Statistika za biologe

Julije Jakšetić

PMF-Matematički odjel, Zagreb

18. listopad 2006.

Medijan

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Formula

Medijan:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} i,$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N suma svih frekvencija, $\sum f_1$ suma frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, te i je širina medijalnog razreda.

- $N = 50$

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Formula

Medijan:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} i,$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N suma svih frekvencija, $\sum f_1$ suma frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, te i je širina medijalnog razreda.

- $N = 50$
- $L_1 = 340$

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Formula

Medijan:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} i,$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N suma svih frekvencija, $\sum f_1$ suma frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, te i je širina medijalnog razreda.

- $N = 50$
- $L_1 = 340$
- $\sum f_1 = 19$

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Formula

Medijan:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} i,$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N suma svih frekvencija, $\sum f_1$ suma frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, te i je širina medijalnog razreda.

- $N = 50$
- $L_1 = 340$
- $\sum f_1 = 19$
- $f_{med} = 12$

Medijan

Zadatak

Za zadatak s cipelama odredite medijan.

Formula

Medijan:

$$Med = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} i,$$

gdje je L_1 donja granica medijalnog razreda, N suma svih frekvencija, $\sum f_1$ suma frekvencija do medijalnog razreda, f_{med} frekvencija medijalnog razreda, te i je širina medijalnog razreda.

- $N = 50$
- $L_1 = 340$
- $\sum f_1 = 19$
- $f_{med} = 12$
- $i = 50$

Prema tome $Med = 340 + \frac{25-19}{12} 50 = 365.$

Primjeri elementarnih događaja

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te sa B događaj koji označava da je na kocki pao neparan broj.

Primjeri elementarnih događaja

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te sa B događaj koji označava da je na kocki pao neparan broj.

Najprije $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo dalje elemente od A i od B :

Primjeri elementarnih događaja

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te sa B događaj koji označava da je na kocki pao neparan broj.

Najprije $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo dalje elemente od A i od B :
$A = \{2, 4, 6\}$,

Primjeri elementarnih događaja

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te sa B događaj koji označava da je na kocki pao neparan broj.

Najprije $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo dalje elemente od A i od B :
$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

Primjeri elementarnih događaja

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te sa B događaj koji označava da je na kocki pao neparan broj.

Najprije $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo dalje elemente od A i od B :
$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

VAŽNO

Uočite da je $B = A^c = \Omega \backslash A$

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje A, B, $A \cap B, A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \cup B$.

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje A, B, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje $A,\ B,\ A \cap B, A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,
- $B = \{3, 6\}$

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje $A,\ B,\ A \cap B, A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,
- $B = \{3, 6\}$
- $A \cap B = \{6\} = \{\text{"}\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ i sa } 3\text{"}\}$

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje $A,\ B,\ A \cap B, A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,
- $B = \{3, 6\}$
- $A \cap B = \{6\} = \{\text{"}\mathit{brojevi\ djeljivi\ sa}\ 2\ \mathit{i\ sa}\ 3\text{"}\}$
- $A \backslash B = \{2, 4\} = \{\text{"}\mathit{brojevi\ djeljivi\ sa}\ 2\ \mathit{ali\ ne\ sa}\ 3\text{"}\}$

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje $A,\ B,\ A \cap B, A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,
- $B = \{3, 6\}$
- $A \cap B = \{6\} = \{"\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ i sa } 3"\}$
- $A \backslash B = \{2, 4\} = \{"\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ ali ne sa } 3"\}$
- $B \backslash A = \{3\} = \{"\textit{brojevi djeljivi sa } 3 \textit{ ali ne sa } 2"\}$

Primjer

Bacamo simetričnu kocku. Označimo s A događaj koji označava da je na kocki pao paran broj, te neka je B događaj koji označava da je na kocki pao broj djeljiv s 3.

Ponovno je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ispišimo sada redom događaje $A,\ B,\ A \cap B, A \backslash B,\ B \backslash A,\ A \cup B$.

- $A = \{2, 4, 6\}$,
- $B = \{3, 6\}$
- $A \cap B = \{6\} = \{\text{"}\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ i sa } 3\text{"}\}$
- $A \backslash B = \{2, 4\} = \{\text{"}\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ ali ne sa } 3\text{"}\}$
- $B \backslash A = \{3\} = \{\text{"}\textit{brojevi djeljivi sa } 3 \textit{ ali ne sa } 2\text{"}\}$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} = \{\text{"}\textit{brojevi djeljivi sa } 2 \textit{ ili sa } 3\text{"}\}$.

Zadatci

Zadatak

Za prethodni primjer odredite vjerojatnosti $P(A)$, $P(A^c)$, $P(A \cup B)$.

Rj. $P(A) = \frac{broj\ \ povoljnih\ \ ishoda}{broj\ \ mogucih\ \ ishoda} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

Zadatci

Zadatak

Za prethodni primjer odredite vjerojatnosti $P(A)$, $P(A^c)$, $P(A \cup B)$.

Rj. $P(A) = \frac{broj\ \ povoljnih\ \ ishoda}{broj\ \ mogucih\ \ ishoda} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Zadatci

Zadatak

Za prethodni primjer odredite vjerojatnosti $P(A)$, $P(A^c)$, $P(A \cup B)$.

Rj. $P(A) = \frac{broj\ \ povoljnih\ \ ishoda}{broj\ \ mogucih\ \ ishoda} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Slično je $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Zadatci

Zadatak

Za prethodni primjer odredite vjerojatnosti $P(A)$, $P(A^c)$, $P(A \cup B)$.

Rj. $P(A) = \frac{broj\ \ povoljnih\ \ ishoda}{broj\ \ mogucih\ \ ishoda} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Slično je $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.Možemo i ovako: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Zadatci

Zadatak

Za prethodni primjer odredite vjerojatnosti $P(A)$, $P(A^c)$, $P(A \cup B)$.

Rj. $P(A) = \frac{broj\ \ povoljnih\ \ ishoda}{broj\ \ mogucih\ \ ishoda} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Slično je $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.Možemo i ovako: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Zadatak

U skladištu se nalazi 7 tv-prijemnika u kutijama, od čega su 3 s greškom. Na sreću odabiremo jednu kutiju. Odredite vjerojatnost da smo odabrali ispravan tv-prijemnik.

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \dots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \dots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik"

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \ldots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik" $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} = 0.571$

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \ldots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik" $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} = 0.571$

Zadatak

U skladištu se nalazi 7 tv-prijemnika u kutijama, od čega su 3 s greškom. Na sreću odabiremo dvije kutije. Odredite vjerojatnost:

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \dots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \dots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik" $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} = 0.571$

Zadatak

U skladištu se nalazi 7 tv-prijemnika u kutijama, od čega su 3 s greškom. Na sreću odabiremo dvije kutije. Odredite vjerojatnost:

(a) *oba tv-prijemnika su ispravna*

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \ldots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik" $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} = 0.571$

Zadatak

U skladištu se nalazi 7 tv-prijemnika u kutijama, od čega su 3 s greškom. Na sreću odabiremo dvije kutije. Odredite vjerojatnost:

(a) *oba tv-prijemnika su ispravna*

(b) *jedan je ispravan a drugi neispravan*

Rj. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$, gdje su $t_1, t_2, \ldots, t_7$ svi prijemnici u skladištu. Označimo s $A =$"odabran je ispravan tv-prijemnik" $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7} = 0.571$

Zadatak

U skladištu se nalazi 7 tv-prijemnika u kutijama, od čega su 3 s greškom. Na sreću odabiremo dvije kutije. Odredite vjerojatnost:

(a) *oba tv-prijemnika su ispravna*

(b) *jedan je ispravan a drugi neispravan*

(c) *oba su neispravna.*

Rj.

Rj. Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

Rj.Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

Rj.Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

(b) $B =$"jedan tv-prijemnik je ispravan a drugi neispravan"$\Rightarrow$

Rj.Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

(b) $B =$"jedan tv-prijemnik je ispravan a drugi neispravan"$\Rightarrow$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}.$$

Rj. Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

(b) $B =$"jedan tv-prijemnik je ispravan a drugi neispravan"$\Rightarrow$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}.$$

(c) $C =$"oba tv-prijemnika su neispravna"

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}.$$

Rj. Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

(b) $B =$"jedan tv-prijemnik je ispravan a drugi neispravan" $\Rightarrow$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}.$$

(c) $C =$"oba tv-prijemnika su neispravna"

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}.$$

Uočite: $P(C) = 1 - P(A) - P(B)$.

Rj.Označimo sa $S = \{t_1, t_2, \dots, t_7\}$ sve tv-prijemnike u skladištu. Tada prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 2 iz skupa S, ima ih $\binom{7}{2} = 21$.

(a) $A =$"oba tv-prijemnika su ispravna" $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

(b) $B =$"jedan tv-prijemnik je ispravan a drugi neispravan"$\Rightarrow$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}.$$

(c) $C =$"oba tv-prijemnika su neispravna"

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}.$$

$\boxed{\text{Uočite:}P(C) = 1 - P(A) - P(B).\text{Zašto?}}$

Odgovor: Zato jer je $A \cup B \cup C = \Omega$ i jer je $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$.

Zadatak

Student je izašao na ispit znajući odgovore na 25 od mogućih 30 pitanja. Profesor je postavio 3 pitanja jedno za drugim. Kolika je vjerojatnost da student zna odgovore na sva 3 pitanja?

Rj.

Rj.Označimo sa $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_{30}\}$ sva pitanja koja profesor postavlja. Budući da će profesor postaviti 3 pitanja, prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 3 iz skupa S. Tih kombinacija ima $\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$.

Rj.Označimo sa $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_{30}\}$ sva pitanja koja profesor postavlja. Budući da će profesor postaviti 3 pitanja, prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 3 iz skupa S. Tih kombinacija ima
$\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060.$
$A =$ {"na sva tri pitanja student zna odgovor"}

Rj.Označimo sa $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_{30}\}$ sva pitanja koja profesor postavlja. Budući da će profesor postaviti 3 pitanja, prostor elementarnih događaja Ω čine kombinacije duljine 3 iz skupa S. Tih kombinacija ima $\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$.
$A =$\{"na sva tri pitanja student zna odgovor"\} $\Rightarrow$

$$P(A) = \frac{\binom{25}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{115}{203} = 0.57.$$

Zadatak

Igramo Loto 6/45. *Kolika je vjerojatnost da*

(a) *dobijemo "šesticu"*

Zadatak

Igramo Loto 6/45. Kolika je vjerojatnost da

(a) *dobijemo "šesticu"*

(b) *dobijemo "peticu?"*

Rezultat. (a) $\frac{\binom{6}{6}}{\binom{45}{6}}$ (b) $\frac{\binom{6}{5}\binom{39}{1}}{\binom{45}{6}}$

Zadatak

U kutiji se nalaze 2 bijele i 3 crne kuglice.

(a) *Iz kutije najprije izvlačimo jednu kuglicu, vratimo je u kutiju i zatim izvlačimo još jednu kuglicu. Kolika je vjerojatost da je prva bijela, a druga crna kuglica?*

Zadatak

U kutiji se nalaze 2 bijele i 3 crne kuglice.

(a) *Iz kutije najprije izvlačimo jednu kuglicu, vratimo je u kutiju i zatim izvlačimo još jednu kuglicu. Kolika je vjerojatost da je prva bijela, a druga crna kuglica?*

(b) *Iz kutije najprije izvlačimo jednu kuglicu, stavimo je sa strane, i iz kutije zatim izvlačimo još jednu kuglicu. Kolika je vjerojatost da je prva bijela, a druga crna kuglica?*

Zadatak

U kutiji se nalaze 2 bijele i 3 crne kuglice.

(a) *Iz kutije najprije izvlačimo jednu kuglicu, vratimo je u kutiju i zatim izvlačimo još jednu kuglicu. Kolika je vjerojatost da je prva bijela, a druga crna kuglica?*

(b) *Iz kutije najprije izvlačimo jednu kuglicu, stavimo je sa strane, i iz kutije zatim izvlačimo još jednu kuglicu. Kolika je vjerojatost da je prva bijela, a druga crna kuglica?*

Rješenje. (a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ (b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

Uvjetna vjerojatnost

Formula: ako je $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$ slučajno je izabran jedan broj. Ako je poznato da je broj djeljiv s 3, kolika je vjerojatnost da je veci od 5?

Rješenje. Označimo $A = \{$"broj je djeljiv s 3" $\} = \{3, 6, 9\}$,
$B = \{$"broj je veći od 5" $\} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

Uvjetna vjerojatnost

Formula: ako je $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$ slučajno je izabran jedan broj. Ako je poznato da je broj djeljiv s 3, kolika je vjerojatnost da je veci od 5?

Rješenje. Označimo $A = \{\text{"broj je djeljiv s 3"}\} = \{3, 6, 9\}$,
$B = \{\text{"broj je veći od 5"}\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow$
$A \cap B = \{6, 9\}$.

Uvjetna vjerojatnost

Formula: ako je $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$ slučajno je izabran jedan broj. Ako je poznato da je broj djeljiv s 3, kolika je vjerojatnost da je veci od 5?

Rješenje. Označimo $A = \{$"broj je djeljiv s 3" $\} = \{3, 6, 9\}$,
$B = \{$"broj je veći od 5" $\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow$
$A \cap B = \{6, 9\}$. Dakle, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$, $P(A) = \frac{3}{10}$

Uvjetna vjerojatnost

Formula: ako je $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 10\}$ slučajno je izabran jedan broj. Ako je poznato da je broj djeljiv s 3, kolika je vjerojatnost da je veci od 5?

Rješenje. Označimo $A = \{\text{"broj je djeljiv s 3"}\} = \{3, 6, 9\}$,
$B = \{\text{"broj je veći od 5"}\} = \{6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow$
$A \cap B = \{6, 9\}$. Dakle, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$, $P(A) = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B|A) = \frac{2}{3}$.

Nezavisnost: Za dva događaje A i B kažemo da su nezavisni ako je

$$P(B|A) = P(B) \text{ tj. } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadatak

Neka je $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. *Da li su* A *i* B *nezavisni ako je*

(a) *Ako je* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ *?*

Nezavisnost: Za dva događaje A i B kažemo da su nezavisni ako je

$$P(B|A) = P(B) \text{ } tj. \text{ } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadatak

Neka je $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. *Da li su* A *i* B *nezavisni ako je*

(a) *Ako je* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$?

(b) *Ako je* $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$?

Nezavisnost: Za dva događaje A i B kažemo da su nezavisni ako je

$$P(B|A) = P(B) \text{ tj. } P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadatak

Neka je $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. *Da li su* A *i* B *nezavisni ako je*

(a) *Ako je* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$?

(b) *Ako je* $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$?

VAŽNO

Ako su događaji A i B nezavisni, onda su i A^c i B^c također nezavisni tj.

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

Zadatak

Vjerojatnost da 60-godišnjak neće doživjeti svoj 61 rođendan iznosi 0,09. Kolika je vjerojatnost

(a) *Da dva 60-godišnjaka dožive svoj 61 rođendan?*

Zadatak

Vjerojatnost da 60-godišnjak neće doživjeti svoj 61 rođendan iznosi 0,09. Kolika je vjerojatnost

(a) *Da dva 60-godišnjaka dožive svoj 61 rođendan?*

(b) *Da će bar jedan od dva 60-godišnjaka doživjeti svoj 61 rođendan?*

Zadatak

Vjerojatnost da 60-godišnjak neće doživjeti svoj 61 rođendan iznosi 0,09. Kolika je vjerojatnost

(a) *Da dva 60-godišnjaka dožive svoj 61 rođendan?*

(b) *Da će bar jedan od dva 60-godišnjaka doživjeti svoj 61 rođendan?*

Zadatak

Vjerojatnost da 60-godišnjak neće doživjeti svoj 61 rođendan iznosi 0,09. Kolika je vjerojatnost

(a) *Da dva 60-godišnjaka dožive svoj 61 rođendan?*

(b) *Da će bar jedan od dva 60-godišnjaka doživjeti svoj 61 rođendan?*

Rješenje. (a) 0,0081 (b)0,1719

Formula potpune vjerojatnosti: Ako se Ω može zapisati kao unija poskupova $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji su disjunktni, tada za svaki događaj A vrijedi:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ *slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da drugi izbrani broj bude neparan?*

Zadatak

Iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ slučajno se bira jedan broj, a iz preostalog skupa još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da drugi izbrani broj bude neparan?

Rješenje. $\frac{3}{5} = 0.6$

Bayesova formula: Ako se Ω može zapisati kao unija poskupova $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji su disjunktni, tada za svaki događaj A vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Zadatak

Trgovina nabavlja traperice od dva proizvođača P_1 i P_2. P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost:

(a) *da slučajno odabrane traperice imaju grešku ?*

Bayesova formula: Ako se Ω može zapisati kao unija poskupova $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji su disjunktni, tada za svaki događaj A vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Zadatak

Trgovina nabavlja traperice od dva proizvođača P_1 i P_2. P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost:

(a) *da slučajno odabrane traperice imaju grešku ?*

(b) *da su slučajno odabrane traperice, koje imaju grešku, od proizvođača P_1?*

Bayesova formula: Ako se Ω može zapisati kao unija poskupova $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji su disjunktni, tada za svaki događaj A vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Zadatak

Trgovina nabavlja traperice od dva proizvođača P_1 i P_2. P_1 doprema 1000 komada, od čega 5% s greškom, a P_2 700 komada od čega 2% s greškom. Kolika je vjerojatnost:

(a) *da slučajno odabrane traperice imaju grešku ?*

(b) *da su slučajno odabrane traperice, koje imaju grešku, od proizvođača P_1?*

Rješenje. (a) $\frac{16}{425}$ (b) $\frac{425}{544}$

Diskretne slučajne varijable

Zadatak

Neka je X slučajna varijabla koja ima razdiobu

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & a & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Zadatak

(a) *odredite parametar a*

Zadatak

(a) *odredite parametar a*

(b) *odredite* $P(X \geq 1)$

Zadatak

(a) *odredite parametar a*

(b) *odredite* $P(X \geq 1)$

(c) $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) *očekivanje od* X, $E[X]$

(e) *varijancu od* X, $Var(X)$

(f) *standardnu devijaciju od* X, σ_X

Zadatak

Pri prijavi ispita studomatom, vjerojatnost neprijavljivanja ispita(uslijed greške kompjutera) iznosi 0.01. Kolika je vjerojatnost da pri prijavi 6 ispita, barem dva puta nam nije prijavljen ispit.

Zadatak

Pri prijavi ispita studomatom, vjerojatnost neprijavljivanja ispita(uslijed greške kompjutera) iznosi 0.01. Kolika je vjerojatnost da pri prijavi 6 ispita, barem dva puta nam nije prijavljen ispit.Koliki je očekivani broj neprijavljenih ispita pri 20 prijava?

Zadatak

Zajednički zakon razdiobe slučajnih varijabli X i Y je dan sa

$X \setminus Y$	2	4
1	0.1	0.2
3	0.2	0.3
5	0	0.2

(a) *odredite razdiobu od X i Y*

Zadatak

Zajednički zakon razdiobe slučajnih varijabli X i Y je dan sa

$X \setminus Y$	2	4
1	0.1	0.2
3	0.2	0.3
5	0	0.2

(a) *odredite razdiobu od X i Y*

(b) *da li su X i Y nezavisne slučajne varijable*

Zadatak

Zajednički zakon razdiobe slučajnih varijabli X i Y je dan sa

$X \setminus Y$	2	4
1	0.1	0.2
3	0.2	0.3
5	0	0.2

(a) *odredite razdiobu od X i Y*

(b) *da li su X i Y nezavisne slučajne varijable*

(c) *odredite $E[X]$ i $E[Y]$*

(d) *odredite kovarijancu $cov(X, Y)$*

(e) *odredite $corr(X, Y)$*

Zadatak

Kupci dolaze u trgovinu. Poznato je da je prosječan broj kupaca koji se pojave u trgovini unutar 1 sata 3 kupca. Neka X označava slučajan broj kupaca koji dođu u trgovinu unutar 1 sata. Ako X ima Poissonovu razdiobu odredite vjerojatnost da se pojavilo bar troje kupaca unutar 1 sata.