

Složeni kamatni račun.

Osnovne formule

C_0 - početna vrijednost kapitala (glavnica), C_n - krajnja vrijednost kapitala nakon n razdoblja ukampanja, n - broj razdoblja ukampanja, r - dekurzivni kamatni koeficijent, $r = 1 + p/100$, p - kamatnjak.

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = C_0 \cdot r^n. \quad (1)$$

Za slučaj n periodičkih jednakih uplata u iznosu R , početkom razdoblja, imamo da je njihova konačna vrijednost na kraju n -tog razdoblja

$$R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}. \quad (2)$$

Zadaci

- Identificiramo parametre: $C_0 = 5000$, $p = 4$, $n = 2$, $r = 1,04$, tražimo krajnju vrijednost C_n . Uvrstimo u formulu (1) i dobijemo:

$$C_n = 5000 \cdot 1,04^2 = 5408.$$

- Ovdje znamo krajnji iznos kapitala, a tražimo početni iznos C_0 . Zadano nam je $p = 3,8$, $n = 15$, $C_n = 150000$, izračunamo $r = 1,038$, pa uvrštavanjem u (1) dobijamo

$$\begin{aligned} 150000 &= C_0 \cdot 1,038^{15} \\ 150000 &= C_0 \cdot 1,749686749 \\ C_0 &= 85729,63 \end{aligned}$$

- Ovdje imamo slučaj promjenjivog kamatnjaka. Ono što treba zapamtiti je to da koristimo formulu (1) za razdoblje u kojem je kamatnjak jednak. Iznos koji dobijemo na kraju tog razdoblja koristimo kao početni iznos kapitala za razdoblje u kojem vrijedi idući kamatnjak i tako dok ne dođemo do kraja. Postupak se zgodno može prikazati tablicom:

C_0	p	r	n	C_n
5000,00	2,5	1,025	1	5125,00
5125,00	2,8	1,028	1	5268,50
5268,50	2,2	1,022	1	5384,41

- U ovom zadatku trebamo naći početni iznos kapitala kojeg treba uložiti da bi na kraju razdoblja imali 100000 kn. Problem je u tome što imamo promjenjivi kamatnjak, pa ne možemo primijeniti formulu (1). Stoga radimo slijedeće: izračunamo koliko bi novaca dobili da štedimo točno jednu kunu, a onda iz tog podatka odredimo koliko treba uložiti da bi na kraju imali traženi iznos. Postupak štednje se može ponovno prikazati tablicom:

C_0	p	r	n	C_n
1	6	1,06	2	1,1236
1,1236	5	1,05	3	1,3007

Dobili smo slijedeći omjer:

$$\begin{aligned} \text{uloženo} & \quad \text{dobiveno} \\ 1 \text{ kn} &= 1,3007 \text{ kn} \\ x \text{ kn} &= 100\,000 \text{ kn} \end{aligned}$$

Ovaj omjer rješavamo tako da podijelimo donju jednakost s gornjom:

$$\frac{x}{1} = \frac{100\,000}{1,3007} \Rightarrow x = 76881,24.$$

Dakle, Mirko mora oročiti 76881,24 kn.

5. U ovom zadatku se srećemo sa relativnim i konformnim kamatnjakom. U svim slučajevima je $C_0 = 15000$ i godišnji kamatnjak $p_G = 6$. Ideja je da nađemo odgovarajući kamatnjak za razdoblje ukamaćivanja i onda primijenimo formulu (1).

- (a) Ovdje je obračun kamata mjesečni i relativan kamatnjak, pa trebamo naći relativni mjesečni kamatnjak. Relativni mjesečni kamatnjak dobijemo iz razmjera:

$$\begin{aligned} 1 \text{ godina (12 mjeseci)} &= \text{kamatnjak } 6 \\ 1 \text{ mjesec} &= \text{kamatnjak } x, \end{aligned}$$

iz kojeg slijedi (podijelimo donju s gornjom jednakosti)

$$\frac{1}{12} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 0,5.$$

Sada je lako primjeniti (1): C_0 znamo, broj razdoblja ukamaćivanja je $n = 15$, a kamatnjak (relativni mjesečni) je $p = 0,5$. Izračunamo $r = 1,005$ pa dobijemo

$$C_n = 2000 \cdot 1,005^{15} = 2155,37.$$

- (b) Ovdje je obračun kamata kvartalni i relativan kamatnjak, pa trebamo naći relativni kvartalni kamatnjak. Relativni kvartalni kamatnjak dobijemo iz razmjera:

$$\begin{aligned} 1 \text{ godina (4 kvartala)} &= \text{kamatnjak } 6 \\ 1 \text{ kvartal} &= \text{kamatnjak } x, \end{aligned}$$

iz kojeg slijedi (podijelimo donju s gornjom jednakosti)

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 1,5.$$

Sada je lako primjeniti (1): C_0 znamo, broj razdoblja ukamaćivanja je $n = 5$ (15 mjeseci = 5 kvartala), a kamatnjak (relativni kvartalni) je $p = 1,5$. Izračunamo $r = 1,005$ pa dobijemo

$$C_n = 2000 \cdot 1,015^5 = 2154,57.$$

- (c) Situacija je slična kao u prošla dva primjera, ali imamo problem da se 15 mjeseci ne može prikazati kao cijeli broj polugodišta. Stoga ćemo izračunati prvo kamate za godinu dana koristeći polugodišnji relativni kamatnjak (koji iznosi 3), a zatim ćemo na to još obračunati kamate za tri mjeseca pomoću kvartalnog kamatnjaka (koji iznosi 1,5).

Konačna vrijednost kapitala nakon prve godine:

$$C_n = 2000 \cdot 1,03^2 = 2121,80,$$

a nakon još tri mjeseca

$$C_n = 2121,80 \cdot 1,015^1 = 2153,63.$$

- (d) Slična situacija kao u prethodnom zadatku, samo ćemo za godinu izračunati sve normalno, a za preostala tri mjeseca ćemo ponovo primjeniti relativni kvartalni kamatnjak. Konačno rješenje je $C_n = 2151,80$.
- (e) Kada je riječ o konformnom kamatnjaku, situacija je puno jednostavnija, odnosno, u ovim slučajevima se konformni kamatnjak uopće ne treba računati. Imamo $C_0 = 2000$, $p = 6$ i $n = 1,25$ (jer je 15 mjeseci jednako godina i jedna četvrtina godine). Izračunamo $r = 1,06$ i uvrstimo u (1):

$$C_n = 2000 \cdot 1,06^{1,25} = 2151,11.$$

6. Da bi Ivica ušao u investiciju potreban mu je početni kapital za kupovinu 2000 €. treba mu $2000 \cdot 7,31 = 14620$ kn. Nakon što je kupio eure, Ivica ih oroči na 6 mjeseci. Nakon isteka tog razdoblja Ivica posjeduje 2021,88 € (prema formuli (1), uz $C_0 = 2000$, $p = 2,2$, $r = 1,022$ i $n = 0,5$). Sada Ivica proda eure i zaradi $2021,88 \cdot 7,65 = 15467,38$ kn.

- (a) Ukupna Ivičina zarada u tih šest mjeseci je iznosila $15467,38 - 14620 = 847,38$ kn, u postocima 5,80%. Dakle, da je Ivica ljetos oročio kune na šest mjeseci, istu zaradu bi imao ako bi polugodišnji kamatnjak bio 5,80, što na godišnjem nivou iznosi 11,93%. Naravno, problem je što Ivica ne može odmah ponoviti istu akciju, nego treba čekati iduće ljeto.
- (b) Sada je Ivica kune stavio na štednju još 6 mjeseci. Nakon tog razdoblja Ivica je imao 15811,57 kn (prema (1), uz $C_0 = 15467,38$, $p = 4,5$, $r = 1,045$ i $n = 0,5$), pa njegova zarada unutar jednogodišnjeg ciklusa iznosi $15811,57 - 14620 = 1191,57$ kn, u postocima 8,15%. Dakle, da je Ivica ljetos oročio kune na godinu dana, istu zaradu bi ostvario ako bi godišnji kamatnjak bio 8,15.

7. Ovdje imamo slučaj višestrukih uplata/isplata, konkretno imamo dvije uplate. Podatke možemo prikazati tablicom:

Broj	Tip	C_0	p	r	n	C_n
1	Uplata	30.000	5	1,05	3	34.728,75
2	Uplata	10.000	5	1,05	2	11.025,00

Kako smo imali dvije uplate, njihove današnje vrijednosti se zbrajaju pa Mirko na računu ima 45.753,75 kn.

8. Ovdje imamo slučaj višestrukih isplata/uplata, ali imamo i jednih i drugih. Situaciju ponovno možemo prikazati tablicom:

Broj	Tip	C_0	p	r	n	C_n
1	Posudba	20.000	10	1,10	4	29.282,00
2	Posudba	15.000	10	1,10	2	18.150,00
3	Povrat	35.000	10	1,10	0,5	36.708,31

Stupac n prikazuje vrijeme u godinama od trenutka transakcije do danas. Konačnu situaciju, odnosno Slavkov dug, dobijemo tako da posudbe zbrojimo, a povrat oduzmemo. Dug je $29.282,00 + 18.150,00 - 36.708,31 = 10.723,69$ kn.

9. Ovo je slučaj periodičnih uplata (formula (2)). Identificiramo parametre: $R = 1500$, $p = 5$, $n = 20$, izračunamo $r = 1,05$, pa primjenom formule (2) dobijemo da je konačni iznos novca

$$1500 \cdot 1,05 \frac{1,05^{20} - 1}{1,05 - 1} = 52.078,88 \text{ €}.$$

10. U ovom zadatku kombiniramo formule (1) i (2). Prvo imamo pet godina periodične uplate, $R = 1000$, $p = 2,5$, $n = 5$ pa primjenom (2) dobijemo da Mirko pet godina nakon prve uplate ima na računu

$$1000 \cdot 1,025 \frac{1,025^5 - 1}{1,025 - 1} = 5.387,84 \text{ €}.$$

Ovo je rješenje dijela a).

Da bi riješili dio b), primijenimo formulu (1) sa $C_0 = 5.387,84$, $n = 3$ i $p = 2,5$ (uzimamo kraj pete godine kao početak, pa je kraj osme godine udaljen za $n = 3$) i dobijemo

$$C_n = 5.387,84 \cdot 1,025^3 = 5.802,00 \text{ €}.$$

Dakle, Mirko ima na kraju osme godine na računu 5.802 € (rješenje pod b)).

Konačno, za rješavanje dijela c) primjenit ćemo ponovo formulu (1), samo što će ovdje parametri biti $C_0 = 802$, $n = 2$ i $p = 2,5$ (jer smo na kraju osme godine podigli 5000 €). Konačno stanje na računu nakon 10 godina od prve uplate će biti

$$C_n = 802 \cdot 1,025^2 = 842,60 \text{ €}.$$

11. Zadatak ćemo riješiti tako da prvo vidimo koliko novaca bi dobili uplaćivanjem 1 kn, a nakon toga ćemo iz razmjera naći pravi iznos uplata. Prema formuli (2) nakon $n = 5$ periodičnih

uplata iznosa $R = 1$ uz godišnji kamatnjak $p = 4$ (odmah vidimo da je $r = 1,04$) imati iznos od

$$1 \cdot 1,04 \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1} = 5,63298^1 \text{ kn.}$$

Sada taj novac ($C_0 = 5,63298$) štedimo još $n = 5$ godina uz isti kamatnjak p (a time i r) i na kraju razdoblja imamo

$$C_n = 5,63298 \cdot 1,04^5 = 6,85338 \text{ kn.}$$

Znači, za uplate od jedne kune dobijamo na kraju 6,85338 kn. Postavimo razmjer:

$$\begin{array}{rcl} \text{uplata} & & \text{dobiveno} \\ 1 \text{ kn} & = & 6,85338 \text{ kn} \\ x \text{ kn} & = & 100\,000 \text{ kn.} \end{array}$$

Podijelimo donju jednakost s gornjom i dobijemo

$$\frac{x}{1} = \frac{100\,000}{6,85338} \Rightarrow x = 14.591,35.$$

Dakle, Mirko mora uplaćivati 14.591,35 kn po ovom modelu da bi na kraju 10 godine imao 100.000 kn.

12. Kao i u prethodnim zadacima i ovdje imamo pomiješane štednju i periodične uplate. Prvo imamo periodične uplate iznosa $R = 2000$ kroz $n = 10$ godina uz kamatnjak $p = 3$ ($r = 1,03$) i njihova konačna vrijednost na kraju 10 godine je

$$2000 \cdot 1,03 \frac{1,03^{10} - 1}{1,03 - 1} = 23.615,59.$$

Taj iznos uzimamo kao početni ($C_0 = 23.615,59$) za štednju koja traje $n = 20$ godina (cijeli model traje 30, a 10 je godina već prošlo) uz isti kamatnjak p (i kamatni koeficijent r) i na kraju 30 godine od početka modela imamo

$$C_n = 23.615,59 \cdot 1,03^{20} = 42.652,38 \text{ €}.$$

Kako osiguravajuće društvo isplaćuje 35.000 €, njegova zarada je 7.652,38 €.

13. Ovdje imamo slučaj odabira najpovoljnije ponude koji ćemo riješiti tako da nađemo vrijednost sve tri ponude u sadašnjem trenutku. Formula koju koristimo je

$$D = \frac{C}{r^n}, \quad (3)$$

gdje je C nominalna vrijednost kapitala za n godina od početnog trenutka, a D njegova diskontirana (vrijednost u početnom trenutku) vrijednost.

Pogledajmo Antinu ponudu. Sve elemente te ponude možemo pregledno zapisati u tablici:

Broj	C	p	r	n	D
1	10.000	6	1,06	0	10.000,00
2	5.000	6	1,06	1,5	4.581,54
Ukupno:					14.581,54

Za drugu uplatu je $n = 1,5$ jer će se ona dogoditi za 18 mjeseci od danas, dakle za godinu i po dana.

Pogledajmo sada Mirkovu ponudu. I nju možemo zapisati tablično:

Broj	C	p	r	n	D
1	5.000	6	1,06	0	5.000,00
2	5.000	6	1,06	1	4.000,00
3	5.000	6	1,06	1,5	4.716,98
Ukupno:					14.298,52

¹Ovdje je potrebno pamtit i veći broj decimala zbog točnosti. Da smo krenuli s početnim iznosom od recimo $R = 100$, mogli bi manje decimala prepisivati, ali bi kasnije imali više problema s rješavanjem omjera.

Vidimo da je Mirkova ponuda lošija od Antine.

Ostala nam je još Slavkova ponuda:

Broj	C	p	r	n	D
1	6.000	6	1,06	0	6.000,00
2	3.000	6	1,06	0,25	2.956,62
3	3.000	6	1,06	0,50	2.913,86
4	3.000	6	1,06	0,75	2.871,72
Ukupno:					14.742,19

Vidimo da je Slavkova ponuda najbolja.

Spomenimo samo da bi u slučaju godišnjeg kamatnjaka 3, vrijednost Antine ponude bila 14.783,15, Mirkove 14.637,52 i Slavkove 14.868,12, pa je Slavkova ponuda ponovo najbolja.

14. Imamo slučaj štednje, a treba naći n . Iz poznatih veličina $C_0 = 1000$, $C_n = 2500$, $p = 7$ ($r = 1,07$) dobijamo jednadžbu

$$2500 = 1000 \cdot 1,07^n \Rightarrow 1,07^n = 2,5.$$

Logaritmiramo zadnju jednadžbu i izračunamo

$$n = \frac{\log 2,5}{\log 1,07} = 13,54,$$

dakle približno 13 i po godina.