

Eksponencijalna i logaritamska funkcija.

1. U ovom zadatku trebamo pojavu opisati eksponencijalnom funkcijom ($y(x) = a \cdot b^x$), što prepoznamo iz izjave *...predviđeno je da rastu po stopi od 3,5% godišnje*. Kod takvih zadataka prvi korak je odrediti godinu za koju je $x = 0$. Najbolje je za nultu godinu proglasiti najmanju godinu u kojoj je poznata vrijednost pojave.

Kako je u ovom zadatku poznata je vrijednost pojave u 2002. godini, tu godinu ćemo uzeti za nultu, tj. $x = 0$ za 2002. godinu.

Vrijednost pojave u nultoj godini je koeficijent a (jer je $y(0) = a \cdot b^0 = a$), dakle $a = 500.000$.

Koeficijent b se određuje na dva načina:

- ili je poznata stopa promjene pa iz nje odredimo b ;
- ili je poznata vrijednost pojave u dvije različite godine, iz čega se može odrediti b .

U ovom zadatku poznata je stopa rasta $s = 3,75\%$ pa je $b = 1 + s = 1 + 0,0375 = 1,0375$. Ovdje smo iskoristili da je $s = 3,75\% = 0,0375$, a kako je riječ o stopi rasta, s smo dodali na 1. Da je bilo riječ o stopi pada, s bi oduzeli od 1.

Sada znamo kako izgleda funkcija koja opisuje izdvajanja za adaptaciju:

$$y(x) = 500.000 \cdot 1,0375^x, \quad x = 0 \text{ za } 2002.$$

Trebamo naći izdvajanja za adaptaciju u 2006. godini. Ako je $x = 0$ za 2002., onda je $x = 4$ za 2006. pa su izdvajanja za adaptaciju u 2006. jednaka

$$y(4) = 500.000 \cdot 1,0375^4 = 579.325,21 \text{ kn.}$$

2. U ovom zadatku imamo pojavu koja svake godine raste za isti iznos pa je stoga opisujemo linearnom funkcijom $y(x) = a + b x$.

I u ovom slučaju prvo je potrebno odrediti nultu godinu, a može se primjeniti ista taktika kao i kod eksponencijalne funkcije: nulta godina je najmanja godina za koju je poznata vrijednost pojave. Dakle, $x = 0$ za 2002. godinu.

Koeficijent a je vrijednost pojave u nultoj godini ($y(0) = a + b \cdot 0 = a$, $a = 500.000$).

Koeficijent b opisuje za koliko raste pojava svake godine. U ovom slučaju pojava (ulaganja za adaptaciju) raste svake godine za 25.000 kn pa je $b = 25.000$.

Funkcija koja u ovom slučaju opisuje ulaganja u adaptaciju je dana sa

$$y(x) = 500.000 + 25.000 \cdot x, \quad x = 0 \text{ za } 2002. \text{ godinu.}$$

Ulaganja za adaptaciju u 2006. godini dobit ćemo kao $y(4)$, jer ako je za 2002. godinu $x = 0$, onda je u 2006. $x = 4$:

$$y(4) = 500.000 + 25.000 \cdot 4 = 600.000 \text{ kn.}$$

3. Zadatak ćemo riješiti na slijedeći način:

- Neka je $U(x)$ novac utrošen u promociju u x -toj godini. Znamo da taj novac raste po stopi od 2% godišnje iz čega zaključujemo da $U(x)$ možemo modelirati eksponencijalnom funkcijom.
- Neka je $x = 0$ za 2003. godinu. Neka je U_0 novac utrošen u promociju u 2003. godini. Dobijemo da je funkcija $U(x)$ opisana sa

$$U(x) = U_0 \cdot 1,02^x, \quad x = 0 \text{ za } 2003. \text{ godinu.}$$

Koeficijent b je 1,02 jer ulaganja rastu po stopi od 2% godišnje.

- Neka je $D(x)$ funkcija koja opisuje ulaganja u promociju na domaćem tržištu. Neka je D_0 iznos ulaganja u promociju na domaćem tržištu u 2003.
- Jer je D_0 20% od U_0 , dobijemo da je $D_0 = \frac{20}{100} U_0 = 0,2 \cdot U_0$.
- Jer se ulaganja u promociju na domaćem tržištu ne mijenjaju, $D(x) = D_0 = 0,2 \cdot U_0$.
- U 2006. godini je u ukupnu promociju uloženo $U(3) = U_0 \cdot 1,02^3 = 1,061208 \cdot U_0$, a u promociju na domaćem tržištu je uloženo $D(3) = D_0 = 0,2 \cdot U_0$.
- Udio novca uloženog u promociju na domaćem tržištu u ukupnoj svoti novca uloženog u promociju u 2006. godini je

$$\frac{D(3)}{U(3)} \cdot 100\% = \frac{0,2 \cdot U_0}{1,061208 \cdot U_0} \cdot 100\% = 18,846\%.$$

U 2006. godini je udio novca utrošenog za promociju na domaćem tržištu u ukupnom iznosu utrošenom za promociju pao na 18,846%.

4. U ovom zadatku imamo da je funkcija ukupnih prihoda ($U(x)$) zbroj dviju funkcija (prihoda na domaćem tržištu, $D(x)$, i prihoda na stranom tržištu, $S(x)$) koje imaju oblik eksponencijalne funkcije.

- Proglasimo ovu godinu za nultu.
- Neka je U_0 ukupni ovogodišnji prihod, a D_0 i S_0 ovogodišnji prihodi na domaćem, odnosno inozemnom tržištu.
- Za prihode na domaćem tržištu vrijedi da je

$$a = D_0 = 20\% \text{ od } U_0 = 0,2 \cdot U_0.$$

Nadalje, $b = 0,99$, jer se predviđa pad prihoda za 1% ($b = 1 - 1/100 = 0,99$). Stoga je

$$D(x) = D_0 \cdot 0,99^x = 0,2 \cdot U_0 \cdot 0,99^x.$$

- Slično, za prihode na stranom tržištu vrijedi da je

$$a = S_0 = 80\% \text{ od } U_0 = 0,8 \cdot U_0,$$

a koeficijent $b = 1,03$, jer se predviđa rast prihoda po stopi od 3% godišnje. Funkcija koja opisuje prihode na stranom tržištu je dana sa

$$S(x) = S_0 \cdot 1,03^x = 0,8 \cdot U_0 \cdot 1,03^x.$$

- Za funkciju koja opisuje ukupne prihode vrijedi

$$U(x) = D(x) + S(x) = 0,2 \cdot U_0 \cdot 0,99^x + 0,8 \cdot U_0 \cdot 1,03^x = U_0 (0,2 \cdot 0,99^x + 0,8 \cdot 1,03^x).$$

- Ukupni prihodi u idućoj godini će biti

$$U(1) = U_0 (0,2 \cdot 0,99^1 + 0,8 \cdot 1,03^1) = 1,022 U_0.$$

Promjena u odnosu na ovu godinu je

$$\frac{1,022 U_0 - U_0}{U_0} \cdot 100\% = 2,2\%,$$

dakle rast prihoda za 2,2%. Analogno, prihodi za dvije godine biti će

$$U(2) = U_0 (0,2 \cdot 0,99^2 + 0,8 \cdot 1,03^2) = 1,04474 U_0,$$

a promjena u odnosu na ovu godinu je rast za 4,474%.

5. Mogu se koristiti uobičajena pravila logaritmiranja, a možete koristiti samo pravilo

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

kojim se svo računanje sa logaritmima može prevesti na računanje po poznatoj bazi (e ili 10, koje se nalaze na kalkulatorima).

$$a) 2, \quad b) -\frac{1}{2}, \quad c) -\frac{1}{2}, \quad d) \frac{1}{2}, \quad e) \frac{1}{4}, \quad f) \frac{2}{3}.$$

6. U ovom zadatku baš treba koristiti formuli za prikaz logaritma u bazi 10 ili e. Mi koristimo logaritma po bazi 10, u oznaci $\log x$.

U zadatku a) postupak je slijedeći:

$$\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{0,954243}{0,60206} = 1,58496.$$

U ostalim zadacima postupak je analogan, stoga samo navodimo rješenja:

$$b) 0,63093, \quad c) -1,48855, \quad d) 2,32193, \quad e) 0,646241, \quad f) 4,19181.$$

7. a) Ako se logaritamska jednačba može zapisati u obliku $a^x = b$, njeno rješenje je

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

$$\text{U ovom zadatku, rješenje je } x = \frac{\log 3,234}{\log 2,54} = 1,25913.$$

- b) Svodimo jednačbu na isti oblik kao u prethodnom zadatku:

$$15 \cdot 1,08^x = 20,14 / : 15 \Rightarrow 1,08^x = \frac{20,14}{15} = 1,34267 / \log \Rightarrow x = \frac{\log 1,34267}{\log 1,08} = 3,82866.$$

- c) Ako je jednačba oblika $a_1 \cdot b_1^x = a_2 \cdot b_2^x$, može je se rješavati na dva načina. Jedan način je da je svedemo na oblik iz zadatka a) koristeći svojstva eksponencijalne funkcije, a drugi način je logaritmiranje cijele jednačbe i primjena svojstava $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ i $\log a^x = x \cdot \log a$. Prije logaritmiranja ima smisla podijeliti jednačbu sa a_1 ili a_2 i na taj način smanjiti broj faktora na kojima se izvodi logaritmiranje.

Prvi način:

$$\begin{aligned} 1,12 \cdot 1,033^x &= 2,11 \cdot 1,01^x / : 1,12 / : 1,01^x \\ \frac{1,033^x}{1,01^x} &= \frac{2,11}{1,12} \\ \left(\frac{1,033}{1,01} \right)^x &= 1,88393 \\ 1,02277^x &= 1,88393, \end{aligned}$$

što je oblik iz zadatka a). Primjenom formule slijedi

$$x = \frac{\log 1,88393}{\log 1,02277} = 28,128.$$

Drugi način:

$$\begin{aligned}
 1,12 \cdot 1,033^x &= 2,11 \cdot 1,01^x / \log \\
 \log(1,12 \cdot 1,033^x) &= \log(2,11 \cdot 1,01^x) \\
 \log 1,12 + \log 1,033^x &= \log 2,11 + \log 1,01^x \\
 \log 1,12 + x \cdot \log 1,033 &= \log 2,11 + x \cdot \log 1,01 \\
 0,049218 + x \cdot 0,0141 &= 0,324282 + x \cdot 0,00432 \\
 0,0097789 \cdot x &= 0,275064 \\
 x &= 28,128
 \end{aligned}$$

Premda se drugi način čini složenijim od prvog, on je nezamjenljiv kod složenijih slučajeva.

- d) Ovdje ćemo koristiti drugi način, a ako se želi koristiti prvi način potrebno je znati da je $a^{-x} = 1/a^x$ te da je $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

$$\begin{aligned}
 2,11 \cdot 1,033^x &= 0,72 \cdot 1,01^{-x} / : 2,11 / \log \\
 \log 1,033^x &= \log \left(\frac{0,72}{2,11} \cdot 1,01^{-x} \right) \\
 x \cdot \log 1,033 &= \log 0,34123 - x \cdot \log 1,01 \\
 x \cdot (0,0141 + 0,00432) &= -0,46695 \\
 x &= -25,3478.
 \end{aligned}$$

- e) Također koristimo drugi način (vidi zadatak c)), a ako se želi koristiti prvi način treba se sjetiti formule $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$.

$$\begin{aligned}
 1,12 \cdot 1,033^x &= 2,11 \cdot 1,01^{2x} / : 1,12 / \log \\
 \log 1,033^x &= \log \left(\frac{2,11}{1,12} \cdot 1,01^{2x} \right) \\
 x \cdot \log 1,033 &= \log 1,88393 + 2x \cdot \log 1,01 \\
 x \cdot (0,0141 - 2 \cdot 0,00432) &= 0,27506 \\
 x &= 50,4005.
 \end{aligned}$$

f) Rješenje:

$$\begin{aligned}
 2,11 \cdot 1,013^{3x} &= 1,02 \cdot 1,21^{-2x} / : 2,11 / \log \\
 \log 1,013^{3x} &= \log \left(\frac{1,02}{2,11} \cdot 1,21^{-2x} \right) \\
 3x \cdot \log 1,013 &= \log 0,48341 - 2x \cdot \log 1,21 \\
 x \cdot (3 \cdot 0,005609 + 2 \cdot 0,082785) &= -0,31568 \\
 x &= -1,73072.
 \end{aligned}$$

8. Pojavu (BDP regije A) modeliramo eksponencijalnom funkcijom $y(x) = a \cdot b^x$.

- *BDP regije A je iznosio 2003. godine 180 milijardi:* stavit ćemo $x = 0$ za 2003. godinu. Iz toga slijedi da je $a = 180$.
- *... BDP će rasti po stopi od 3,2 % godišnje:* slijedi da je $b = 1 + 3,2/100 = 1,032$.
- BDP regije A je opisan funkcijom $y(x) = 180 \cdot 1,032^x$, $x = 0$ za 2003. godinu.
- *... u kojoj godini će BDP dosegnuti 220 milijardi:* treba riješiti jednadžbu $y(x) = 220$:

$$y(x) = 220 \Rightarrow 180 \cdot 1,032^x = 220 / : 180 \Rightarrow 1,032^x = \frac{11}{9} / \log \Rightarrow x = \frac{\log(11/9)}{\log 1,032} = 6,37.$$

- U 2010. godini (sedmoj godini od nulte) će BDP regije A premašiti 220 milijardi.
9. Opet je riječ o modeliranju pojave eksponencijalnom funkcijom, samo što ovog puta treba odrediti stopu rasta.

- *BDP regije A je iznosio 2003. godine 180 milijardi:* stavit ćemo $x = 0$ za 2003. godinu. Iz toga slijedi da je $a = 180$.
- *... želimo da u 2010. dosegne 240 milijardi:* 2010. godina je za 7 godina udaljena od nulte iz čega slijedi da tražimo takav b da je $y(7) = 240$.
- Iskoristimo čemu bi bio jednak $y(7)$ prema modelu eksponencijalne funkcije ($y(7) = a \cdot b^7$) i to izjednačimo sa zadanom vrijednosti (240). Dobije se jednačba iz koje odredimo b :

$$240 = 180 \cdot b^7 \Rightarrow b^7 = \frac{240}{180} \Rightarrow b = \sqrt[7]{\frac{4}{3}} = 1,04195.$$

- Kada znamo b , lako odredimo stopu rasta s :

$$s = (b - 1) \cdot 100\% = 4,195\%.$$

BDP regije A treba rasti po stopi od 4,195% ako želimo da u 2010. dosegne 240 milijardi.

10. Ovdje treba modelirati funkciju koja je zadana sa dvije formule.

- Neka je P porez. Funkcija P ovisi o dohotku D .
- Za dohodak manji od 1500, nema poreza: $P(D) = 0$, za $D < 1500$.
- Na dohodak veći od 1500 (a to je $D - 1500$) plaća se porez od 20%: $P(D) = 0,2 \cdot (D - 1500)$, za $D \geq 1500$.
- Plaću (W) definiramo kao razliku dohotka i poreza: $W(D) = D - P(D)$. Ako uvažimo definicije poreza za različite dohotke dobijemo

$$W(D) = \begin{cases} D, & D < 1500; \\ D - 0,2 \cdot (D - 1500), & D \geq 1500. \end{cases} = \begin{cases} D, & D < 1500; \\ 0,8 \cdot D + 300, & D \geq 1500. \end{cases}$$

11. Ovdje je situacija slična onoj iz prethodnog zadatka, samo što treba razlikovati tri slučaja. Ponovo će P označavati porez, D dohodak, a W plaću.

- Za dohodak manji od 1000 nema poreza: $P(D) = 0$ za $D < 1000$ pa je $W(D) = D$.
- Na dohodak između 1000 i 3000 plaća se porez od 15%:

$$P(D) = 0,15 \cdot (D - 1000) = 0,15 \cdot D - 150 \Rightarrow W(D) = D - (0,15 \cdot D - 150) = 0,85 \cdot D + 150, \\ \text{za } 1000 \leq D < 3000.$$

- Na dohodak iznad 3000 plaća se porez od 30%: Ovdje treba biti oprezan. Naime, potpuna analogija sa prethodnim slučajem bi vodila prema izrazu $P(D) = 0,3 \cdot (D - 3000)$, za $D \geq 3000$, ali to je pogrešno jer je na iznos dohotka između 1000 i 3000 plaćen porez od 15%. Stoga je prava formula u ovom slučaju

$$P(D) = 0,3 \cdot (D - 3000) + 300, \text{ za } D \geq 3000.$$

Pri tome smo iskoristili da je 300 petnaest posto od $3000 - 1000 = 2000$. Plaća je opisana izrazom

$$W(D) = D - (0,3 \cdot (D - 3000) + 300) = 0,7 \cdot D + 600, \text{ za } D \geq 3000.$$

- Ako skupimo sve zajedno dobijemo

$$W(D) = \begin{cases} D, & D < 1000; \\ 0,85 \cdot D + 150, & 1000 \leq D < 3000 \\ 0,7 \cdot D + 600, & D \geq 3000. \end{cases}$$

12. Zadani dohotci se uvrste u formulu za plaće u državi A, odnosno državi B. Dobije se

Dohodak	Plaća (A)	Plaća (B)
1200 AJ	1200 AJ	1170 AJ
2500 AJ	2300 AJ	2275 AJ
3500 AJ	3100 AJ	3050 AJ

Analizom grafova koji pokazuju ovisnost plaća o dohotku, dobije se da su za isti događaj plaće uvijek veće u državi A (odnosno, porezi u državi A su uvijek manji).

13. Pojava P se opisuje sa dvije formule, a obje formule predstavljaju oblik eksponencijalne funkcije. Same formule je lako naći, jedini problem predstavlja određivanje trenutka T u kojem se s jedne formule prelazi na drugu.

- Prva formula opisuje razvoj pojave od početne vrijednosti 100 ($a = 100$) do trenutka T . Pojava raste po stopi od 5% pa je $b = 1,05$. Prva formula glasi

$$y_1(x) = 100 \cdot 1,05^x.$$

- Prva formula vrijedi dok je vrijednost manja od 300. Trenutak u kojem prva formula prestaje vrijediti određujemo iz jednadžbe

$$y_1(x) = 300 \Rightarrow 100 \cdot 1,05^x = 300 \Rightarrow 1,05^x = 3 \Rightarrow x = 22,517.$$

- Za $x \geq 22,517$ vrijedi druga formula. Znamo da za $x = 22,517$ pojava ima vrijednost 300 te da pada za 1%, iz čega slijedi $b = 0,99$. Zapis druge formule je

$$y_2(x) = 300 \cdot 0,99^{x-22,517}.$$

Ovakav način zapisa je odabran zato jer se jasno vidi kolika je vrijednost pojave u trenutku prijelaza (za $x = 22,517$).

- Razvoj pojave P opisan je funkcijom

$$P(x) = \begin{cases} 100 \cdot 1,05^x, & x < 22,517; \\ 300 \cdot 0,99^{x-22,517}, & x \geq 22,517. \end{cases}$$

- Vrijednosti koje treba izračunati su $P(1) = 105$, $P(4) = 121,551$, $P(10) = 162,889$, $P(20) = 265,33$ i $P(30) = 278,266$.

14. Postupak u ovom zadatku se ne razlikuje od postupka u prethodnom, samo što sada obje formule opisuju eksponencijalne funkcije koje rastu.

- Početna vrijednost je 200 ($a = 100$) do trenutka T . Pojava raste po stopi od 3% pa je $b = 1,03$. Prva formula glasi

$$y_1(x) = 200 \cdot 1,03^x.$$

- Tražimo u kojem trenutku prva formula dostiže vrijednost 300:

$$y_1(x) = 300 \Rightarrow 200 \cdot 1,03^x = 300 \Rightarrow 1,03^x = 1,5 \Rightarrow x = 13,717.$$

- Za $x \geq 13,717$ vrijedi druga formula. Znamo da za $x = 13,717$ pojava ima vrijednost 300 te da raste za 1%, iz čega slijedi $b = 1,01$. Zapis druge formule je

$$y_2(x) = 300 \cdot 1,01^{x-13,717}.$$

- Razvoj pojave R opisan je funkcijom

$$R(x) = \begin{cases} 200 \cdot 1,03^x, & x < 13,717; \\ 300 \cdot 1,01^{x-13,717}, & x \geq 13,717. \end{cases}$$

- Vrijednosti koje treba izračunati su $R(1) = 206$, $R(4) = 225,101$, $R(10) = 268,783$ i $R(20) = 319,353$.