Osnove životnog osiguranja

Bojan Basrak

2009

Osiguranje života

Za deterministički tok novca $\mathcal{C}$ današnja "fair cijena" bila je jednaka njegovoj sadašnjoj vrijednosti

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_i c_i v(t_i)\,,$$

što smo za konstantnu e.k.s. i mogli naći i kao neto sadašnju vrijednost

$$\mathsf{NPV}_{\mathcal{C}}(i) = \sum_i c_i v^{t_i}\,.$$

Sa Z označimo sadašnju vrijednost slučajnog toka novca, tj. sl. varijablu

$$Z = V_0(\mathcal{C}) = \sum_i C_i v^{T_i}\,,$$

prepostavljajući konvergenciju reda na d.s.

Ako postoji $EZ < \infty$, tada izraz EZ možemo uzeti za za "fair cijenu" slučajnog toka novca, tu vrijednost zovemo i *jednokratna neto premija [net single premium]*. Tu je nužan oprez, naime ovakvo odredjivanje cijena

- gotovo sigurno vodi osig. kompaniju u propast (zbog asimptotskog ponašanja parcijalnih suma slučajnih varijabli),
- podrazumijeva da je funkcija korisnosti uvijek linearna,
- katkad dopušta *arbitrage* v. npr. cijena izvedenica tj. derivativa.

Primjetite da $E(Z)$ ne opisuje rizik koji prihvaća osiguravatelj, za to bi trebalo znati nešto više o razdiobi sl. var. Z. Tradicionalno se rizik mjeri preko njene varijance, no i tu je nužan oprez. Korisniju informaciju o riziku koji prihvaća osiguravatelj bismo dobili promatrajući zakon razdiobe sl. varijable $(Z-u)_+$ gdje je $u > 0$ unaprijed odredjen prag (npr. cijena police) ili barem brojeve

$$P(Z > u),\ E(Z-u)_+ \text{ ili } E(Z-u|Z > u)\,.$$

Alternativno se koriste gornji q-kvantili razdiobe sl. var. Z tj. vrijednosti u_q za koje je $P(Z > u_q) = q$, za neki unaprijed odredjen nivo q, npr. u praksi se često koristi $q = 0.05$. Ovakva mjera rizika je u literaturi poznata i pod imenom *value at risk – VaR*.

Jednokratna neto premija

Primjer Pretpostavimo da dobijemo c ako se kuglica zaustavi na "impair" u igri ruleta. Naš dobitak je cX gdje je X sl. var. s razdiobom $B(1, 18/37)$, a "fair cijena" za ovakvu igru bila bi

$$E(cX) = c\frac{18}{37}$$

ako se igra odvija upravo sada ili

$$E(cvX) = cv\frac{18}{37}$$

ako se dobitak isplaćuje tek za godinu dana.

Kao i u igri ruleta, ugovori o osiguranju često obavezuju osiguravatelja na jednokratnu isplatu u slučaju smrti, nezgode, doživljenja ili sl.

Ako označimo tu svotu sa c i ako se ona isplaćuje u sl. vremenskom trenutku τ njena sadašnja vrijednost je očito:

$$cv^{\tau} .$$

Ugovori o životnom osiguranju su uvijek vezani uz neki slučajan dogadjaj, i slučajan trenutak T' u kojem se on dogadja. Tipično ovi ugovori predstavljaju obećanja da će se isplatiti izvjesna suma u trenutku T' ili da će se isplaćivati renta sve do trenutka T'.

Prisjetimo se sl. var. T, $T_x = (T - x | T > x)$, $K = K_x = \lfloor T_x \rfloor$ odn. $S = S_x = \{T_x\}$ i fiksirajmo $x \geq 0$ kao dob osobe koja pristupa osiguranju.

I u nastavku pretpostavljamo neprekidnost slučajne varijable T i fiksnu e.k.s.

Pretpostavimo da se naknade osiguravatelja osiguraniku po nekoj polici osiguranja mogu zapisati kao tok novca $\mathcal{C} = ((T_i, C_i))$, te da su sve vrijednosti T_i, C_i nenegativne slučajne varijable, tada je

$$Z = \sum_i C_i v^{T_i} ,$$

uvijek dobro definirana poopćena sl. varijabla t.d. $Z : \Omega \to [0, \infty]$. U slučaju da je $EZ < \infty$ kaže se da su naknade (odn. polica ili *risk*) $\mathcal{C}$ prikladni za osiguranje odn. *insurable*. U tom slučaju očekivanje

$$\Pi(\mathcal{C}) = EZ = \sum_i E(v^{T_i} C_i)$$

zovemo *jednokratnom neto premijom (net single premium)* za $\mathcal{C}$ (uočite da zadnja jednakost slijedi iz Fubinijevog teorema).

Jednostavni tipovi osiguranja

$\diamond$ Prvi ugovor koji želimo definirati je *osiguranje života (whole life insurance)*. On obavezuje osiguravatelja na isplatu (fiksnog) iznosa 1 na kraju godine smrti. Ovaj ugovor možemo kao zapisati kao tok novca $\mathcal{C} = ((K_x + 1, 1))$. Dakle jedino je vrijeme isplate slučajno, pa je sad. vrijednost isplate:

$$Z = v^{K+1}.$$

Dakle za $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(Z = v^{k+1}) = P(K = k) = P(k \leq T_x < k + 1)$$

koristeći činjenicu da je $T_{x+k} \stackrel{d}{=} (T_x - k | T_x \geq k)$. Očekivana sadašnja vrijednost (jednokratna neto premija) za ovakav ugovor je

$$A_x = E(Z) = E(v^{K+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(k \leq T_x < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(T_x > k) P(T_{x+k} \leq 1)$$

uz koristenje činjenice da T_x ima neprekidnu razdiobu, te je stoga $P(T_X = y) = 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$.

Varijancu od Z nadjemo kao

$$\mathrm{var}(Z) = EZ^2 - (EZ)^2 = EZ^2 - A_x^2\,,$$

gdje je

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} P(K = k) = E\big(v^{2(K+1)}\big)\,,$$

dakle izraz je isti kao i za A_x, ali uz dvostruki intenzitet kamate.

$\diamond$ Ako se osiguravatelj obavezuje na isplatu iznosa 1 kao i gore, ali samo kada se smrt dogodi u prvih n godina po potpisivanju ugovora govorimo o *osiguranju života na rok od n godina (term insurance)*. Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = v^{K+1} \cdot I_{K<n} \, ,$$

a jednokratna neto premija iznosi

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E(Z)$$

i očito je

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E(v^{K+1} \cdot I_{K<n}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K = k)$$

Izračunajte varijancu sl. var. Z.

$\diamond$ Sljedeći ugovor koji promatramo takodjer ima rok od n godina i isplaćuje iznos 1, ali samo u slučaju doživljenja. Zovemo ga *osiguranje doživljenja (pure endowment)*. Sad. vrijednost isplate je

$$Z = v^n \cdot I_{K \geq n}\,.$$

Jednokratna neto premija iznosi

$$A_{x:\overset{\;1}{\overline{n}|}} = E(Z) = E(v^n \cdot I_{K \geq n}) = v^n P(K \geq n) = v^n P(T_x \geq n).$$

Kako je $I_{K \geq n}$ Bernoullijeva sl. var. varijancu od Z lako nadjemo kao

$$\mathrm{var}(Z) = v^{2n}\,{}_n P(K \geq n) P(K < n).$$

$\diamond$ Sljedeći ugovor je samo "suma" prethodna dva, i naziva se *mješovito osiguranje*. On osigurava iznos 1 na kraju godine smrti ukoliko se ona dogodi u prvih n godina, u suprotnom se isti iznos isplaćuje na kraju n-te godine, tj.

$$Z = v^{K+1} \cdot I_{K<n} + v^n \cdot I_{K \geq n} =: Z_1 + Z_2\,,$$

pa je jednokratna neto premija za ovakav ugovor

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Promotrimo varijancu sl. var. Z, ona iznosi

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2) + 2\mathrm{cov}(Z_1, Z_2)\,,$$

no

$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -A^{1}_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < 0.$$

Dakle je

$$\mathrm{var}(Z) < \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2)\,.$$

Što nam to govori o riziku prodaje jedne kombinirane police u odnosu na dvije odvojene i nezavisne police?

$\diamond$ *Odgodjeno osiguranje života ili m-year differed whole life insurance* ima sad. vrijednost:

$$Z = v^{K+1} \cdot I_{K \geq m} \,.$$

Jednokratna neto premija očito mora iznositi

$$_{m|}A_x = E(Z) = v^m P(T_x > m) A_{x+m} = A_x - A^{1}_{x:\overline{m|}}$$

jer je $v^{K+1} \cdot I_{K \geq m} = v^{K+1} - v^{K+1} I_{K<m}$.

Osiguranje plativo u trenutku smrti

Ako se iznos 1 plaća u trenutku smrti, njegova sad. vrijednost je

$$Z = v^{T_x} \,.$$

Jednokratna neto premija se označava sa

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t \bar{F}(t|x)\mu_{x+t}\mathrm{d}t.$$

Ako ovu vrijednost moramo izračunati na osnovu životnih tablica moramo uvesti dodatnu prepostavku jer je u njima zadan samo zakon razdiobe sl. vrijable K.

Ako npr. rastavimo sl. var. T_x na njen cijeli i razlomljeni dio

$$T_x = K_x + S_x\,,$$

i pretpostavimo da su K_x i S_x nezavisne sl. var., a S_x ima uniformnu razdiobu na intervalu $[0,1)$, uočimo

$$E(v^{S_x-1}) = E((1+i)^{1-S_x}) = \int_0^1 (1+i)^u \mathrm{d}u = \int_0^1 e^{\delta u}\mathrm{d}u = (e^\delta - 1)/\delta = i/\delta,$$

pa je dakle zbog nezavisnosti

$$\bar{A}_x = E(v^{K_x+1})E((1+i)^{1-S_x}) = \frac{i}{\delta}A_x\,.$$

Izvedite sličnu formulu i za osiguranje plativo u trenutku smrti ali s trajanjem od n godina tj. pokažite

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + (\frac{i}{\delta} - 1)A^{1}_{x:\overline{n}|}.$$

Općeniti tipovi životnog osiguranja

Prepostavimo da se osigurana svota mijenja iz godine u godinu, neka je npr. c_j osigurana svota u j-toj godini nakon zaključenja police. Sad. vrijednost police je dakle

$$Z = c_{k+1} v^{K+1} \,.$$

Sve momente sl. var. Z lako nadjemo kao

$$E(Z^h) = \sum_{k=0}^{n} c_{k+1}^{h} v^{h(k+1)} \, {}_k p_x q_{x+k} \,,$$

a očekivanje možemo naći i alternativno kao

$$E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1) \, {}_{1|}A_x + (c_3 - c_3) \, {}_{2|}A_x + \cdots$$

iz relacije (uz pretpostavku $\sum_k c_{k+1} v^{k+1} P(K \geq k) < \infty$))

$$Z = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K=k} = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K \geq k} - \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K \geq k+1}.$$

Ukoliko se osiguranje plaća odmah nakon smrti, osigurana suma se općenito zadaje proizvoljnom (izmjerivom) funkcijom $c : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Tada ugovor izgleda kao $\mathcal{C} = ((K+1, c_{K+1}))$, a sad. vrijednost mu je

$$Z = c(T_x)v^{T_x},$$

a jednokratna neto premija je

$$E(Z) = \int_0^\infty c(t)v^t \bar{F}(t|x)\mu_{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty c(t)v^t f(t|x)\mathrm{d}t\,.$$

Ako rastavimo T_x na $K + S$ kao prije

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(Z|K=k)P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(c(K+S)(1+i)^{1-S}|K=k)v^{k+1}P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}v^{k+1}P(K=k) \end{aligned}$$

uz $c_{k+1} = E(c(K+S)(1+i)^{1-S}|K=k)$.

Životne rente

Renta je tok novca kojeg čini niz periodičnih uplata za vrijeme trajanja života osobe. Iznosi su tipično unaprijed odredjeni no broj isplata je slučajan, pa je sad. vrijednost rente sl. var. Njeno očekivanje i ovdje smatramo "fair" jednokratnom neto premijom.

Životnu rentu možemo gledati i s negativnim predznakom. Tada ona opisuje (periodične) isplate.

Jednostavne životne rente

I ovdje razlikujemo prenumerando i postnumerando rente, te koristimo oznake $T_x = K + S$.

$\diamond$ *Prenumerando životna renta ili whole life annuity-due* opisana je tokom novca $\mathcal{C} = ((i, \mathbf{1}_{\{K \geq i\}}) : i \in \mathbb{N})$, koji ima sad. vrijednost

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}},$$

no

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = P(K = k).$$

Jednokratna neto premija je dakle

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} P(K = k).$$

Iz $Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{K \geq k}$ slijedi $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(K = k)$.

Iz $Y = (1 - v^{K+1})/(1 - v)$ slično slijedi

$$\ddot{a}_x = E(Y) = E\left(\frac{1 - Z}{1 - v}\right) = \frac{1 - A_x}{d}$$

gdje je Z sad. vrijednost za osiguranje života. Nadjite $\mathrm{var} Y$.

◇ *Prenumerando životna renta s ograničenim trajanjem ili n-year temporary whole life annuity-due* ima sad. vrijednost

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} I_{K<n} + \ddot{a}_{\overline{n}|} I_{K \geq n} = \ddot{a}_{\overline{n \wedge (K+1)}|},$$

gdje je $i \wedge j = \min\{i, j\}$. Jednokratna neto premija je

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} P(K = k) + \ddot{a}_{\overline{n}|} P(K \geq n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(K \geq k) = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}. \end{aligned}$$

Ako "uklonimo točkice" dobijemo

◇ *Postnumerando životnu rentu ili whole life immediate annuity* koja ima sad. vrijednost

$$Y = v + v^2 + \cdots + v^K = a_{\overline{K}|}$$

pa slijedi

$$a_x = E(Y) = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - A_x}{d} - 1.$$

◇ *Prenumerando životna renta s odgodom od m godina ili m-year deffered whole life annuity-due* ima sad. vrijednost

$$Y = (v^m + v^{m+1} + \cdots v^K) I_{K \geq m}\,,$$

s očekivanjem

$$E(Y) = v^m P(T_x > m) \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

Životne rente plative više puta godišnje

Uplate u iznosu $1/m$, $m \in \mathbb{N}$ plaćaju se m puta godišnje. Ako je renta prenumerando npr, u trenucima

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$$

sve dok je korisnik rente živ. Uz pretpostavku a) s kraja prošlog poglavlja očekivana sad. vrijednost ovakve rente je

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}},$$

gdje je

$$A_x^{(m)} = E(v^{K+S^{(m)}}) = A_x \frac{i}{i^{(m)}}\,,$$

uz prepostavku $T_x = K + S$, za K i S nezavisne, $\sim U(0,1)$. $S^{(m)} = \frac{1}{m}\lfloor mS + 1 \rfloor$ i $d^{(m)} = m(1 - (1+i)^{-1/m})$.

Prema tome za $S^{(m)}$ vrijedi

$$S^{(m)} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1/m & \dots & (m-1)/m \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Promotrimo sada postnumerando ekvivalentnu rentu, iznosi $1/m$ dospijevaju u trenucima

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$$

za života korisnika. Sad. vrijednost ovakve rente je

$$Y = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{m} v^{t/m} I_{T_x > t/m}.$$

Zato je jednokratna neto premija

$$a_x^{(m)} = E(Y) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m} P(T_x > t/m).$$

U aktuarskim tablicama se pojavljuje i izraz $D_t = v^t l_t$, pa iz $P(T_x > u) = P(K_x \geq u) = l_{x+u}/l_x$ za $x, u \in \mathbb{N}$, slijedi

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \,.$$

Analogno se vidi da je očekivana sad. vrijednost odgovarajuće prenumerando životne rente

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m} P(T_x > t/m) = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x} \,.$$

Kako vrijednosti D_x općenito nisu tabelirane za necjelobrojne vrijednosti x, u praksi i ovdje moramo koristiti nekakvu aproksimaciju

Periodične neto premije

Jedine premije o kojima smo do sada govorili bile su jednokratne neto premije. Iznosile su $E(Z)$ gdje je Z bila sad. vrijednost svih isplata osiguraniku (uz pretpostavku da je ovo očekivanje konačno, Z je tzv. engl. *insurable risk*). Ovakve premije se plaćaju odjednom i unaprijed, no premija se ne plaća uvijek na taj način. Premija se tipično plaća u pravilnim vremenskim razmacima i (gotovo) uvijek unaprijed (prenumerando).

Uobičajeni načini plaćanja premije su:

- jednokratna neto premija
- periodične premije u konstantnom iznosu
- periodične premije u varijabilnom iznosu

Označimo s L gubitak osiguravatelja u odnosu na policu osiguranja, preciznije

$$L = \text{ (sad. vr. svih isplata) } - \text{ (sad. vr. svih uplaćenih premija).}$$

Negativni gubitak je dakako dobitak za osiguravatelja.

Premija se naziva *neto premija* ako je

$$E(L) = 0 \tag{1}$$

Ovakva je bila premija u prvom od gore navedenih načina plaćanja, a iz (1) moguće je odrediti premiju i u drugom načinu plaćanja.

Primjer

Godišnje neto premije za jedn. tipove osiguranja

i) osiguranje života: osigurani iznos je 1 plativ na kraju godine smrti, premija se plaća godišnje unaprijed, odredimo njen iznos P_x. Očito

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

Iz (1) slijedi

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\,.$$

No gubitak možemo alternativno zapisati i kao

$$L = v^{K+1} - \frac{P_x}{1-v}(1 - v^{K+1})\,.$$

Odavde je

$$\mathrm{var} L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \mathrm{var}(v^{K+1})\,.$$

Rizik za osiguravatelja dakle, iskazan varijancom, je veći ako se premije plaćaju godišnje nego kada se plaćaju jednokratno.
Lako se vidi i

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = d + P_x$$

ii) životno osiguranje s ograničenim trajanjem daje gubitak

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{K+1} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{n} & \text{za } K \geq n\,. \end{cases}$$

Neto godišnja premija dobije se iz (1) kao

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

iii) osiguranje doživljenja; ovdje godišnje neto premiju oznčavamo s $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, a gubitak iznosi

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{1}\ddot{a}_n & \text{za } K \geq n\,. \end{cases}$$

Postavimo li $EL = 0$, slijedi

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

iv) mješovito osiguranje; premija se lako dobije kao

$$P_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}^{1} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Pokažite da vrijede jednakosti

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = d + P_{x:\overline{n}|} \quad \text{i} \quad P_{x:\overline{n}|} = dA_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}\,.$$

v) osiguranje životne rente s odgodom od n godina

Premije plative m puta godišnje

Oznake su $P_x^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{(m)}, P^1_{x:\overline{n}|}{}^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1(m)}$, a formule se dobiju zamijenjujući $\ddot{a}_x, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \ldots$ u nazivniku sa $\ddot{a}_x^{(m)}, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \ldots$

Primjer Neto premija za mješovito osiguranje je

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Napomena I za sve druge police osiguranja i načine otplate neto premije odredjujemo iz (1). E.k.s. ponekad takodjer modeliramo stoh. procesom. Takvi modeli obično ne vrijede na dugi rok, a značajno kompliciraju račun, npr. gubici nezavisnih polica više nisu nezavisne sl. var. U praksi osiguravatelji koriste "scenarije" i simulacije.

Neprekidne rente i premije

Za životno osiguranje koje se isplaćuje u trenutku smrti sad. vrijednost i njeno očekivanje bili su

$$Z = v^{T_x} \quad \text{i} \quad EZ = \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t \bar{F}(t|x)\mu_{x+t}\mathrm{d}t\,.$$

Prepostavimo da se životna renta isplaćuje kontinuirano po stopi $r(t)$ u trenutku t. Njena sad. vrijednost je

$$Y = \int_0^{T_x} r(t)v^t\mathrm{d}t\,,$$

pa jednokratna neto premija iznosi

$$EY = \int_0^\infty \int_0^t r(s)v^s\mathrm{d}s f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty r(s)v^s\,{}_sp_x\mathrm{d}s\,.$$

U posebnom slučaju kada je $r \equiv 1$, definiramo

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \bar{F}(t|x)\mathrm{d}t$$

Prisjetimo se za funkciju g kažemo da je konveksna na svojoj domeni I, ako za sve $a \in I$ postoji $\lambda(a)$ tako da za sve $x \in I$

$$g(x) \geq g(a) + \lambda(a)(x-a).$$

Ako je g još i diferencijabilna u a tada će $\lambda(a) = g'(a)$ zadovoljavati gornji uvjet.

Propozicija 1 *(Jensenova nejednakost) Za sl. var. X s konačnim očekivanjem EX i konveksnu funkciju g vrijedi*

$$Eg(X) \geq g(EX).$$

Dokaz. U gornju relaciju postavimo $a = EX$ i dobijemo

$$g(X) \geq g(EX) + \lambda(a)(X - EX).$$

Tvrdnja sada slijedi iz monotonosti očekivanja. $\square$

Propozicija 2 *Ako je e.k.s.* $i \geq 0$ *vrijedi*

$$\bar{a}_x \leq \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|} \quad \textit{i} \quad \bar{A}_x \geq v^{\overline{\bar{e}_x}|}$$

Dokaz. Iskoristite Jensenovu nejednakost za funkcije

$$g_1(t) = v^t$$

i

$$g_2(t) = -\int_0^t v^s \mathrm{d}s.$$

$\square$

Vrijednost police i pričuva

Prepostavimo i nadalje fiksnu efektivnu kamatnu stopu. Uz policu osiguranja možemo vezati tokove novca N odn. Π koji označavaju isplate naknada osiguraniku, odn. isplate premija osiguravatelju.

U trenutku t, vrijednost preostalog gubitka za osiguravatelja definiramo kao

$$\begin{aligned} {}_tL &= (\text{vri. u času } t \text{ svih preostalih naknada u } (t,\infty)) - \\ &\quad (\text{vri. u času } t \text{ svih preostalih premija u } [t,\infty)) \\ &= V_t(N_{(t,\infty)}) - V_t(\Pi_{[t,\infty)}), \end{aligned}$$

uz oznake

$$N_{(a,b)} = \text{ sve naknade isplaćene u intervalu } (a,b),$$

$$\Pi_{[a,b)} = \text{ sve premije uplaćene u intervalu } [a,b)\,.$$

Premijsku rezervu definiramo kao

$$ {}_tV = E({}_tL|T_x > t) = E\left(V_t(N_{(t,\infty)})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\Pi_{[t,\infty)})|T_x > t\right) . $$

Ona nam daje preostalu vrijednost police u trenutku t tj. očekivanu vrijednosti svih preostalih gubitaka uz uvjet da je osiguranik živ u trenutku t. Uočimo da se rezerva (odn. vrijednost police) s vremenom mijenja.

Ako se polica financira isključivo iz neto premija, tj. vrijedi $E(L) = E({}_0L) = 0$, vrijednost ${}_tV$ zovemo *neto premijska rezerva*.

Police obično imaju svojstvo da je ${}_tV > 0$ nakon nekog vremena t_0, što znači da vrijednost police (tj. očekivani gubitak za osiguravatelja) na početku raste, a to daje motivaciju osiguranicima da nastave uplaćivati premiju. Dakle premije skupljene u prošlosti osiguravatelj mora čuvati (odn. rezervirati i reinvestirati) kako bi osigurao isplate koje tek dolaze na naplatu. Osiguravatelj koji to ne bi činio lako bi se našao u situaciji da ne može isplatiti ugovoreni iznos. Pojam pričuve je lakše razumijeti na velikom broju osiguranika i uz pomoć zakona velikih brojeva.

Primjer

Prospektivna i retrospektivna formula za neto premijsku pričuvu

Označimo kao i prije vrijednost toka novca $\mathcal{C}$ u trenutku t sa

$$V_t(\mathcal{C})\,.$$

Tada uz fiksnu e.k.s. imamo

$$EV_t(\mathcal{C}) = (1+i)^t EV_0(\mathcal{C}) = \frac{1}{v^t} EV_0(\mathcal{C})\,.$$

Definirajmo sljedeće tokove novca

$$N_{[a,b)} = \text{ sve naknade isplaćene u intervalu } [a,b),$$

$$\Pi_{[a,b)} = \text{ sve premije uplaćene u intervalu } [a,b)\,.$$

Iz $E(L)=0$ slijedi

$$EV_0(N_{[0,\infty)}) - EV_0(\Pi_{[0,\infty)}) = 0$$

pa vrijedi i

$$EV_0(N_{(k,\infty)}) - EV_0(\Pi_{[k,\infty)}) = EV_0(\Pi_{[0,k)}) - EV_0(N_{[0,k]}).$$

Za neto premijsku pričuvu i $t \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} {}_tV &= E\left(V_t(N_{(t,\infty)})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\Pi_{[t,\infty)})|T_x > t\right) \\ &= \frac{1}{v^t}\left[E\left(V_0(N_{(t,\infty)})|T_x > t\right) - E\left(V_0(\Pi_{[t,\infty)})|T_x > t\right)\right] \end{aligned} \quad (2)$$

Formule (2) se zove *prospektivna* formula za neto premijsku pričuvu.

Kako za sl. var. X i sl. dogadjaj B vrijedi $E(XI_B) = E(X|B)P(B)$, posebno ako je $X = 0$ na B^c, vrijedi i $E(X) = E(XI_B) = E(X|B)P(B)$.

$$
{}_tV \;=\; \frac{1}{v^t P(T_x > t)} \left[E\left(V_0(N_{(t,\infty)})\right) - E\left(V_0(\Pi_{[t,\infty)})\right) \right]
$$

Do sada smo koristili samo uobičajenu aktuarsku pretpostavku da su uz uvjet $T_x \le t$, tokovi novca $N_{(t,\infty)}$ i $\Pi_{[t,\infty)}$ prazni. Sada imamo

$$
{}_tV = \left[EV_0(\Pi_{[0,t)}) - EV_0(N_{[0,t]}) \right] \frac{1}{v^t \bar{F}(t|x)} \,. \tag{3}
$$

Formula(3) se zove *retrospektivna* formula za neto premijsku pričuvu. Probajte dati intuitivnu interpretaciju jednakosti medju njima.

Primjer (mješovito osiguranje)

Dobitak i gubitak od smrtnosti

Kao što smo vidjeli pričuva se mijenja tokom vremena. I ovdje promatramo neto premijsku rezervu, a želimo usporediti vrijednost ${}_tV$ i ${}_{t+1}V$.

Po definiciji

$$\begin{aligned}
{}_tV &= E\left(V_t(N_{(t,\infty)})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\Pi_{[t,\infty)})|T_x > t\right) \\
&= E\left(V_t(N_{(t+1,\infty)}) + V_t(N_{(t,t+1]})|T_x > t\right) \\
&\quad -E\left(V_t(\Pi_{[t+1,\infty)}) + V_t(\Pi_{[t,t+1)})|T_x > t\right) \\
&= vp_{x+t}E\left(V_{t+1}(N_{(t+1,\infty)})|T_x > t+1\right) \\
&\quad -vp_{x+t}E\left(V_{t+1}(N_{(t+1,\infty)})|T_x > t+1\right) \\
&\quad +vE\left(V_{t+1}(N_{(t,t+1]})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\Pi_{[t,t+1)})|T_x > t\right).
\end{aligned}$$

Ako se premija plaća godišnje prenumerando u iznosu P za vrijeme života osobe, dobili smo

$$ {}_tV = vp_{x+t}\,{}_{t+1}V + vE\left(V_{t+1}(N_{(t,t+1]})|T_x > t\right) - P \tag{4}$$

Dakle, (4) nam daje rekurzivnu formulu za premijsku rezervu.

Primjer (doživotno osiguranje života)
Prepostavimo da se premija plaća u neto iznosu, tj $P = P_x$. Uočimo $V_{t+1}(N_{(t,t+1]}) = 1$ ako $T_x \in [t, t+1)$, a 0 inače. Tako da

$$E\left(V_{t+1}(N_{(t,t+1]})|T_x > t\right) = E\left(\mathbf{1}_{(t,t+1]}(T_x)|T_x > t\right) = q_{x+t}.$$

Iz (4) slijedi dakle

$$({}_tV + P_x)(1+i) = p_{x+t}\ {}_{t+1}V + q_{x+t}.$$

Probajte dati intuitivnu interpretaciju gornjoj jednakosti. Nju možemo napisati i kao

$$({}_tV + P_x)(1+i) = {}_{t+1}V + (1 - {}_{t+1}V)q_{x+t}.$$

Očekivana svota pod rizikom [expected death strain] u godini $(t, t+1]$ je

$$EDS = (1 - {}_{t+1}V)q_{x+t}.$$

To je očekivanje sl. varijable ADS, koja ima zakon radiobe kao $\mathbf{1}_{(t,t+1]}(T_x)(1 - {}_{t+1}V)$, ali uz uvjet $T_x > t$, tj.

$$ADS = \mathbf{1}_{(0,1]}(T_{x+t})(1 - {}_{t+1}V).$$

Sl. varijabla ADS je stvarna svota pod rizikom u godini $(t, t+1]$ [actual death strain]. Razlika

$$EDS - ADS$$

je sl. varijabla i zove se *dobitak od smrtnosti* u godini $(t, t+1]$.

Uzmite n jednakih i nezavisnih polica osiguranja života i pomoću njih dajte interpretaciju gore uvedenim pojmovima. Isti pojmovi se definiraju i za druge tipove životog osiguranja.

Zillmerizirana rezerva

Kako osiguravatelji moraju u premije uračunati i vlastite troškove (početne, periodične i administrativne) oni tipično zaračunavaju bruto premije u kojima su ti troškovi uključeni. Ako uključimo ove troškove i u izračun pričuve govorimo o Zillmeriziranoj rezervi.

Primjer

Osiguranje više života

Stanje združenih života

Za m osoba koje su trenutno starosti $x_1, \ldots, x_m$ uvedimo

$$T_k = T_{x_k}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Združeno stanje ovih osoba označavamo s

$$u = x_1 : x_2 : \cdots : x_m \, .$$

To stanje doživljava pad ("smrt") u trenutku smrti prve od njih

$$T(u) = \min(T_1, \ldots, T_m).$$

Ako pretpostavimo da su sl. var. $T_1, \dots, T_m$ nezavisne funkcija doživljenja za $T(u)$ je

$$ {}_t p_{x_1:x_2:\cdots:x_m} := P(T(u) > t) = \prod_{k=1}^{m} P(T_{x_k} > t), $$

a intenzitet smrtnosti za $T(u)$ je

$$ \mu_{u+t} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t} $$

Primjer

Stanje zadnjeg preživjelog

Ovo stanje označavamo sa

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \cdots : x_m}$$

i ono se smatra nepromjenjenim sve dok je i posljednja osoba iz ove skupine živa. Dakle stanje pada u trenutku:

$$T'(u) = \max(T_1, \ldots, T_k)\,.$$

Uz oznaku $B_k = B_k(t) = \{$ osoba k je živa u trenutku t $\}$, imamo iz Sylvesterove formule

$$\begin{aligned}
&{}_t p_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}} := P(T'(u) > t) = \\
&\quad = \; P(B_1 \cup \cdots B_k) \\
&\quad = \; \sum_i P(B_i) - \sum_{i<j} P(B_i \cap B_j) + \sum_{i<j<k} P(B_i \cap B_j \cap B_k) - \cdots \\
&\qquad\; -(-1)^m P(B_1 \cap \cdots B_m) \\
&\quad =: \; s_1^t - s_2^t + s_3^t - \cdots + s_m^t
\end{aligned}$$