 2P}{(P+1)^2}$. Kako je $S(4) = 16/5$ i $S'(4) = 24/25$, dobijemo da je

$$E_{S,P}(4) = \frac{4}{\frac{16}{5}} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Interpretacija: ako na razini cijena $P = 4$, povećamo cijenu proizvoda za 1%, ponuda tog proizvoda se povećava (pozitivan predznak elastičnosti) za 1,2%.

3. Za razliku od prethodna dva zadatka, u ovom zadatku je potrebno naći eksplicitan izraz za elastičnost i tek tada tražiti kada je elastičnost jednaka 0,75. Kako je $S'(P) = 1$, dobije se da je

$$E_{S,P} = \frac{P}{S(P)} \cdot S'(P) = \frac{P}{P+2} \cdot 1 = \frac{P}{P+2}.$$

Sada tražimo cijenu P za koju je $E_{S,P} = 0,75$:

$$\frac{P}{P+2} = 0,75 \cdot (P+2) \Rightarrow P = 0,75 \cdot (P+2) \Rightarrow P = 0,75P + 1,5 \Rightarrow 0,25P = 1,5 \Rightarrow P = 6.$$

Na razini cijena $P = 6$ elastičnost ponude o cijeni je 0,75.

4. Analogno prethodnom: prvo treba naći što jednostavniji izraz za elastičnost, a nakon toga riješiti jednadžbu. Kako je $D'(P) = \frac{-3}{(P+3)^2}$, dobije se da je

$$E_{D,P} = \frac{P}{\frac{3}{P+3}} \cdot \frac{-3}{(P+3)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{skratimo 3 i -3} \\ \text{te } P+3 \text{ i } (P+3)^2. \end{array} \right] = P \cdot \frac{-1}{P+3} = \frac{-P}{P+3}.$$

Još ostaje riješiti jednadžbu $E_{D,P} = -0,5$:

$$\frac{-P}{P+3} = -0,5 \Rightarrow -P = -0,5P - 1,5 \Rightarrow P = 3.$$

Na razini cijena $P = 3$ elastičnost potražnje o cijeni je $-0,5$.

5. Postupak u ovom zadatku je isti kao u prethodna dva, osim što treba pripaziti pri postavljanju jednadžbe. Naime, funkcija y nema jediničnu elastičnost samo kada je $E_{y,x} = 1$, nego i kada je $E_{y,x} = -1^2$.

Prvo nađemo izraz za elastičnost troškova o proizvodnji. Kako je $TC'(Q) = 5 + Q$, imamo da je

$$E_{TC,Q} = \frac{Q}{\frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20} \cdot (5 + Q) = \frac{5Q + Q^2}{\frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20}.$$

Sada tražimo razinu proizvodnje Q na kojoj funkcija ukupnih troškova ima jediničnu elastičnost. Prvo rješavamo jednadžbu $E_{TC,Q} = 1$:

$$\begin{aligned} E_{TC,Q} = 1 &\Leftrightarrow \frac{5Q + Q^2}{\frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20} = 1 \\ \Rightarrow 5Q + Q^2 &= \frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20 \Rightarrow \frac{1}{2}Q^2 - 20 = 0 \Rightarrow Q^2 = 40. \end{aligned}$$

²Naime, za funkciju y kažemo da je **neelastična** u odnosu na varijablu x u točki x_0 ako je $|E_{y,x}(x_0)| < 1$. Ako je $|E_{y,x}(x_0)| > 1$, kažemo da je y **elastična** u odnosu na varijablu x u točki x_0 , a ako je $|E_{y,x}(x_0)| = 1$, kažemo da y u točki x_0 ima **jediničnu elastičnost** u odnosu na x .

Jednadžba $Q^2 = 40$ ima dva rješenja: $Q_1 = \sqrt{40}$ i $Q_2 = -\sqrt{40}$. No, kako je funkcija TC definirana samo za $Q \geq 0$ (tj. proizvodnja, Q , ne može biti negativna), rješenje Q_2 ne razmatramo dalje. Dakle, na razini proizvodnje $Q_1 = \sqrt{40}$ funkcija ukupnih troškova ima jediničnu elastičnost u odnosu na proizvodnju.

Još ostaje riješiti jednadžbu $E_{TC,Q} = -1$:

$$\begin{aligned} E_{TC,Q} = -1 &\Leftrightarrow \frac{5Q + Q^2}{\frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20} = -1 \\ \Rightarrow 5Q + Q^2 &= -\left(\frac{1}{2}Q^2 + 5Q + 20\right) \Rightarrow \frac{3}{2}Q^2 + 10Q + 20 = 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednadžba $\frac{3}{2}Q^2 + 10Q + 20 = 0$ nema realnih rješenja. Naime,

$$Q_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 20}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{-10 \pm \sqrt{-20}}{3}$$

pa realnih rješenja nema jer je izraz pod korijenom negativan.

Dakle, samo na razini proizvodnje $Q = \sqrt{40}$ funkcija troškova ima jediničnu elastičnost.

6. Treba naći ekstreme funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 27$. Slijedimo postupak za traženje ekstrema:

- $f'(x) = 2x - 4$;
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Točka $x = 2$ je jedini kandidat za ekstrem.
- uzmem jednu točku manju i jednu točku veću od 2, npr. $a = 1$ i $b = 3$. Kako je $f'(1) = -2 < 0$ i $f'(3) = 2 > 0$, zaključujemo da se u $x = 2$ postiže lokalni minimum.

7. Koristimo postupak za traženje ekstrema:

- $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 50\right)' = x^2 + 4x - 5$;
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 1$. Točke $x_1 = -5$ i $x_2 = 1$ su kandidati za ekstreme.
- Prvo ispitujemo točku $x_1 = -5$. Odaberemo točke -6 i -4 ($-6 < x_1 = -5 < -4$) i ispitamo predznak derivacije u njima:

$$f'(-6) = 36 - 24 - 5 = 7 > 0, \quad \text{ i } \quad f'(-4) = 16 - 16 - 5 = -5 < 0.$$

Prema pravilima za određivanje ekstrema zaključujemo da u -5 funkcija f dostiže lokalni maksimum.

Isti postupak ponovimo za $x_2 = 1$. Odaberemo točke 0 i 2 i izračunamo vrijednost derivacije u njima. Kako je $f'(0) = -5 < 0$, a $f'(2) = 7 > 0$ zaključujemo da u 1 funkcija f postiže lokalni minimum.

8. Prvo treba odrediti prosječne troškove, AC , koji se dobiju kada se ukupni troškovi podijele sa proizvodnjom, $AC(Q) = TC(Q)/Q$. U našem slučaju prosječni troškovi su

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{Q^2 + 50}{Q} = Q + \frac{50}{Q}.$$

Sada slijedimo postupak za pronalaženje ekstrema:

- $AC'(Q) = 1 - \frac{50}{Q^2}$.

- $AC'(Q) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{50}{Q^2} = 0 \Rightarrow Q^2 = 50$. Rješenja jednadžbe $Q^2 = 50$ su točke $Q_1 = \sqrt{50}$ i $Q_2 = -\sqrt{50}$, ali točku Q_2 možemo odmah odbaciti jer proizvodnja (Q) ne može biti negativna.
- Kako je $\sqrt{50} \approx 7,07$, za utvrđivanje postojanja ekstrema funkcije AC u $\sqrt{50}$ možemo uzeti točke 7 i 8 (jer je $\sqrt{50}$ između njih). Kako je

$$AC'(7) = 1 - \frac{50}{7^2} < 0 \quad \text{i} \quad AC'(8) = 1 - \frac{50}{8^2} > 0,$$

zaključujemo da u točki $\sqrt{50}$ funkcija prosječnih troškova postiže lokalni minimum (na razini proizvodnje $Q = \sqrt{50}$ su prosječni troškovi najmanji).

9. Prvi korak u ovom zadatku je da se formira funkcija koja će opisivati ovisnost dobiti o proizvodnji (tu funkciju ćemo označiti sa B). Tada se problemi koje treba riješiti svode na:

- *odredite granice intervala proizvodnje za koju postoji dobit...* – rješavanje nejednadžbe $B(Q) > 0$;
- *odredite razinu proizvodnje za koju se postiže najveća dobit...* – traženje ekstrema funkcije B ;
- *odredite razinu proizvodnje na kojoj se postižu najveći prihodi* – traženje ekstrema funkcije I .

Funkcija dobiti je zadana sa

$$B(Q) = I(Q) - TC(Q) = Q \cdot (50 - Q) - (10Q + 40) = 50Q - Q^2 - 10Q - 40 = -Q^2 + 40Q - 40.$$

Odredimo prvo kada se postiže dobit. Potrebno je riješiti nejednadžbu $B(Q) > 0$, a prvi korak u rješavanju te nejednadžbe je rješavanje jednadžbe $B(Q) = 0$:

$$B(Q) = 0 \Leftrightarrow -Q^2 + 40Q - 40 = 0.$$

Jednadžba $B(Q) = 0$ je kvadratna i ima rješenja

$$Q_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 160}}{-2} \Rightarrow Q_1 = 1,026, Q_2 = 38,974.$$

Kada smo riješili jednadžbu $B(Q) = 0$, još treba odrediti gdje je $B(Q) > 0$. Kako neprekidna funkcija (a funkcija B , koja je polinom, to sigurno je) ne mijenja predznak između nultočaka, dovoljno je pogledati vrijednost $B(Q)$ za bilo koji Q između Q_1 i Q_2 , npr. $Q = 2$. Kako je $B(2) = 36 > 0$, zaključujemo da je $B(Q) > 0$ za Q iz intervala $(Q_1, Q_2)^3$, odnosno da se proizvodnja isplati ako je njena veličina između 1,026 i 38,974.

Traženje točke u kojoj se postiže maksimalna dobit je standardni problem traženja ekstrema funkcije:

- $B'(Q) = -2Q + 40$.
- $B'(Q) = 0 \Leftrightarrow -2Q + 40 = 0 \Rightarrow Q = 20$.
- Jedini kandidat za ekstrem je $Q = 20$. Uzmemo točke 19 i 21, $B'(19) = 2 > 0$, $B'(21) = -2 < 0$, iz čega slijedi da funkcija B u točki $Q = 20$ ima maksimum.

Obzirom na kontekst, reći ćemo da je dobit najveća na razini proizvodnje 20.

Konačno, nalaženje razine proizvodnje u kojoj su najveći prihodi je također standardni problem traženja ekstrema. Rješenje je $Q = 25$, odnosno najveći se prihodi postižu na razini proizvodnje 25.

³Obzirom da je $B(Q)$ kvadratna funkcija, isti smo zaključak mogli donijeti promatrajući predznak uz član Q^2 .