Račun zajmova.

Osnovne formule

Osnovni princip kod računa zajmova je da zbroj realnih vrijednosti anuiteta u trenutku isplate zajma treba biti jednak vrijednosti posuđenog novca (iznosa zajma). Taj princip koristimo u slučaju da imamo plaćanje različitim anuitetima ili se kamatnjak tijekom otplate mijenja.

U slučaju da tijekom cijelog razdoblja otplate zajma imamo jednake anuitete, a kamatnjak je cijelo vrijeme jednak možemo izvesti i neke formule. U iduće tri formule je A - anuitet (rata), C_0 - iznos zajma, r - dekurzivni kamatni koeficijent za razdoblje trajanja jedne rate, n - broj rata. Prva formula služi nam za izračun vrijednosti anuiteta,

$$A = C_0 \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}. \tag{1}$$

Slijedeća formula nam kaže kako iznos zajma ovisi o veličini anuiteta,

$$C_0 = A \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}. \tag{2}$$

Iduća formula određuje koliko nam je ostalo glavnice za vratiti (C_k), nakon što smo otplatili k rata,

$$C_k = A \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)}. \tag{3}$$

Posljednja formula određuje koliko je ostalo glavnice za vratiti (C_k), ako zajam vraćamo unaprijed dogovorenim ratama veličine B, a otplatili smo k rata,

$$C_k = C_0 - B \frac{r^k - 1}{r^k(r-1)}. \tag{4}$$

Konačno, kod bilo kakvog načina vraćanja zajma, kamata K je razlika između iznosa novca koji smo vratili i koji smo posudili.

Zadaci

1. Ovdje imamo model otplate različitim anuitetima, pa primjenjujemo princip da zbroj realnih vrijednosti anuiteta mora biti jednak iznosu glavnice. Kako današnja realna vrijednost anuiteta A, plaćenog nakon k godina, uz uvjet da je cijelo vrijeme bio jednaki kamatnjak p, iznosi A/r^k imamo:
$$30000 = \frac{10000}{1{,}06} + \frac{15000}{1{,}06^2} + \frac{A}{1{,}06^3},$$
pri čemu smo uvažili da nam je glavnica 30000 i kamatni koeficijent 1,06. Gornja jednadžba se može rješiti na nekoliko načina, npr.
$$\begin{aligned} 30000 &= 9433{,}96 + 13349{,}95 + \frac{A}{1{,}06^3} \\ 7216{,}09 &= \frac{A}{1{,}06^3} \\ A &= 7216{,}09 \cdot 1{,}06^3 = 8594{,}48. \end{aligned}$$
Dakle, iznos posljednjeg anuiteta treba biti 8594,48 €.

2. Kao i u prethodnom zadatku, i ovdje imamo model otplate različitim anuitetima, pa primjenjujemo princip da zbroj realnih vrijednosti anuiteta mora biti jednak iznosu glavnice:
$$15000 = \frac{A}{1{,}065} + \frac{6000}{1{,}065^2} + \frac{6000}{1{,}065^3}.$$

Riješimo gornju jednadžbu,

$$\begin{aligned} 15000 &= \frac{A}{1{,}065} + 5289{,}96 + 4967{,}09 \\ 4742{,}95 &= \frac{A}{1{,}065} \\ A &= 5051{,}24, \end{aligned}$$

pa vidimo da je vrijednost prvog anuiteta 5051,24 €.

3. Ovdje je model otplate zajma jednakim anuitetima, a kamatnjak tijekom cijelog razdoblja ukamaćivanja je jednak, stoga možemo primjeniti formulu (1), jer tražimo anuitet. Dakle, $C_0 = 20000$, $n = 6$, $r = 1{,}06$, a anuitet je

$$A = 20000\frac{1{,}06^6 \cdot (1{,}06 - 1)}{1{,}06^6 - 1} = 4067{,}25.$$

4. Ovdje opet imamo model otplate zajma jednakim anuitetima, a kamatnjak tijekom cijelog razdoblja ukamaćivanja je jednak, stoga možemo primjeniti formulu (1), no trebamo paziti na broj rata, a samim time i na r.

   (a) Ovdje vraćamo zajam mjesečnim anuitetima. Rok otplate zajma je 5 godina = 60 mjeseci, pa imamo da je $n = 60$. Glavnica je 50.000 €, a za kamatni koeficijent r ne uzimamo 1,07 (to je godišnji r, a mi trebamo mjesečni!), već je

   $$r = \sqrt[12]{1{,}07} = 1{,}005654$$

   (vidi konformni kamatnjak). Bitno je da za r uzmemo što više decimala, da bi osigurali točnost računa. Uvrstimo sve u formulu (1) i dobijemo

   $$A = 50000\frac{1{,}005654^{60} \cdot (1{,}005654 - 1)}{1{,}005654^{60} - 1} = 985{,}00.$$

   (b) Ovdje vraćamo zajam polugodišnjim anutitetima. Rok otplate zajma je 5 godina = 10 polugodišta, pa je $n = 10$. Glavnica je 50.000 €, a za kamatni koeficijent r ne uzimamo 1,07, već je

   $$r = \sqrt{1{,}07} = 1{,}034408$$

   (vidi konformni kamatnjak). Uvrstimo sve u formulu (1) i dobijemo

   $$A = 50000\frac{1{,}034408^{10} \cdot (1{,}034408 - 1)}{1{,}034408^{10} - 1} = 5994{,}14.$$

   (c) Ovdje nemamo što prepravljati, uvrstimo brojeve u formulu (1) i dobijemo da je anuitet

   $$A = 50000\frac{1{,}07^5 \cdot (1{,}07 - 1)}{1{,}07^5 - 1} = 12194{,}53.$$

   Izračunajmo još i kamatu. Kako smo rekli, kamata je razlika između nominalne vrijednosti novca kojeg smo vratili i novca kojeg smo posudili. Kako ovdje u svim slučajevima imamo jednake anuitete, nominalna vrijednost novca kojeg smo vratili je jednaka broj rata × veličina rate, a posuđenog novca je 50.000 €. Kamata je

   (a) $K = 60 \cdot 985 - 50000 = 9100$ €.

   (b) $K = 10 \cdot 5994{,}14 - 50000 = 9941{,}40$ €.

   (c) $K = 5 \cdot 12194{,}53 - 50000 = 10972{,}65$ €.

5. Uz zadane uvjete, prema formuli (1) dobijemo da je anuitet A_1 jednak

$$A_1 = 30000\frac{1{,}10^{10}\cdot(1{,}10-1)}{1{,}10^{10}-1} = 4882{,}36.$$

Ako bi zajam otplatili s 10 jednakih rata A_1, kamata bi bila

$$K = 4882{,}36\cdot 10 - 30000 = 18823{,}60.$$

Kako ćemo naći A_2? Izračunat ćemo koliki je ostatak duga nakon što smo platili tri rate, a potom ćemo s tim brojem ući kao glavnicom za novi zajam, čije je trajanje 7 godina, a godišnji kamatnjak 9.

Primjenom formule (3), imamo da nam je nakon tri plaćene rate ostala neotplaćena glavnica u iznosu

$$C_k = 4882{,}36\frac{1{,}10^7-1}{1{,}10^7(1{,}10-1)} = 23769{,}38.$$

Taj ostatak je glavnica za novi zajam, $n = 7$, $r = 1{,}09$, pa je

$$A_2 = 23769{,}38\frac{1{,}09^7\cdot(1{,}09-1)}{1{,}09^7-1} = 4722{,}75.$$

U ovom slučaju kamata je

$$K = (4882{,}36\cdot 3 + 4722{,}75\cdot 7) - 30000 = 47706{,}33 - 30000 = 17706{,}33.$$

U slučaju b), naći ćemo ostatak duga nakon što smo otplatili četiri rate iznosa A_1,

$$C_k = 4882{,}36\frac{1{,}10^6-1}{1{,}10^6(1{,}10-1)} = 21263{,}96,$$

na taj iznos moramo obračunati kamatu za godinu dana (jer ovo je dug na kraju četvrte godine, ali mi ga vraćamo tek na kraju pete godine), pa dobijemo da je na kraju pete godine Slavko dužan $21263{,}96\cdot 1,10 = 23390{,}35$ (vidi poglavlje o složenom kamatnom računu) i taj iznos treba platiti da bi vratio svoj zajam. Ukupna kamata u ovom slučaju je

$$K = (4882{,}36\cdot 4 + 21263{,}96) - 30000 = 40793{,}40 - 30000 = 10793{,}40.$$

6. Za rješavanje ovog zadatka koristit ćemo formulu (4). Prvo treba odrediti najmanji takav n da je ostatak duga nakon plaćanja n-te rate negativan, potom odrediti ostatak duga za $n-1$, njega uvećati za kamatu i to predstavlja zadnji anuitet. Za određivanje n možemo koristiti i "odokativnu" metodu (metodu pokušaja i pogrešaka). U ovom slučaju probamo sa $k = 4$: ostatak duga (prema (4)) je

$$C_k = 50000 - 15000\frac{1{,}09^4-1}{1{,}09^4(1{,}09-1)} = 1982{,}15.$$

Jasno je da bi, ukoliko platimo i petu ratu u iznosu od 15000 €, ostatak duga bio negativan. Stoga je $n = 5$. Ostatak duga nakon četiri plaćene rate je 1982,15 €, a uvećan za jednogodišnju kamatu (na kraju pete godine) iznosi 2160,54 € i toliko treba iznositi zadnja rata.

Ukoliko koristimo metodu koja nije odokativna, problem se svodi na to da nađemo najmanji k za koji vrijedi

$$50000 - 15000\frac{1{,}09^k-1}{1{,}09^k(1{,}09-1)} < 0.$$

Gornja nejednakost se može zapisati i kao

$$\frac{50000}{15000} \le \frac{1{,}09^k-1}{1{,}09^k(0{,}09)} \Leftrightarrow 0{,}3 \le \frac{1{,}09^k-1}{1{,}09^k} \Leftrightarrow 0{,}3\cdot 1{,}09^k \le 1{,}09^k - 1 \Leftrightarrow 1 \le 0{,}7\cdot 1{,}09^k,$$

pa vidimo da je traženi k najmanji k za koji vrijedi nejednakost

$$1{,}09^k \geq \frac{1}{0{,}7} = 1{,}42857,$$

koju rješimo logaritmiranjem,

$$k \cdot \log 1{,}09 \geq \log 1{,}42857 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{\log 1{,}42857}{\log 1{,}09} = 4{,}1388.$$

Najmanji k za koji je ostatak duga negativan je za $k = 5$, pa gledamo ostatak duga za $k = 4$, jer je to najveći k za koji je ostatak duga pozitivan. Dalje je postupak isti kao i u 'odokativnoj" metodi.

7. Ovdje koristimo formule (1) i (3), samo moramo obratiti pažnju na činjenicu da je riječ o mjesečnim otplatama, pa trebamo koristiti n - broj mjeseci i dekurzivni kamatni koeficijent r za mjesec. Imamo:

   - $n = 360$ (30 godina $\times$ 12 mjeseci),
   - $r = \sqrt[12]{1{,}07} = 1{,}005654$,
   - $C_0 = 50000$,

   pa je mjesečni anuitet

   $$A = 50000 \frac{1{,}005654^{360}(1{,}005654 - 1)}{1{,}005654^{360} - 1} = 325{,}46.$$

   Primjetimo da je $1{,}005654^{360} = 1{,}07^{30}$. Naime

   $$1{,}005654^{360} = (\sqrt[12]{1{,}07})^{360} = ((1{,}07)^{1/12})^{360} = (1{,}07)^{360/12} = (1{,}07)^{30}.$$

   Ukupna kamata je

   $$360 \cdot 325{,}46 - 50000 = 67165{,}60€,$$

   a ostatak duga nakon godine dana (primjetite da je $k = 12!$) je

   $$C_k = 325{,}46 \frac{1{,}005654^{348} - 1}{1{,}005654^{348}(1{,}005654 - 1)} = 49470{,}68€.$$

   Za godišnji kamatnjak 6,5 je anuitet 309,94 €, ukupna kamata je 61579,81 €, a ostatak duga nakon godinu dana je 49421,13 €.

8. Izračunajmo mjesečni anuitet A_1, za slučaj da se zajam vraća 6 godina (72 mjeseca) i godišnji kamatnjak 11. Trebamo naći dekurzivni kamatni koeficijent za jedan mjesec, $r = \sqrt[12]{1{,}11} = 1{,}008735$. Pomoću formule (1) dobijamo

   $$A_1 = 25000 \frac{1{,}008735^{72}(1{,}008735 - 1)}{1{,}008735^{72} - 1} = 469{,}24€.$$

   Ukupna kamata za ovaj način vraćanja duga iznosi

   $$K_1 = 469{,}24 \cdot 72 - 25000 = 8785{,}28€.$$

   (a) Da bi odredili novi anuitet A_2, trebamo naći ostatak duga nakon 3 godine otplaćivanja (plaćene $k = 36$ rate) i taj ostatak uzeti kao osnovicu za novi zajam koji će trajati 3+2=5 godina ($n = 60$ mjeseci). Ostatak duga je, prema formuli (3),

   $$C_k = 469{,}24 \frac{1{,}008735^{36} - 1}{1{,}008735^{36}(1{,}008735 - 1)} = 14440{,}92€,$$

   pa je novi anuitet

   $$A_2 = 14440{,}92 \frac{1{,}008735^{60}(1{,}008735 - 1)}{1{,}008735^{60} - 1} = 310{,}26€.$$

   Ukupna kamata za ovaj način vraćanja duga iznosi

   $$K_2 = 469{,}24 \cdot 36 + 310{,}26 \cdot 60 - 25000 = 10508{,}24€.$$

(b) Kao i u prethodnom slučaju, odredimo ostatak duga nakon dvije godine (otplaćene 24 rate) i to uzmemo kao osnovicu za novi zajam, koji će trajati 4-2=2 godine ($n = 24$ mjeseca). Prema formuli (3), ostatak duga je

$$C_k = 469{,}24 \frac{1{,}008735^{24} - 1}{1{,}008735^{24}(1{,}008735 - 1)} = 18333{,}64€,$$

a novi anuitet je

$$A_2 = 18333{,}64 \frac{1{,}008735^{24}(1{,}008735 - 1)}{1{,}008735^{24} - 1} = 850{,}08€.$$

Ukupna kamata za ovaj način vraćanja duga iznosi

$$K_3 = 469{,}24 \cdot 24 + 850{,}08 \cdot 24 - 25000 = 6663{,}68€.$$

9. Obratite pažnju na činjenicu da formula za računanje anuiteta (1) funkcionira u slučaju kada dobijemo zajam početkom godine, a počnemo ga vraćati od kraja prvog razdoblja oplate (godine, mjeseca i sl.).

(a) U ovom slučaju, banka je dostavila sav novac odmah. Mi znamo izračunati anuitet na onaj dug koji je tvrtka dužna početkom četvrte godine (jer vraćamo dug od kraja četvrte godine). Od danas do početka četvrte godine prošla su tri razdoblja ukamaćivanja pa dug početkom četvrte godine iznosi

$$C_n = 100000 \cdot 1{,}08^3 = 125971{,}20€,$$

i to je glavnica koju mi moramo vratiti (C_0 u formuli za izračun anuiteta). Broj anuiteta je $n = 7$ (prebrojite!), a godišnji kamatnjak je 8, pa je $r = 1{,}08$. Prema formuli, anuitet je

$$A = 125971{,}20 \frac{1{,}08^7(1{,}08 - 1)}{1{,}08^7 - 1} = 24195{,}59€.$$

Ukupne kamate su

$$K = 24195{,}59 \cdot 7 - 100000 = 69369{,}13€.$$

(b) Kao i u prošlom slučaju, treba izračunati koliki je dug na početku četvrte godine, a poslije je sve jednake. Na početku četvrte godine tvrtka je dužna (jer je 50000 dobila odmah, a 50000 nakon godinu dana)

$$C_n = 50000 \cdot 1{,}08^3 + 50000 \cdot 1{,}08^2 = 121305{,}60€.$$

Anuitet je

$$A = 121305{,}60 \frac{1{,}08^7(1{,}08 - 1)}{1{,}08^7 - 1} = 23299{,}46€,$$

a ukupne kamate iznose

$$K = 23299{,}46 \cdot 7 - 100000 = 63096{,}22€.$$

Za slučaj kada je kamatnjak 6, dobijemo da je u prvom slučaju anuitet $A = 22565{,}85$ €, a kamate $K = 57960, 97$ €, dok u drugom slučaju imamo anuitet $A = 21730{,}08$ € i kamate $K = 52110, 57$ €.

10. Ovdje se ponovno igramo s općim principom za rješavanje zajma: zbroj diskontiranih vrijednosti anuiteta jednak je nominalnoj vrijednosti zajma.

(a) U ovom slučaju je prvi anuitet jednak A, drugi je $A + 5000$, a treći je $A + 10000$. Prema osnovnom principu, treba vrijediti

$$40000 = \frac{A}{1{,}06} + \frac{A + 5000}{1{,}06^2} + \frac{A + 10000}{1{,}06^3}.$$

Riješimo gornju jednadžbu:

$$\begin{aligned}
40000 &= \frac{1}{1{,}06}A + \frac{1}{1{,}06^2}A + \frac{5000}{1{,}06^2} + \frac{1}{1{,}06^3}A + \frac{10000}{1{,}06^3} \\
40000 &= 0{,}9434 \cdot A + 0{,}89 \cdot A + 4449{,}98 + 0{,}8396 \cdot A + 8396{,}19 \\
40000 &= 2{,}673 \cdot A + 12846{,}17 \\
A &= 10158{,}51€.
\end{aligned}$$

Dakle, prvi anuitet iznosi 10158,51 €, drugi 15158,51 €, a treći 20158,51 €.

(b) U ovom slučaju je svaki anuitet veći od prethodnog za 10%. Ako prvi anuite označimo sa A, onda je drugi anuitet $1{,}1 \cdot A$, a treći anuitet je

$$1{,}1 \cdot A + \frac{10}{100} 1{,}1 \cdot A = 1{,}21 \cdot A.$$

Primjenimo osnovni princip i dobijemo da treba vrijediti

$$40000 = \frac{A}{1{,}06} + \frac{1{,}1 \cdot A}{1{,}06^2} + \frac{1{,}21 \cdot A}{1{,}06^3}.$$

Riješimo gornju jednadžbu:

$$\begin{aligned}
40000 &= \frac{1}{1{,}06}A + \frac{1{,}1}{1{,}06^2}A + \frac{1{,}21}{1{,}06^3}A \\
40000 &= 0{,}9434 \cdot A + 0{,}979 \cdot A + 1{,}0159 \cdot A \\
40000 &= 2{,}9383 \cdot A \\
A &= 13613{,}17€.
\end{aligned}$$

Prvi anuitet iznosi 13613,17 €, drugi 14974,48 €, a treći 16471,93 €.