

Skupovi.

1. Rješenja su:

- (a) $\{x \in \mathbf{R} : x > 27\}$.
 (b) $\{x \in \mathbf{R} : 8 < x \leq 15\}$.

2. Rješenja:

- a) Laž b) Laž c) Istina
 d) Laž e) Istina f) Istina

3. Traženi skupovi su:

- a) $A \cup B = \{2, 4, 6, 7\}$ b) $B \cap C = \{2, 6\}$ c) $D \cap B \cap A = \{2\}$
 d) $A \cup C = \{2, 4, 6\}$ e) $B \cap D = \{2\}$ f) $C \cup A \cup D = \{2, 4, 6\}$

4. Skupovi A i B su definirani sa $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ i $B = \{3, 5, 9, 15, 19\}$.

Traženi skupovi su $A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 19\}$, $A \cap B = \{3, 9, 15\}$, $A \setminus B = \{6, 12, 18\}$ i $B \setminus A = \{5, 19\}$.

U skupu C se nalaze svi realni brojevi veći ili jednaki od 2,3 i manji od 12 pa je

$$A \cap C = \{3, 6, 9\}, \quad C \cap B = \{3, 5, 9\}, \quad A \setminus C = \{12, 15, 18\} \quad \text{i} \quad B \setminus C = \{15, 19\}.$$

5. Traženi skupovi su

- $A \times B = \{(2, 7), (2, 4), (2, 6), (4, 7), (4, 4), (4, 6), (6, 7), (6, 4), (6, 6)\}$.
- $B \times A = \{(7, 2), (4, 2), (6, 2), (7, 4), (4, 4), (6, 4), (7, 6), (4, 6), (6, 6)\}$.
- $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$.

Funkcije.

1. Uvjeti su da je $P > 0$ i da je $Q_d(P) \geq 0$. Iz drugog uvjeta slijedi

$$Q_d(P) \geq 0 \Rightarrow 12 - 2P \geq 0 \Rightarrow P \leq 6.$$

Domena funkcije $Q_d(P)$ je skup $\{P \in \mathbf{R} : 0 < P \leq 6\}$.

2. Kod funkcije $Q_s(P)$ uvjeti su $P > 0$ i $Q_s(P) > 0$. Iz drugog uvjeta se dobije

$$Q_s(P) \geq 0 \Rightarrow -4 + 3P \geq 0 \Rightarrow P \geq 4/3.$$

Domenu funkcije čine svi $P \in \mathbf{R}$ koji su istovremeno i veći od 0 i veći od $4/3$, dakle oni veći od $4/3$ (jer su istovremeno i veći od 0). Skupovni zapis domene je $\{P \in \mathbf{R} : P \geq 4/3\}$.

3. Vrijednost funkcije $f(x)$ u nekoj točki t se računa tako da zamijenimo x sa t .

a) $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $g(2) = 3 + 2^2 = 7$, $h(3) = 4$ (potpuno u redu!) pa je

$$f(1) + g(2) - h(3) = 1 + 7 - 4 = 4.$$

b) $f(3) = 5$, $g(3) = 11$, $h(3) = 4$ pa je $f(3) - g(3)h(3) = -39$.

c) $f(2) = 3$, $g(-1) = 3 + 2^{-1} = 3 + 1/2 = 3,5$, $h(0) = 4$ pa je

$$\frac{f(2) + g(-1)}{h(0)} = \frac{3 + 3,5}{4} = \frac{6,5}{4} = 1,625.$$

4. U ovom zadatku je potrebno naći kompoziciju funkcija. Ideja pri računanju je da se kreće “iznutra”, od prve funkcije koja se može izračunati.

a) Treba izračunati $f(g(2))$. Prvo se izračuna $g(2) = 7$, a nakon toga $f(7) = 13$. Dakle, $f(g(2)) = 13$.

b) Isti postupak: $g(\underbrace{h(3)}_{=4}) = g(4) = 19$.

c) $h(\underbrace{g(3)}_{=11}) = h(11) = 4$.

d) $f(\underbrace{g(1)}_{=5}) - h(\underbrace{f(1)}_{=1}) = f(5) - h(1) = 9 - 4 = 5$.

e) Postupak je isti premda ovdje imamo kompoziciju tri funkcije:

$$g(\underbrace{h(\underbrace{f(4)}_{=7})}_{=4}) = g(h(7)) = g(4) = 19.$$

f) $h(\underbrace{f(\underbrace{g(3)}_{=11})}_{=21}) = h(f(11)) = h(21) = 4$.

5. Uvjet ...*funkcija za $x = 2$ poprima vrijednost 5* se matematički zapisuje kao $f(2) = 5$, a kada uvrstimo čemu je jednako $f(x)$ (opći oblik) dobijemo $a + 2b = 5$. To je prva jednačica.

Na analogan način dobijemo jednačicu $a + 7b = 15$ iz uvjeta ...*za $x = 7$ (funkcija) poprima vrijednost 15*.

Dobili smo sustav jednačica

$$\begin{array}{rcl} a + 2b & = & 5 \\ a + 7b & = & 15 \end{array}$$

koji ima rješenja $a = 1$ i $b = 2$. Tražena funkcija je oblika $f(x) = 1 + 2x$.

6. Parametri linearne funkcije su brojevi 20 i 0,2. Njihovo značenje je:

- 20 - predstavlja potrošnju vode ukoliko u hotelu nema turista ($x = 0$);
- 0,2 - predstavlja veličinu za koju se poveća potrošnja vode dolaskom jednog novog turista (0,2=200 litara).

7. Parametri linearne funkcije su -15 i 0,32. Njihovo značenje je:

- -15 - ukoliko nema noćenja ($x = 0$), dobit je -15, tj. u gubitku smo;
- 0,32 - predstavlja veličinu za koju se poveća dobit s jednim ostvarenim noćenjem.

8. Prvo izračunamo y_1, y_2 i y_3 : $y_1 = f(x_1) = a \cdot b^{x_1}$, $y_2 = f(x_2) = a \cdot b^{x_2}$ i $y_3 = f(x_3) = a \cdot b^{x_3}$. Sada izračunamo y_2/y_1 :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a \cdot b^{x_2}}{a \cdot b^{x_1}} = \frac{b^{x_2}}{b^{x_1}} = b^{x_2 - x_1}.$$

Analogno,

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{a \cdot b^{x_3}}{a \cdot b^{x_2}} = \frac{b^{x_3}}{b^{x_2}} = b^{x_3 - x_2}.$$

Jer je $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$ vidimo da vrijedi $y_2/y_1 = y_3/y_2$.

9. Poznati podaci su

- Godina 2001., BDP=163, $x_1 = ?$
- Godina 2002., BDP=176, $x_2 = ?$

Koje ćemo brojeve staviti za x_1 i x_2 je zapravo svejedno, sve dok je razmak između njih jednak 1. Zato je najbolje staviti da je $x_1 = 0$, a $x_2 = 1$. Na taj način dobijamo jednačbe

- $y(0) = a \cdot b^0 = a$, a kako je $y(0) = 163$ slijedi $a = 163$.
- $y(1) = a \cdot b^1 = a \cdot b$, a kako je $y(1) = 176$ i $a = 163$ slijedi $b = 176/163 = 1,0797$.

Tumačenje: $a = 163$ je vrijednost pojave (BDPa) na početku (za $x = 0$, tj u 2001. godini), a broj $(b - 1) \cdot 100\% = (1,0797 - 1) \cdot 100\% = 7,97\%$ predstavlja stopu rasta BDPa.