ISPIT
AKTUARSKA MATEMATIKA II

10.9.2018.

Dozvoljeno je korištenje džepnog kalkulatora, dvije A4 stranice rukom pisanih formula, tablica normalne i χ^2 razdiobe, te *Formulae and Tables for Actuarial Examinations.*

---

1. Prepostavite da pojedinačni iznos štete X u nekom portfelju ima eksponencijalnu distribuciju odn. vrijedi $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ za sve $x > 0$ i neki parametar $\lambda > 0$.

(i) Pretpostavite da se primjenjuje franšiza u iznosu $u > 0$, te da šteta X premašuje franšizu, odredite vjerojatnost da će iznos kojim osiguravatelj pokriva ovu štetu biti veći od 100, tj. $P(X - u > 100 \mid X > u)$. [6]

(ii) Za $\lambda = 1/200$ izračunajte ukupni očekivani iznos štete koji će osig. društvo isplatiti ako broj šteta u promatranom razdoblju ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\eta = 1000$, a na svaku se primjenjuje franšiza u iznosu $u = 100$. [6]

[Ukupno 12 bodova]

① $X \sim Exp(\lambda)$

i) $X - u \mid X > u \sim Exp(\lambda)$ zbog zaboravljivosti

$\Rightarrow P(X-u > 100 \mid X > u) = P(X > 100) = e^{-\lambda 100}$

(ii) $\lambda = 1/200$
$N \sim Poi(1000)$
$u = 100$ franš.

$S = \sum_{i=1}^{N} (X_i - u)_+ , \quad X_i \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

$\Rightarrow ES = EN \cdot E(X_i - u)_+ = EN \cdot E\left((X_i - u) \cdot 1_{X_i > u}\right)$

$= 1000 \; E(X_i - u \mid X_i > u) \cdot P(X_i > u) = 1000 \cdot 200 \cdot e^{-1/2}$

$= 121\,306.13$

2. Sustav bonusa za osiguranje motornih vozila predvidja tri kategorije popusta, 0%, 20% i 40%. Puna godišnja premija je 200 EUR.
Ako nije prijavljena šteta tokom godine, osiguranik se pomiče na sljedeći viši nivo, ili ostaje na 40%. Ako je prijavljena jedna ili više šteta, osiguranik se pomiče na sljedeći niži nivo popusta, ili ostaje na 0%. Vjerojatnost da osiguranik ima nezgodu u jednoj godini je 0.05, a vjerojatnost više od jedne nezgode je zanemariva.
U slučaju nezgode, iznosi pojedinačnih šteta X_i zadovoljavaju

$$P(X_i > x) = \frac{\kappa^3}{(\kappa + x)^3} \qquad (x > 0)\,.$$

U slučaju nezgode će osiguranik prijaviti štetu samo ako je šteta veća od ukupnih dodatnih premija koje bi se trebale platiti kroz beskonačni vremenski horizont, uz pretpostavku da neće biti daljnjih nezgoda.

(i) Za $\kappa = 200$ odredite prijelaznu matricu Markovljevog lanca $X_1, X_2, \ldots$ gdje je X_n nivo popusta na početku godine n. [6]

(ii) Za osiguranika koji plaća premiju uz 20% popusta tekuće godine, izračunajte očekivanu premiju na početku sljedeće godine uz ovaj isti κ. [6]

[Ukupno 12 bodova]

② X_i: 0 1 2

0 20 40 %

$pr(X_i)$ 200 160 120

vj št. 0.05

$X_i \sim \text{Pareto}(\mathcal{K}, 3)$

0| prj | 200 160 120 . . . .
ne prj. | 160 120 120 . . .

80

1| prj. | 200 160 120 . . .
ne prj. | 120 120 120 . . .

120

2| prj | 160 120 120 . . .
ne prj | 120 120 120 . . .

40

h) per state

0) $0.05 \cdot P(X > 80) = 0.05 \cdot \left(\frac{200}{280}\right)^3 = 0.384 \cdot 0.05$
$= 0.018$

1) $0.05 \quad P(X > 120) = 0.05 \cdot \left(\frac{200}{320}\right)^3 = 0.012$

2) $0.05 \cdot P(X > 40) = 0.05 \cdot \left(\frac{200}{240}\right)^3 = 0.029$

i)

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.018 & 0.982 & 0 \\ 0.012 & 0 & 0.988 \\ 0 & 0.029 & 0.971 \end{pmatrix} \end{array}$$

ii) $E(\text{prem}(X_1) \mid X_0 = 1)$

$$= 0.012 \cdot 200 + 0.988 \cdot 120$$

$$= \ldots$$

3. Vremena pristizanja šteta slijede Poissonov proces s intenzitetom $\lambda = 4$ štete dnevno. Iznosi pojedinačnih šteta su nezavisni s gustoćom:

$$f(x) = 4xe^{-2x} \quad (x > 0)\,,$$

a osiguratelj naplaćuje premije neprekidno uz dodatak na premiju $\theta > 0$.

(i) Izvedite jednadžbu za koeficijent prilagodbe za ovaj konkretan proces rizika. [6]

(ii) Izračunajte koeficijent prilagodbe ako je $\theta = 0.2$. [5]

(iii) Preko Lundbergove nejednakosti odredite gornju ogradu za vjerojatnost krajnje propasti ako je početni kapital u portfelju $u > 0$. [4]

[Ukupno 15 bodova]

- $X_i \sim \Gamma(2,2)$, $\mu = EX_i = 2/2 = 1$
- ϑ

i) $m_X(\xi) = 1 + (1+\vartheta)\cdot\mu\cdot\xi = 1 + (1+\vartheta)\xi \quad / \cdot (2-\xi)^2$

$\overset{\shortparallel}{E e^{\xi X}} = \left(\frac{2}{2-\xi}\right)^2 , \quad \xi < 2$

$4 = (2-\xi)^2 \cdot (1 + (1+\vartheta)\xi)$ jdiba za koef. pril.

ii) $\vartheta = 0.2$

$$4 = (4 - 4\zeta + \zeta^2)(1 + 1.2\zeta) \quad \ldots$$

$$0 = \zeta \cdot (1.2\zeta^2 - 3.8\zeta + 0.8)$$

$\zeta_0 = 0$ ✓ $\quad \zeta_{1/2} = \begin{array}{l} 0.227 \\ \cancel{2.9333} \end{array} \longleftarrow \quad \zeta > 0$

iii) $\psi(u) = \text{v.pmp.} \leq e^{-\zeta u} = e^{-0.227 \cdot u}$ ✓

4. Broj elektronskih poruka koji svaki dan primi student aktuarstva ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem λ, gdje je iz prethodnog iskustva apriorna distribucija od λ eksponencijalna s očekivanjem μ. Student ima podatke $x_1, \ldots, x_n$, gdje je x_i broj poruka pristiglih dana i, $i = 1, \ldots, n$.

(i) Izvedite aposteriornu distribuciju od λ. [6]

(ii) Pokažite da se Bayesovska procjena od λ uz kvadratni gubitak može napisati u obliku procjene povjerenjem, te navedite faktor povjerenja. [5]

(iii) Ako je $\mu = 33$ i student primi ukupno 406 poruka u 10 dana, izračunajte Bayesovsku procjenu za λ uz kvadratni gubitak. [5]

[Ukupno 16 bodova]

$X_i \sim Poi(\lambda)$ ug. ua λ

$\lambda \sim Exp(1/\mu)$; $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

i) $f(\underline{x}|\lambda) = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda}$

$$f(\lambda|\underline{x}) \propto f(\underline{x}|\lambda) \cdot \pi(\lambda) = \lambda^{\sum_1^n x_i} \cdot e^{-\lambda \cdot n} \cdot e^{-\frac{1}{\mu} \cdot \lambda}$$

$$= \lambda^{\sum_1^n x_i} \cdot e^{-\lambda \cdot (n + \frac{1}{\mu})} \sim \Gamma\left(\sum_1^n x_i + 1, n + \frac{1}{\mu}\right)$$

aposteriori rnd.

ii) bay. proj.

$$E_{f(\cdot|x)} \lambda = \frac{\sum_1^n x_i + 1}{n + 1/\mu}$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n + \frac{1}{\mu}}}_{= z} \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}_{= \bar{x}} + \underbrace{\frac{1/\mu}{n + 1/\mu}}_{= 1-z} \mu \quad \checkmark$$

iii) $\mu = 33$,
$\sum_1^{10} x_i = 406$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ $E_{f(\cdot|x)} \lambda = \frac{406 + 1}{10 + 33} = 9.46\bar{5}$

5. Pretpostavimo da broj prijavljenih šteta u kasko osiguranju želimo dovesti u vezu s vozačkim iskustvom i spolom osiguranika. Pretpostavimo sljedeći stohastički model, broj prijavljenih šteta, u oznaci Y, je cjelobrojna slučajna varijabla s Poissonovom razdiobom čiji parametar ovisi o vozačkom iskustvu i spolu osiguranika, tj. o linearnom prediktoru

$$\alpha_0 + \beta_1 \text{voz.iskustvo} + \beta_2 \mathbb{I}_{\{\text{Spol} = \check{\text{Z}}\}}.$$

preko kanonske funkcije veze (tj. $g = \log$). Pretpostavite da želimo testirati utjecaj kovarijata te da smo na osnovi podataka o n polica dobili sljedeće rezultate

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev
1			799	1401.57
voz.iskustvo	1	283.20	798	1118.37
as.factor(Spol)	1	66.87	797	1051.50

(i) Ima li ijedna kovarijata statistički značajan utjecaj na odziv Y u ovom modelu uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$. [7]

(ii) Pretpostavite da su procjenjeni

$$\hat{\alpha}_0 = -1.67,\ \hat{\beta}_1 = -0.03,\ \hat{\beta}_2 = -0.14\,.$$

Odredite procjenu za očekivani broj šteta za osobu muškog spola s 20 godina vozačkog iskustva. [6]

(iii) Na kojem broju polica je provedena ova analiza. [2]

[Ukupno 15 bodova]

i) $y_i \sim Poi(e^{\eta_i})$, $Ey_i = e^{\eta_i} = \mu_i$

$\eta_i = \alpha_0 + \beta_1 \cdot$ voz.isk $+ \beta_2 \cdot 1_{spol=ž}$

$g(t) = \log t \Rightarrow g^{-1}(y) = e^y$

poč. model $\beta_1 = \beta_2 = 0$

$\alpha = 0.05$

$\chi^2_{0.95} = 3{,}84$

- voz. isk. razl. dev. $283.20 > 3.84$ odb. $H_0: \beta_1 = 0$ ✓
- spol. razl. dev. $66.87 > 3.84$ odb. $H_0: \beta_2 = 0$ ✓

$\rightarrow$ obje bitne značajke. su statist. zn.

ii) $\hat{\mu} = (\widehat{Ey}) = e^{-1.67 - 0.03 \cdot 20} = e^{-2.27}$

$= 0.1..$

iii) br. polica y_i 800

6. Pretpostavlja se da portfelj od 1000 polica osiguranja motornih vozila ima sljedeće karakteristike: broj šteta po svakoj polici ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = 1$, a distribucija individualnog iznosa štete nakon svake nezgode je lognormalna s parametrima $\mu = 4$ i $\sigma = 2$. (Dakle ukupna šteta u svakoj polici ima složenu Poissonovu distribuciju.) Rizici raznih polica su međusobno nezavisni. Označimo sa S ukupni iznos šteta u portfelju.

(i) Izračunajte $\mathbb{E}[S]$ i $\mathrm{Var}[S]$. [5]

(ii) Kolika je vjerojatnost da iznos pojedinačne štete iz portfelja bude veći od 425? [5]

(iii) Upotrebom normalne aproksimacije izrazite približno $\mathbb{P}(S > 425\,000)$ koristeći funkciju distribucije Φ standardne normalne razdiobe. [5]

[Ukupno 15 bodova]

$n = 1000$, $N_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda = 1$, $i = 1, \dots, 1000$

$X_{ij} \sim LN(4, 2^2)$, $EX_{ij} = e^{\mu + \sigma^2/2} = e^6 \approx 403.43$ ✓

$\mathrm{Var}\, X_{ij} = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1) \approx 8\,723\,355 \dots$ ✓

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}, \qquad ES_i = EN_i \cdot EX_{ij}$$

i) $ES = n \cdot ES_i = \underline{1000 \cdot 1 \cdot e^6}$ ✓

$\mathrm{Var}\, S = n \cdot \mathrm{Var}\, S_i = \underline{1000 \cdot e^{16}}$

$\mathrm{Var}\, S_i = EN_i \cdot EX_{11}^2 = 1 \cdot (\mathrm{Var}\, X_{11} + (EX_{11})^2) = e^{16}$

ii) $$P(X > 425) = P(\log X > \log 425)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\log X - 4}{2}}_{\sim N(0,1)} > \frac{6.052 - 4}{2} \right) = 1 - \Phi(1.026) = 0.1515$$

iii) $$P(S > 425\,000) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} > \frac{425000 - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \right)$$

$$\overset{CLT}{\approx} N(0,1)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{425000 - 403430}{\sqrt{1000} \cdot e^{8}} \right) \approx 0.409$$

(1)

7. Donje tablice pokazuju kumulativne iznose nastalih šteta i broj šteta prijavljen svake godine za izvjesnu grupu polica osiguranja. Pretpostavlja se da su štete u potpunosti riješene do kraja razvojne godine 2.

Kumulativni iznosi nastalih šteta

		RG		
		0	1	2
	0	707	1218	1976
GNŠ	1	1288	1852	
	2	1290		

Broj prijavljenih šteta svake godine

		RG		
		0	1	2
	0	104	75	52
GNŠ	1	155	110	
	2	270		

Ako je ukupni isplaćeni iznos do danas, s obzirom na godine nastanka štete 0, 1 i 2, bio 5700, izračunajte potrebnu pričuvu upotrebom metode prosječnog troška po šteti, zanemarujući inflaciju. [Ukupno 15 bodova] kum br. štetan

(2) → GNŠ

pr. trošak po šteti

RG

	0	1	2	kanjiji
0	104 45.02%	179 77.49%	231	231
1	155 45.32%	265 77.45%	.	342
2	270 45.17%	.	.	538

←

GNŠ

RG

	0	1	2	kanjiji
0	6.738	6.804 79.54%	8.554	8.554
1	8.310	6.989 79.54%	.	8.783
2	4.778 87.02%		.	5.490

procjena ukupnih [illegible]

$$231 \cdot 8.554 + 342 \cdot 8.787 + 558 \cdot 5.490 = 8264$$

$$-\ 5700$$

pričuva $\qquad 2564$