# Dodatne teme

Bojan Basrak

2009

# Principi izračuna premija

Označimo s $X = V_0(N) \geq 0$ sad. vrijednost osiguranog toka novca. Pretpostavimo da je $EX < \infty$. Taj iznos je bio upravo iznos jednokratne neto premije

$$\Pi_{net}(X) = EX.$$

Osiguravatelji u praksi naravno ne naplaćuju neto premije, nego nešto više kao naknadu za rizik i troškove koje snose. Promotrimo nekoliko principa izračuna jednokratnih neto premija za $X$:

i) Princip očekivane vrijednosti
Za neku pozitivnu konstantu $a$, koju zovemo doplatak za sigurnost [safety loading] postavimo

$$\Pi_{ov}(X) = (1 + a)E(X)\,,$$

Ovaj princip motiviran je jakim zakonom velikih brojeva.

ii) Princip varijance

$$\Pi_{var}(X) = E(X) + a\,\mathrm{var}X\,,$$

za neku pozitivnu konstantu $a$. Ovaj princip koristi varijancu kao mjeru rizika koji se veže uz danu policu.

ii) Princip standardne devijacije

$$\Pi_{sd}(X) = E(X) + a\sqrt{\mathrm{var}X}\,,$$

za neku pozitivnu konstantu $a$. Ovaj princip motiviran je centralnim graničnim teoremom.

Pretpostavka u ii) i iii) je postojanje i konačnost varijance od $X$.

**Primjer** (Sankt Peterburg problem) Neka je $Y$ geometrijska sl. varijabla, t.d. $P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Neka je $X = 2^Y$. Očito je $EX = \sum_k 2^{k+1}2^{-(k+1)} = \infty$, iako bi rijetko tko ponudio neograničen iznos za pristup igri čiji je dobitak ima razdiobu kao $X$. Prvi je ovaj problem pokušao riješiti D. Bernoulli (1738) i pritom je postavio osnove za uvodjenje funkcija korisnosti pogotovo u ekonomiju.

## Premije preko funkcije korisnosti

Premije se katkad odredjuju uz upotrebu *funkcija korisnosti* odn. *utility functions*. One u pravilu zadovoljavaju $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ili $u : (l, \infty) \to \mathbb{R}$, za neki $l$, te $u'(x) > 0$ i $u''(x) < 0$ za sve $x$ (a katkad i $u(0) = 0$). Čest primjer u aktuarskoj praksi je

$$u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}).$$

za neki parametar $a > 0$. Općenitije fukcije korisnosti biramo t.d. su neopadajuće i konkavne na svojoj domeni.

Još dva često korištena primjera su:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{s^{c+1}-(s-x)^{c+1}}{(c+1)s^c} & \text{za } x < s \\ \frac{s}{c+1} & \text{za } x \geq s\,. \end{cases}$$

za neke parametre $s, c > 0$. Konačno za parametar $c > 0$ i sve $x > 0$ možemo definirati

$$u(x) = \frac{x^{1-c}-1}{1-c} \quad \text{za } c \neq 1$$

odn.

$$u(x) = \ln x \quad \text{za } c = 1\,.$$

Umjesto uvjeta da je očekivani gubitak odn. dobitak za osiguravatelja jednak 0, ovdje premije nalazimo iz uvjeta da je očekivana korisnost dobitka jednaka 0, tj.

$$Eu(-L) = 0\,.$$

Ako se premija plaća jednokratno u iznosu $\Pi$, uočite da možemo pisati $L = X - \Pi$. Intuitivno, želimo da je očekivani gubitak korisnosti 0. U gornjem primjeru se to svodi na

$$E(e^{aL}) = 1$$

**Primjer**
Ako je funkcija korisnosti

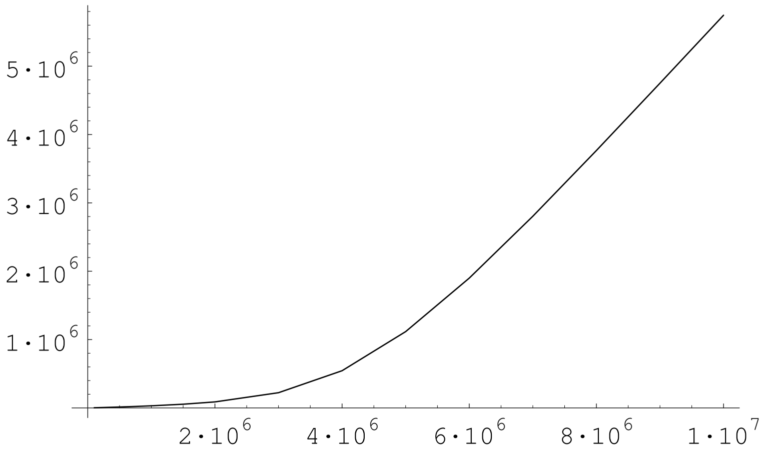
$$u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$$

i želimo izračunati jednokratnu premiju za osiguranje čija sad. vrijednost je sl. varijabla $X$, dobijemo

$$\Pi_u(X) = \frac{1}{a} \ln E e^{aX} .$$

Odgovarajuću godišnju premiju je tipično nešto teže izračunati.

Na sljedećoj slici, za životno osiguranje kod kojeg je osigurana svota na $x$ osi, $y$ os prikazuje godišnju premiju. Prepostavljamo de Moivreov zakon smrtnosti s $w = 100$, fiksnu e.k.s $i = 4\%$, dob osiguranika od 40 godina, te funkciju korisnosti $u$ kao gore uz $a = 10^{-6}$.




**Napomena** Preko funkcija korisnosti neto premijama se zaobilaznim putem dodaje dodatak za sigurnost. On ne raste proporcionalno osiguranoj sumi (v. sliku), što prividno nije u skladu s onim što smo do sada radili.

Unatoč funkcijama korisnosti, neto premije imaju središnju ulogu u osiguravateljskoj praksi. Naime uz konzervativne pretpostavke o kamatnoj stopi i zakonu smrtnosti, "safety loading" će se implicitno pojaviti u iznosu premija.

# Portfelj osiguravatelja

Pretpostavimo da je ugovor o osiguranju sklopljen sa $n$ osoba. Osiguravatelj će u nekom fiksnom budućem razdoblju svakoj od njih isplatiti osigurani iznos sadašnje vrijednosti

$$X_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Mi pretpostavljamo da su $X_i$ medjusobno nezavisne sl. var. ali ne nužno jednako distribuirane. Nas dakako zanima razdioba sveukupnog iznosa njihovih zahtjeva

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Pretpostavimo zbog jednostavnosti da je e.k.s. 0, te da su $X_i \sim \mathrm{B}(1, p)$, tada je $S_n \sim \mathrm{B}(n, p)$ i prema integralnom de Moivre-Laplaceovom teoremu vrijedi

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Normalna aproksimacija

Gornji rezultat je zapravo korolar centralnog graničnog teorema. Neka je $(X_i)$ niz nezavisnih sl. var. konačnih varijanci, vrijedi

$$\begin{aligned} m_n &= ES_n = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n, \\ s_n^2 &= \mathrm{var} S_n = \mathrm{var} X_1 + \mathrm{var} X_2 + \cdots + \mathrm{var} X_n. \end{aligned}$$

**Teorem 1** *(Lindeberg) Ako niz* $(X_i)$ *zadovoljava još i L. uvjet tada*

$$P\left(\frac{S_n - m_n}{s_n} \leq x\right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Napomena** Pokazuje se da je taj tehnički Lindebergov uvjet "gotovo i nužan" (uz uvjet *uniformne asimptotske zanemarivosti*, Feller). Nadalje, analogan rezultat vrijedi i za nizove $(X_i)$ koji su zavisni ali "blago", npr. za one koji zadovoljavaju tzv. $\alpha$-*mixing* uvjet (v. Billingsley P&M).

Radi kompletnosti dajemo i Lindebergov uvjet (v. Sarapa:TV pog.14):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_1^n E(X_i - EX_i)^2 I_{|X_i - EX_i| \geq \varepsilon s_n} = 0$$

Primjena gornjeg teorema u praksi se svodi na aproksimaciju

$$P(S_n > t) \approx 1 - \Phi\left(\frac{t - m_n}{s_n}\right) .$$

Na primjeru binomnih sl. var. koje smo razmatrali gore možemo se uvjeriti da ova aproksimacija nije jednako dobra u "repu" razdiobe kao što je to u "centru". Kako se osiguravatelji pribojavaju upravo velikih ukupnih šteta, posebno su nam interesantne ove "repne vjerojatnosti". Bolju aproksimaciju za njih možemo dobiti koristeći tzv. *teoriju velikih devijacija.*

Zahvaljujući sve snažnijoj kompjuterskoj podršci i simulacijama, aktuari se danas ne moraju isključivo oslanjati na ovakve asimptotske metode u procjeni razdiobe od $S_n$. Treba ipak upozoriti da izvodjenje Monte Carlo simulacija u ovom kontekstu može biti sasvim netrivijalan problem.

## Poissonovska aproksimacija

Prepostavimo da su $X_i$ nezavisne kao i prije, ali i da imaju istu diskretnu razdiobu koja ovisi o $n$

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ p_0^{(n)} & p_1^{(n)} & p_2^{(n)} & p_3^{(n)} & \dots \end{pmatrix}.$$

Razdiobu od $S_n = \sum_1^n X_i$ možemo aproksimirati složenom Poissonovom razdiobom. Pretpostavimo da za $n \to \infty$ i sve $z \in [0, 1)$ vrijedi

$$\sum_{j \geq 1} np_j^{(n)}(z^j - 1) \to \sum_{j \geq 1} \lambda_j(z^j - 1), \tag{1}$$

za neki niz nenegativnih brojeva $(\lambda_i)$ t.d. $\sum \lambda_i = \lambda < \infty$.

Neka je $N$ Poissonova sl. var. s parametrom $\lambda$, a $Y_i$ neka su n.j.d. sl. var. s razdiobom

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \lambda_1/\lambda & \lambda_2/\lambda & \lambda_3/\lambda & \dots \end{pmatrix}.$$

Na ovoj osnovi, definirajmo tzv. *model skupnog rizika* kao sl. var.

$$S = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N.$$

Za razdiobu sl. var. $S$ kažemo da je složena Poissonova.

**Teorem 2** *Uz uvjet (1), za sve* $k \in \mathbb{N}$

$$P(S_n = k) \to P(S = k), \quad \text{za } n \to \infty.$$

**Dokaz.** Slijedi iz Prop 6.8 i Tm 6.12 u Sarapa:Teorija vjerojatnosti. $\square$

Razdioba sl. var. $S$ iz prethodnog teorema može se izračunati koristeći jednostavnu rekurziju. Uvedimo oznaku

$$f(k) = P(S = k).$$

**Teorem 3** *(Panjer) Uz ove oznake vrijedi*

$$f(k) = \frac{1}{k\lambda} \sum_{i=1}^{k} j\lambda_j f(k - j), \quad k = 1, 2, \ldots$$

**Dokaz.** Na str. 99 u Gerberu, uz $m = \infty$.

## O reosiguranju

Osiguravajuće kuće na osnovi razdiobe sveukupnog iznosa šteta $S_n$ moraju odlučiti da li im je potrebno *reosiguranje*, odn. da li žele podijeliti rizik s nekim drugim (re)osiguravateljem. Tada mu oni ustupaju dio skupljenih premija, recimo $P_n$, a zauzvrat reosiguravatelj snosi dio šteta recimo $R_n$. Sada osiguravatelj mora pokriti samo preostale zahtjeve u iznosu

$$S_n' = S_n + P_n - R_n$$

Iznos $R_n$ je obično funkcija indivualnih zahtjeva za isplatom, npr.

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^+.$$

Ovakav ugovor se zove *excess of loss reinsurance*.

Često je u upotrebi i *stop-loss reinsurance*, za koji je

$$R_n = (S_n - b)^+.$$

Naravno, pitanje je odredjivanja premije za reosiguranje. One su tipično veće nego $E(R_n)$ jer i reosiguravatelji traže "safety loading", pa je i $ES'_n > ES_n$. Dakle sveukupni iznos šteta se povećava u srednjem, no zato se smanjuje rizik.

**Primjer**

# Procjena zakona smrtnosti

## Neparametarski slučaj

Procjena zakona smrtnosti, odn. funcije doživljena nije od izuzetne važnosti samo za aktuare. To je središnji problem i u teoriji pouzdanosti, ali i u medicinskim istraživanjima, npr. kada se ispituje efikasnost nove metode liječenja.
Tipično za ovaj problem je da su podaci *cenzurirani*. U praksi se najčešće javljaju dva tipa cenzuriranja, tzv. tip I i tip II.

Cenzuriranje tipa I znači da se promatranje slučajnog uzorka prekida nakon izvjesnog vremena. Tako da je vrijeme doživljenja poznato samo za osobe koje su doživjele pad (ili smrt) do tog trenutka.

Cenzuriranje tipa II znači da se promatranje slučajnog uzorka prekida nakon što odredjen broj osoba, recimo $r \in \mathbb{N}$ u uzorku doživi pad.

Da bismo procjenili zakon smrtnosti u danoj populaciji idealno bismo imali veliki slučajan uzorak od $n$ nezavisnih osoba, za koje znamo duljine njihovih života, npr. $T_1, \ldots, T_n$. Realnije je pretpostaviti da zapravo imamo vrijednosti

$$\min\{T_i, C_i\},$$

gdje je $(T_i, C_i)$ niz nenegativnih njd sl. vektora, koji predstavlja vremena pada i cenzuriranja.
Ako funkciju doživljenja slučajne varijable $T$ odn. $K = \lfloor T \rfloor$ pokušamo direktno procijeniti neparametarski dobit ćemo pristrani procjenitelj ukoliko ne vodimo računa o cenzuriranju. Jedna ideja bi bila da iskoristimo relaciju

$$\bar{F}(t) = \prod_{i=0}^{t} (1 - m(i)), \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

koja dovodi u vezu funkciju doživljenja $\bar{F}$ sl. varijable $K$ i njenu diskretnu funkciju hazarda $m(n) = P(K = n | K \geq n)$ (v. poglavlje o zakonima smrtnosti).

Tako funkciju doživljenja sl. var. $K$ možemo procjeniti ako procjenimo diskretnu funkciju hazarda odn. vrijednosti $m(t)$, za $t \in \mathbb{N}_0$. Npr. možemo uzeti sljedeću procjenu

$$\hat{m}(t) = \frac{d_t}{n_t - s_t}$$

gdje su
$n_t = \#\{i : \min\{T_i, C_i\} \geq t\}$,
$d_t = \#\{i : t + 1 > T_i \geq t,\ C_i \geq t\}$ i
$s_t = \#\{i : T_i \geq t, t + 1 > C_i \geq t\}$.

*Kaplan-Meierov procjenitelj* funkcije doživljenja $\bar{F}$ sl. varijable $K$ možemo naći

$$\hat{S}(t) = \prod_{i=0}^{t} (1 - \hat{m}(i)),\ t \in \mathbb{N}_0.$$

Lako se vidi da je

$$\hat{S}(t) = \frac{n - d_0 - \dots d_t}{n}, \ t \in \mathbb{N}_0.$$

kada nema cenzuriranja. Nadjite očekivanje i varijancu procjenitelja $\hat{S}(t)$ u ovom slučaju.

Općenito se može pokazati da je Kaplan-Meierov procjenitelj asimptotski konzistentan i normalno distribuiran, uz varijancu koja se može procjeniti koristeći Greenwoodovu formulu

$$\hat{\sigma}^2_{KM} = \hat{S}^2(t) \sum_{j=1}^{t} \frac{\hat{m}(j)}{(1 - \hat{m}(j))n_j}.$$

## Parametarski slučaj. Metoda maksimalne vjerodostojnosti

Parametarski zakoni smrtnosti koje smo razmatrali se u načelu mogu procjenjivati metodom maksimalne vjerodostojnosti. Ako napišemo *likelihood* opaženog skupa podataka u odnosu na parametarski model $f_\theta$ dobijemo

$$l(\theta) = \prod_{\text{necenzur.}} f_\theta(T_i) \prod_{\text{cenzur.}} P_\theta(T_i > C_i)$$

gdje su $T_i$ odn. $C_i$ dob pada odn. cenzuriranja za $i$-tu osobu u promatranom uzorku. Procjenitelj maksimalne vjerodostojnosti (*MLE*) je ona vrijednost $\hat{\theta} \in \Theta$ za koju je $l(\theta)$ maksimalan. Ponekad je tu vrijednosti moguće naći kao kritičnu točku funkcije $l$ na $\Theta$, odn. kao rješenje tzv. likelihood jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0.$$

MLE procjenitelj tipično ima neka vrlo poželjna svojstva: posebno konzistentnost i asimptotsku normalnost. Naime, ako $f_\theta(t)$ zadovoljava izvjesne uvjete regularnosti (što je najčešće slučaj kad se radi o zakonima smrtnosti), tada je za velike $n$ MLE procjenitelj $\hat{\theta}$ aproksimativno nepristran i ima normalnu razdiobu. Dakle, za velike $n$

$$\hat{\theta} \ \text{ ima otprilike razdiobu } \ N(\theta, 1/I_l(\theta)).$$

v. Williams p 193.