PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

23.10.2006.

Vrijeme trajanja ispita: 120 minuta
Ukupan broj bodova: 80
Broj zadataka: 7
Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora i *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Iznos gubitka, X, za izvjestan tip police osiguranja, ima Pareto distribuciju s funkcijom gustoće $f(x)$, gdje je

$$f(x) = \frac{3 \times 500^3}{(500+x)^4} \qquad (x > 0)\,.$$

Franšiza u iznosu 200 se primjenjuje na sve police.

(i) Izračunajte očekivani iznos štete koji će osiguravajuće društvo isplatiti. [5]

(ii) Komentirajte razliku između vašeg odgovora na (i) i očekivanog iznosa gubitka, $\mathbb{E}[X]$. [3]

[Ukupno bodova 8]

2. Štete za određeni osiguravateljski portfelj dolaze po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Iznosi šteta $(X_i)_{i\geq 1}$ su nezavisni i jednako distribuirani s razdiobom koja je koncentrirana na skupu $\{1, \ldots, M\}$ za neki $M \geq 2$ prirodan broj. Tj. vrijedi

$$P(X_i = k) = p_k, \quad k = 1, \ldots, M$$

za neke $p_i \geq 0$, takve da $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$. Premije pristižu neprekidno po konstantnoj stopi s dodatkom za premiju $\theta > 0$.

(a) Definirajte koeficijent prilagodbe R. [2]

(b) Definirajte proces rizika i vjerojatnost propasti $\psi(u)$ uz početni višak $u > 0$. [3]

(c) Koristeći nejednakost $Me^{Rx} \leq xe^{RM} + M - x,\ 0 \leq x \leq M$ dokažite

$$\frac{1}{M} \ln(1+\theta) < R.$$

[5]

(d) Pokažite da vrijedi

$$R < \frac{2\theta E X_1}{E X_1^2}.$$

[5]

(e) Ako je $\theta = 0.2$, a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = 0.5$ dajte gornju i donju granicu za R, te gornju ogradu za vjerojatnost nesolventnosti. [5]

[Ukupno 20 bodova]

3. Svaka od m nezavisnih polica ima vjerojatnost θ, $0 < \theta < 1$ da će prijaviti jednu štetu tokom godine, odn. vjerojatnost $1-\theta$ da neće prijaviti niti jednu štetu. Poznato je i da θ ima apriori razdiobu s funkcijom gustoće

$$f(\theta) \propto (\theta(1-\theta))^{\beta-1} ,$$

za neku konstantu $\beta > 0$. Neka slučajna varijabla X modelira broj prijavljenih šteta u jednoj godini, te neka su nam poznata opažanja $x_1, \ldots, x_n$ koje možemo smatrati brojevima šteta u prethodnih n godina.

(i) Odredite aposteriori razdiobu od θ uz dano $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. [3]

(ii) Nadjite uobičajeni procjenitelj $g(\mathbf{x})$ za parametar θ metodom maksimalne vjerodostojnosti (ignorirajući apriori informaciju dakle). [3]

(iii) Nađite Bayesovski procjenitelj (uz funkciju kvadratnog gubitka) za θ i prikažite ga u obliku

$$zg(\mathbf{x}) + (1-z)\mu$$

gdje broj μ ovisi o parametru β apriori razdiobe. [4]

(iv) Komentirajte ovisnost Bayesovskog procjenitelja o n i β. [2]

[Ukupno 12 bodova]

4. Sustav bonusa za osiguranje motornih vozila predvidja tri kategorije popusta, 0%, 30% i 50%. Puna godišnja premija je 200 EUR.
Ako nije prijavljena šteta tokom godine, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo, ili ostaje na 50%. Ako je prijavljena jedna ili više šteta, osiguranik se pomiče na sljedeći niži nivo popusta, ili ostaje na 0%. Vjerojatnost da osiguranik ima nezgodu u jednoj godini je 0.05, a vjerojatnost više od jedne nezgode je zanemariva.
U slučaju nezgode, prirodni logaritam štete ima $N(\mu, \sigma^2)$ distribuciju s parametrima $\mu = 5$ i $\sigma^2 = 0.75$. U slučaju nezgode će osiguranik prijaviti štetu samo ako je šteta veća od ukupnih dodatnih premija koje bi se trebale platiti kroz beskonačni vremenski horizont, uz pretpostavku da neće biti daljnjih nezgoda.

(i) Odredite prijelaznu matricu Markovljevog lanca $X_1, X_2, \ldots$ gdje je X_n nivo popusta na početku godine n. [7]

(ii) Za osiguranika koji plaća punu premiju uz 30% popusta tekuće godine, izračunajte očekivanu premiju na početku sljedeće godine. [5]

[Ukupno 12 bodova]

5. Pojedinačne štete u određenom portfelju osiguravateljske kuće imaju lognormalnu razdiobu s očekivanjem 264 i standardnom devijacijom 346. Osiguranici imaju ugovorenu franšizu u iznosu 100.

(i) Izračunajte očekivani iznos pojedinačne štete koji pokriva osiguravatelj.

[5]

(ii) Sljedeće godine štete će se uvećati za 10%, a osiguravatelj će pokrivati štete samo do iznosa 1000, dok ugovorena franšiza ostaje ista. Koliki je sada očekivani iznos pojedinačne štete koji pokriva osiguravatelj. [5]

[Ukupno 10 bodova]

6. Tablica 1 pokazuje priraste isplata šteta, u uzastopnim godinama za određeni tip neživotnog osiguranja. Svi iznosi su u tisućama kuna i pretpostavlja se da su sve štete potpuno riješene do kraja 3. razvojne godine.

Prirasti isplata šteta

Godina nastanka štete	**Razvojna godina**			
	0	**1**	**2**	**3**
2003	1000	700	600	350
2004	1500	950	700	
2005	1450	1450		
2006	1700			

Table 1:

(i) Pretpostavimo da su godišnje stope inflacije šteta kroz 12 mjeseci sve do sredine dane godine kao što slijedi:

2004	7.0%
2005	6.0%
2006	6.0%

Formirajte tablicu prirasta isplata šteta u cijenama sredinom 2006. godine (tj. nakon prilagodbe za inflaciju u proteklom razdoblju). [3]

(ii) Upotrebom metode ulančanih ljestvica prilagođene za inflaciju izračunajte razvojne faktore za procjenu neriješenih šteta. [5]

(iii) Izračunajte procijenjenu pričuvu na kraju 2006. godine. Zanemarite inflaciju u budućem razdoblju. [4]

[Ukupno 12 bodova]

7. U okviru generaliziranog linearnog modela slučajne varijable $Z_1, \ldots, Z_n$ imaju binomnu razdiobu s parametrima n i μ, $0 < \mu < 1$.

(i) Pokažite da se razdioba slučajnih varijabli $Y_i = Z_i/n$ može napisati u obliku eksponencijalne familije distribucija. [2]

(ii) Nađite prirodni parametar, kanonsku funkciju veze i funkciju varijance ove eksponencijalne familije. [4]

[Ukupno 6 bodova]