PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu
Poslijediplomski stručni studij aktuarske matematike

ISPIT

AKTUARSKA MATEMATIKA II

23. 10. 2006.

Rješenja

1.

(i)

$$\mathbb{E}[X - 200 \,|\, X > 200] = \frac{\int_{200}^{\infty} (x-200) f(x)\, dx}{\mathbb{P}(X > 200)}$$

$$\begin{aligned}
\int_{200}^{\infty} x \frac{3\lambda^3}{(\lambda+x)^4}\, dx &= \left[-x \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^3 \right]_{200}^{\infty} + \int_{200}^{\infty} \frac{\lambda^3}{(\lambda+x)^3}\, dy \\
&= 200 \left(\frac{500}{700} \right)^3 + \left[-\frac{\lambda^3}{2(\lambda+x)^2} \right]_{200}^{\infty} \\
&= 200 \times \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \frac{500^3}{2 \times 700^2}
\end{aligned}$$

S druge strane

$$P(X > 200) = \left(\frac{5}{7} \right)^3$$

Zato je očekivana isplata (kada do nje dodje)

$$\mathbb{E}[X - 200 \,|\, X > 200] = 350.$$

(ii) $\mathbb{E}[X] = \frac{500}{2} = 250$. Očekivani iznos štete raste zbog teškog repa distribucije.

2.

(a) Neka je $\mu = EX_1$ srednja veličina štete.

Tada je koeficijent prilagodbe R pozitivno rješenje od $M(r) = 1 + (1 + \theta)\mu r$.

(b) Višak u trenutku t je $U(t) = u + (1+\theta)\lambda\mu t - S(t)$ gdje je $S(t)$ ukupna šteta u trenutku t.

Proces rizika ili viška je $\{U(t) : t > 0\}$.

Vjerojatnost propasti s početnim viškom u je $\psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ za neki } t, 0 < t < \infty)$.

(c) Iz $Me^{Rx} \leq xe^{RM} + M - x,\ 0 \leq x \leq M$ slijedi

$$\begin{aligned} 1 + (1+\theta)\mu R &\leq \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{M}e^{RM} + \frac{M - X_1}{M}\right) \\ &= \frac{\mu}{M}e^{RM} + \frac{M-\mu}{M} \end{aligned}$$

Množenjem s M i sredjivanjem dobijemo

$$1 + \theta \leq \frac{e^{RM} - 1}{RM} < e^{RM}.$$

Tražena nejednakost slijedi logaritmiranjem.

(d) Jasno je

$$1 + EX_1R + \frac{1}{2}E(X_1^2R^2) < e^{RX_1} = 1 + (1+\theta)EX_1\, R\,,$$

a odavde odmah slijedi

$$R < \frac{2\theta\mu}{EX_1^2}$$

(e) Lundbergova nejednakost kaže $\psi(u) \leq \exp\{-Ru\}$. Pa gornju ogradu dobijemo iz

$$\psi(u) \leq \exp\left(-\frac{1}{M}\ln(1+\theta)u\right) = (1.2)^{-u/2} = e^{-0.0911u}.$$

Ograde na R su $0.0911 < R < 0.24$.

3.

(i) Aposteriorno razdioba je beta s parametrima $\beta + \sum_i x_i$ i $\beta + nm - \sum_i x_i$. Posebno aposteriorno očekivanje je

$$\frac{\beta + \sum_i x_i}{mn + 2\beta}$$

(ii) MLE procjenitelj za θ se dobije deriviranjem funkcije log-vjerodostojnosti kao

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\sum_i x_i}{mn}$$

(iii) Bayesovski procjenitelj je aposteriorno očekivanje iz (a) dijela. Posebno za $z = (mn)/(mn+2\beta)$ aposteriorno očekivanje možemo izraziti kao:

$$z\frac{\sum_i x_i}{mn} + (1-z)\mu$$

gdje je $\mu = 1/2$.

(iv) Kada $n \to \infty$, $z \to 1$, pa sve više težine stavljamo na MLE procjenitelj koji ovisi iskuljičivo o podacima. Za $\beta \to \infty$ s druge strane $z \to 0$, pa Bayesovski procjenitelj konvergira k $1/2$. Naime veliki β smanjuje varijancu apriori razdiobe, pa preko nje i neizvjesnost vezanu uz naše apriori znanje.

4.

(i) Promotrimo prvo razliku izmedju premija koje osiguranik plaća ako prijavi ili ne prijavi štetu u odnosu na kategoriju popusta. Kako se u 2 godine dostiže maksimalni nivo popusta dovoljno je gledati samo prve tri godine.

Popust i%.	Šteta prijavljena	Štete nije prijavljena	Razlika y_i
0%	200,140,100	140,100,100	100
30%	200,140,100	100,100,100	140
50%	140,100,100	100,100,100	40

Zadnji stupac zadrži i najmanji iznos y_i za koji će šteta biti prijavljena s obzirom na kategoriju popusta i%.

Tako da prijelazne vjerojatnosti za kategoriju zapravo izračunamo iz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{prijavljena šteta}) &= \mathbb{P}(\text{prijavljena šteta} \,|\, \text{nezgoda}) \times \mathbb{P}(\text{nezgoda}) \\ &= \mathbb{P}(X > y_i) \times 0.05\end{aligned}$$

gdje je X gubitak, za koji se pretpostavlja da ima lognormalnu distribuciju.

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - \Phi(\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(\left(\frac{\ln x - 5}{\sqrt{3/4}}\right)$$

Tako da je

$$\begin{aligned}
p_{0,0} &= \mathbb{P}(\text{prijavljena šteta za osiguranika koji je u kategoriji } 0\%) \\
&= \mathbb{P}(\text{prijavljena šteta} \,|\, \text{nezgoda})0.05 \\
&= \mathbb{P}(X > y_0)0.05 = 0.05(1 - \Phi((\ln 100 - 5)/\sqrt{3/4})) = 0.033
\end{aligned}$$

Kako je $p_{0,50} = 0$, tj. nema skoka iz kategorije 0% u kategoriju 50% tokom jedne godine, slijedi $p_{0,30} = 1 - p_{0,0} = 0.966$. Kad napravimo račun i za ostale kategorije dobijemo prijelaznu matricu

$$\begin{pmatrix} 0.033 & 0.966 & 0 \\ 0.026 & 0 & 0.974 \\ 0 & 0.047 & 0.953 \end{pmatrix}$$

(ii) Očekivana premija na početku sljedeće godine je

$$100p_{30,50} + 200p_{30,0} = 102.63.$$

5. Znamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\} = 264 \\
\mathrm{Var}(X) &= \exp\{2(\mu + \sigma^2)\}(\exp\{\sigma^2\} - 1) = (346)^2
\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}
&(\exp\{\sigma\}^2 - 1) = (346)^2/(264)^2 \\
&\exp(\{\sigma^2\} = 2.717 \\
&\sigma^2 = 0.16
\end{aligned}$$

Dakle, $\sigma \approx 1$ i $\mu = 5.07$. Nadalje, manjom transformacijom integrala se pokaže

$$\mathbb{E}XI_{\{X\in(a,b)\}} = \mathbb{E}X\left[\Phi\left(\frac{\ln b - (\sigma^2 + \mu)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - (\sigma^2 + \mu)}{\sigma}\right)\right].$$

Sad dobijemo:

(i)

$$\mathbb{E}[(X - 100)I_{\{X>100\}}] = 177.23.$$

Pa je za štete koje pokriva osiguravatelj očekivani iznos

$$\mathbb{E}[X - 100|\,\{X > 100\}] = 177.23/0.67897 \approx 261$$

(ii) Ako je $Y = 1.1X$, tada Y ima lognormalnu razdiobu takodjer, samo je sada $\mu = 5.07 + \ln 1.1$, a $\sigma = 1$ i dalje. Ostatak zadatka ide slično kao i (i), rezultat je ≈ 206.

6.

(i) Tablica prirasta isplata šteta nakon prilagodbe za inflaciju:

Prirasti isplata šteta nakon prilagodbe zbog inflacije

Godina nastanka štete	**Razvojna godina**			
	0	**1**	**2**	**3**
2003	1202	787	636	350
2004	1685	1007	700	
2005	1537	1450		
2006	1700			

(ii) Razvojni faktori iznose pribiližno 1.73, 1.28 i 1.13 za 1., 2., odn. 3. godinu.

(iii) Nakon što iskoristimo razvojne faktore i dobijemo tablicu predvidjanja kumulativnih isplata po cijenama sredinom 2006, pričuva se izračuna kao ≈ 4405.

7.

(i) Za $Y_i = Z_i/n$ funkcija gustoće iznosi

$$\begin{aligned} P(Y_i = y) = f(y) &= \binom{n}{ny} \mu^{ny}(1-\mu)^{n-ny} \\ &= \exp\left[ny \ln \frac{\mu}{1-\mu} + n\ln(1-\mu) + \ln\binom{n}{ny}\right] \\ &= \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y,\phi)\right) \end{aligned}$$

gdje je $\theta = \ln \frac{\mu}{1-\mu}$, $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta)$, $\phi = n$, $a(\phi) = 1/\phi$ i $c(y, \phi) = \ln \binom{n}{ny}$.

(ii) Prirodni parametar je $\theta = \ln \frac{\mu}{1-\mu}$. Kanonska funkcija veze je logit funkcija, a funkcija varijance je $V(\mu) = b''(\theta) = e^\theta/(1+e^\theta)^2$.