

Jednadžbe. Sustavi linearnih jednadžbi.

1. Rješenja jednadžbi su:

$$\text{a) } x = 10, \text{ b) } x = -7, \text{ c) } x = 2, \text{ d) } x = \frac{1}{13}, \text{ e) } x = -\frac{11}{7}, \text{ f) } x = -\frac{2}{5}.$$

2. y izražen u ovisnosti o x :

$$\text{a) } y = \frac{42 - 3x}{2}, \quad \text{b) } y = \frac{3x + 10}{3}, \quad \text{c) } y = 6x - 11,$$

$$\text{d) } y = \frac{1 + x}{14}, \quad \text{e) } y = \frac{7x + 14}{3}, \quad \text{f) } y = \frac{1 - 5x}{2}.$$

3. Sustave jednadžbi možemo rješavati na (barem) dva različita načina:

- Iz jedne jednadžbe izrazimo ovisnost jedne nepoznanice o drugoj i tu ovisnost uvrstimo u drugu jednadžbu.
- Metodom eliminacija varijabli (Gaussova metoda).

Druga metoda je lakša za generalizaciju, odnosno rješavanje sustava s više od dvije nepoznanice, ali kako ćemo mi pretežno rješavati sustave s dvije jednadžbe može se koristiti i prva metoda, ovisno o postavci zadatka. U ovom zadatku je (načelno) bolje koristiti drugu metodu, ali može se koristiti i prva.

U metodi eliminacije ideja je namjestiti da koeficijenti uz jednu nepoznanicu u obje jednadžbe budu međusobno suprotni pa zbrajanjem jednadžbi gubimo jednu nepoznanicu. Takav odnos koeficijenata najlakše je dobiti tako da prvu jednadžbu pomnožimo koeficijentom uz odabranu nepoznanicu iz druge jednadžbe, a drugu jednadžbu pomnožimo koeficijentom uz odabranu nepoznanicu iz prve jednadžbe, ali suprotnog predznaka.

- a) Odaberimo x za nepoznanicu koju ćemo poništiti. Koeficijent uz x u prvoj jednadžbi je 1, a u drugoj 3 pa stoga množimo prvu jednadžbu sa 3, a drugu sa -1 (suprotni koeficijent!):

$$\begin{array}{rcl} x + 2y = 15 & / \cdot 3 & \\ 3x - y = 3 & / \cdot (-1) & \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3x + 6y = 45 & & \\ -3x + y = -3 & & \end{array}$$

Zbrojimo jednadžbe: $7y = 42 \Rightarrow y = 6$. Nepoznanicu x odredimo uvrštavanjem $y = 6$ bilo u prvu, bilo u drugu jednadžbu. Npr. ako uvrstimo $y = 6$ u prvu jednadžbu dobijemo

$$x + 2 \cdot 6 = 15 \Rightarrow x = 3.$$

Na kraju je uvijek dobro provjeriti rješenje uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za x i y u početne jednadžbe (obje!).

Ako se ova jednadžba želi riješiti prvom metodom, onda postupak može biti slijedeći:

- Iz prve jednadžbe odredimo x u ovisnosti o y : $x = 15 - 2y$.
- To što smo dobili uvrstimo umjesto x u drugu jednadžbu. Dobijemo jednadžbu koja ovisi o samo jednoj varijabli, y :

$$3 \cdot (15 - 2y) - y = 3 \Rightarrow 45 - 6y - y = 3 \Rightarrow 45 - 7y = 3.$$

Tu jednadžbu riješimo: $y = 6$.

- Uvrstimo dobivenu vrijednost za y u izraz koji opisuje ovisnost nepoznanice x o y : $x = 15 - 2 \cdot 6 = 3$.

b) Ponovo koristimo metodu eliminacija, a ovog puta eliminiramo varijablu y :

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y = 15 & / \cdot (-2) & \Rightarrow -4x - 6y = -30 \\ 3x - 2y = 3 & / \cdot (-3) & \Rightarrow -9x + 6y = -9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ + \end{array} \Rightarrow -13x = -39 \Rightarrow x = 3.$$

Uvrštavanjem u neku od početnih jednadžbi dobije se da je $y = 3$.

c) $x = 30, y = 20$.

d) $x = 3, y = -2$.

4. Račun za potrošenu električnu energiju se izračunava po formuli

$$\text{račun} = \text{cijena za 1 kW} \times \text{utrošak u kW} + \text{paušal}.$$

Želimo naći u kojem mjesecu je bio veći utrošak električne energije, a poznata nam je cijena za 1 kW, iznos paušala i račun u pojedinom mjesecu.

U prvom mjesecu je cijena 0,20 kn, paušal je 15 kn, a ukupan račun je 120 kn. Kada te podatke uvrstimo u formulu za izračun računa dobijemo (x - potrošnja u kW)

$$0,20x + 15 = 120 \Rightarrow x = 525.$$

U drugom mjesecu je cijena 0,22 kn (10% veća nego u prethodnom mjesecu), paušal je opet 15 kn, a ukupan račun je 125 kn. Utrošak izračunamo na isti način kao i za prethodni mjesec:

$$0,22x + 15 = 125 \Rightarrow x = 500.$$

Dakle, veći utrošak je bio u prvom mjesecu.

5. Označimo sa F cijenu fotokopiranja, a sa T cijenu slanja telefaksa.

- Cijena slanja telefaksa je 6 puta veća od cijene fotokopiranja: $\Rightarrow T = 6F$.
- ... poslao 4 telefaksa i napravio 12 fotokopija i za to su mu naplatili 7 kn i 20 lipa:
 $\Rightarrow 4T + 12F = 7,20$.

Sustav se najlakše riješi tako da izraz $T = 6F$ uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$4T + 12F = 7,20 \Rightarrow 4 \cdot 6F + 12F = 7,20 \Rightarrow F = 0,20.$$

Cijena slanja telefaksa je šest puta veća od cijene fotokopiranja i iznosi 1,20 kn.

6. Označimo sa F broj studentica, a sa M broj studenata u grupi.

- ... u grupi je 60% studentica: Ukupan broj svih studenata je $M + F$. Studentice čine 60% od ukupnog broja:

$$F = 60\% \text{ od svih} = \frac{60}{100}(M + F) = 0,6 \cdot (M + F).$$

- ... u grupi ima 52 studentice više nego studenata: $\Rightarrow F = M + 52$.

Uvrstimo drugu jednadžbu u prvu:

$$\underbrace{M + 52}_F = 0,6 \cdot (M + \underbrace{M + 52}_F) \Rightarrow M + 52 = 0,6 \cdot (2M + 52) \Rightarrow$$

$$M + 52 = 1,2M + 31,2 \Rightarrow -0,2M = -20,8 \Rightarrow M = 104.$$

Studentica ima $F = 104 + 52 = 156$.

Napomena: zadatak se mogao riješiti i na druge načine. Ovdje su samo napuci za dva moguća načina.

- Pomoću omjera: 60% svih su studentice, 40% su studenti pa vrijedi $\frac{F}{M} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$.
- Pomoću postotaka: 60% svih su studentice, 40% su studenti pa razlika broja studentica i studenata (a to je 52) čini 20% ukupnog broja studenata.

7. Označimo sa A cijenu CDa marke A i sa B cijenu CDa marke B .

- ... 5 CDa marke A i 4 CDa marke B i platio ih 34,30 kn: $\Rightarrow 5A + 4B = 34,30$.
- ... dva CDa marke A i jedan CD marke B koje je platio 11,20 kn: $\Rightarrow 2A + B = 11,20$.

Dobili smo sustav

$$\begin{array}{rcl} 5A + & 4B & = 34,30 \\ 2A + & B & = 11,20 \end{array}$$

kojeg ćemo riješiti metodom eliminacija. Eliminirat ćemo napoznanicu y jer su koeficijenti uz nju nešto jednostavniji:

$$\begin{array}{rcl} 5A + & 4B & = 34,30 \quad / \cdot 1 \\ 2A + & B & = 11,20 \quad / \cdot (-4) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 5A + & 4B & = 34,30 \\ -8A - & 4B & = -44,80 \end{array} \quad / + \Rightarrow -3A = -10,50 \Rightarrow A = 3,50.$$

Uvrštavanjem u neku jednačbu (bolje drugu) dobije se da je $B = 4,20$.

8. Označimo sa I broj kilometara koje je vozio Ivica, a sa J i M broj kilometara koji su vozili Jure i Mate.

- ... Jure je vozio 50% više nego Ivica: $J = I + 50\%$ od $I = I + 0,5 I = 1,5 I$.
- ... Mate je vozio dvostruko više od Ivice: $M = 2 I$.
- ... od Zagreba do Splita je 405 km: $I + J + M = 405$.

Uvrstimo li prve dvije jednačbe u treću dobijemo

$$405 = I + J + M = I + 1,5 I + 2 I = 4,5 I \Rightarrow I = 405/4,5 = 90.$$

Kad znamo koliko je kilometara vozio Ivica, lako je izračunati koliko je kilometara vozio Jure (koristeći prvu jednačbu): $J = 1,5 I = 135$.

9. Neka je S broj utrošenih omotnica standardne veličine, a $A5$ i $A4$ broj utrošenih omotnica veličine $A5$ i $A4$.

- U jednom danu ured je potrošio 135 omotnica : $S + A4 + A5 = 135$.
- ... ured je potrošio dvostruko više omotnica veličine $A5$ nego $A4$: $A5 = 2 \times A4$.
- ... ured je potrošio 20 omotnica standardne veličine više nego veličine $A5$: $S = 20 + A5$.

Cilj je sve nepoznanice (S , $A5$ i $A4$) izraziti preko jedne od njih. U ovom slučaju je najbolje sve izraziti preko $A5$. Ovisnost S o $A5$ je dana u trećoj jednačbi, a ovisnost $A4$ o $A5$ se lako dobije iz druge jednačbe, $A4 = A5/2$. Uvrstimo li to sve u prvu jednačbu dobijemo

$$135 = \underbrace{A5 + 20}_S + \underbrace{A5/2}_{A4} + A5 \Rightarrow 115 = A5 + A5/2 + A5 = 2,5A5 \Rightarrow A5 = 115/2,5 = 46.$$

Kada znamo koliko se potrošilo omotnica veličine $A5$, lako odredimo koliko je omotnica veličine $A4$ potrošio ured: $A4 = A5/2 = 23$.

10. Neka je K cijena kilograma krušaka, a J cijena kilograma jabuka.

- Kilogram krušaka košta 6 kuna više od kilograma jabuka.: $K = J + 6$.
- ... 3 kilograma jabuka i 2 kilograma krušaka koštaju 52 kune.: $3J + 2K = 52$.

Uvrstimo prvu jednadžbu u drugu:

$$3J + 2 \underbrace{(J + 6)}_K = 52 \Rightarrow 3J + 2J + 12 = 52 \Rightarrow J = 8.$$

Cijena kilograma krušaka je $K = 14$.