Kamate i tokovi novca

Bojan Basrak

2008

Uvod

Proizvoljan skup financijskih transakcija, ugovora ili planova, možemo zapisati kao tzv. tok novca. Tokovi novca stoga predstavljaju osnovni objekt u financijama. Njihovo vrednovanje ili usporedba jedan je od naših glavnih problema.

Tok novca [cash flow] je niz uredjenih parova realnih brojeva $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$.

Konstanta m u definiciji može biti prirodan broj ili $+\infty$, pa razlikujemo konačne i beskonačno prebrojive tokove novca.

Konstante $t_j \in \mathbb{R}$ zovemo vremena, a $c_j \in \mathbb{R}$ iznosi.

Za ovakav tok novca kažemo i da je *jednostavan* ili *deterministički*. Ovisno o predznaku iznose c_j zovemo uplate odn. isplate. Kako se transakcije u po ovoj definiciji isljučivo u diskretnim vremenskim trenucima kažemo da je $\mathcal{C}$ deterministički diskretni tok novca.

Primjer (zero-coupon bond)

j	t_j	c_j	opis
1	0	-1000.00	isplata
2	1	1100.00	uplata

Povijesno najvažniji primjer nerizičnih tokova novca su obveznice američke državne riznice (Treasury). Ovisno o datumu dospijeća one se zovu Treasury Bonds/Notes/Bills – $> 10g, 1 - 10g, < 1g$, (u hrvatskom razlikujemo obveznice i kratkoročne zapise). Drugi primjeri tokova novca koje predstavljamo determinističkim (odn. nerizičnim) tokovima novca su kratkoročna oročena štednja kod "boljih" banaka, državne obveznice, financijske rente.

Slučajni tok novca je niz dvodimenzionalnih slučajnih vektora $((T_j, C_j) : j = 1, \ldots, M)$.

I ovdje se slučajne varijable C_j zovu iznosi, a T_j vremena. Duljina niza M je takodjer (poopćena) slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ovakav tok novca je još uvijek diskretan, no očito predstavlja poopćenje originalne definicije.

Primjer (obiteljski izdaci za sljedeći mjesec)

j	T_j	C_j	Opis
1	1	-160.23	račun za struju
2	T_2	C_2	isplata s automata
3	10	C_3	račun za telefon
4	15	-2190.20	rata za kredit
5	25	5200.00	osobni dohodak

Primjeri: Korporacijske obveznice. Dionice. Osiguranje života. Životne rente. Igre na sreću. Osiguranje imovine. Derivativi. Investicijski projekti.

$\lrcorner$

Kamata je naknada koju neka osoba plaća drugoj osobi za korištenje kapitala. Slične naknade plaćamo i za posudbu nekog drugog dobra, stana npr.

Kako u pravilu svi preferiramo 1 euro danas u odn. na 1 euro za godinu dana, kamata je gotovo bez iznimke strogo pozitivna. Ona izražava vremensku promjenu vrijednosti novca. Ako ne znamo kako se ta vrijednost mijenja, ne možemo usporediti različite ekonomske planove niti racionalno donositi poslovne ili financijske odluke.

Kapital i kamata su najčešće izraženi u jedinicama istog dobra, npr. u terminima neke apstraktne monetarne jedinice. Takodjer, kamata se odnosi na unaprijed dogovorenu vremensku jedinicu, tipično - godinu dana.

Složeno ukamaćivanje

Ukamaćivanje (tj. obračun kamate) se odvija tipično u diskretnim vremenskim trenucima (danima, mjesecima, godinama). Stoga je u nastavku korisno fiksirati jednu vremensku jedinicu. *Osnovna vremenska jedinica* neka je 1 godina. Kamata se isplaćuje na kraju fiksiranog perioda. Na investiciju u iznosu 1 uloženu u trenutku t na period od 1 godine, isplaćuje se u trenutku $t+1$ iznos $1+i(t)$. Broj $i(t) > -1$ naziva se *(efektivna) kamatna stopa* za jedinični vremenski period $[t, t+1]$.

Mi pretpostavljamo (što je često nerealno) da kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala. Dakle na iznos c dobit ćemo

$$c(1+i(t)).$$

Dakle, u sustavu *složene kamate*, ako uložimo iznos c u $t=0$ imat ćemo u trenutku $n \in N$ (tj nakon n godina)

$$c(1+i(0))(1+i(1))\cdots(1+i(n-1))\,.$$

Kamatne stope su obično nenegativne, no to ne mora uvijek biti tako. Npr. u Japanu krajem 1998. kamatne stope na riznične zapise bile su negativne, točnije -0.004%. U takvom slučaju dakako isplativije je držati gotovinu nego ulagati. Ponekad investitorima to ipak ne mora odgovarati, u japanskom slučaju npr. jednostavnije i brže je bilo elektronski trgovati zapisima riznice nego gotovinom. Kako god bilo, nije zabilježeno niti je ekonomski opravdano očekivati da će kamatne stope pasti znatno ispod 0 (s realnim k.s. druga je stvar dakako).

Akumulacijski faktori

Za $t_1 \leq t_2$ definiramo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao *akumulaciju* (tj. ukupni kapital) do trenutka t_2 koju proizvodi depozit 1 investiran u trenutku t_1 i zovemo ga *akumulacijski faktor za period* $[t_1, t_2]$. Naravno, $A(t, t) = 1$. Akumulacijske faktore (zasad) smatramo unaprijed poznatim (predvidivim, odn. determinističkim).

Očito je

$$A(t, t + 1) = 1 + i(t).$$

Ponekad zbog jednostavnosti pretpostavljamo da se kamata ne mijenja, tj da je $i(t) = i$ za sve $t = 0, 1, \ldots n - 1$. Tada ćemo za depozit c nakon n godina dobiti

$$c(1 + i)^n \, .$$

Gornji iznos zovemo i akumulacija od c za n godina po kamatnoj stopi i. Primjetimo, kako je $1 + i > 0$, gornji izraz je smislen i ako n nije prirodan broj.

Ponekad se kamata obračunava na još jedan bitno različit način. Taj je danas rijetko u upotrebi (Hrvatska je tu donekle izuzetak).

Primjer (Jednostavno ukamaćivanje) Ako je iznos c deponiran uz uvjet da mu se pridodaje jednostavna kamata po stopi i godišnje, tada se nakon $t > 0$ godina isplaćuje iznos

$$c(1 + ti).$$

Dakle, godišnja kamatna stopa i nakon 1 godine ulogu pridodaje iznos ci. Obično je $0 < i < 1$ i izražava se postotkom, npr.

$$i = 0.09 = \frac{9}{100} = 9\%.$$

Duljina vremenskog perioda t u gornjem izrazu ne mora biti cijeli broj. Nakon t godina jednostavna kamata iznosu c pridodaje

$$i_s(i, t, c) := cti\,.$$

$\lrcorner$

Primjer(Jednostavno ukamaćivanje - nekonzistentnost)

Uzmimo $n = 2$, po isteku dvije godine dobit ćemo iznos $c(1 + 2i)$. Ako uz iste uvjete ponovo uložimo iznos koji nam pripada nakon prve godine $c(1 + i)$ dobit ćemo iznos $c(1 + i)(1 + i)$. Razlika je dakle

$$ci^2.$$

Taj iznos je u 2. godini donijela kamata iz 1. godine. Indukcijom vidimo da takvim ulaganjem nakon n godina dobivamo

$$c(1 + i)^n\,,$$

od čega je sama kamata $c((1 + i)^n - 1)$. ⌟

U sistemu jednostavne kamate, kamata ne donosi kamatu $\rightarrow$ **nekonzistentnost**.

Pretpostavimo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Investicija u iznosu 1 u trenutku t_0 u trenutku t_2 vrijedi $A(t_0, t_2)$. S druge strane ako akumulirani iznos u trenutku t_1 reinvestiramo do t_2 dobit ćemo

$$A(t_0, t_1)A(t_1, t_2).$$

Reći ćemo da su akumulacijski faktori konzistentni ako

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$$

za sve $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Primjer (Nominalne kamatne stope) Pretpostavljamo: vremenska jedinica je i dalje 1 godina, a kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala. Promatramo transakcije u trajanju h, gdje h nije nužno cijeli broj. Dovoljno je promatrati povrat na depozit u iznosu 1.
Ako je iznos 1 investiran u trenutku t, $A(t, t+h)$ predstavlja njegovu vrijednost u trenutku $t+h$, $h > 0$. Možemo dakako pisati

$$A(t, t+h) = 1 + hi_h(t). \tag{1}$$

Broj $i_h(t)$ definiran ovim izrazom nazivamo *godišnja nominalna kamatna stopa u periodu* $[t, t+h]$, dakle

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}\,.$$

Primjetite da uz $i_h(t)$ kao godišnju k.s. u sustavu jednostavne kamate dobijemo baš $A(t, t+h)$ kao akumulaciju od iznosa 1 u intervalu $[t, t+h]$.

Za $h = 1$ nominalna i efektivna stopa su jednake, odnosno $i_1(t) = i(t)$. Ako pretpostavimo da su kamatne stope (odn. akumulacijski faktori $A(t, t+h)$) neovisne o trenutku t. Tada pišemo

$$i_h(t) = i_h, \qquad \text{za svako } t\,.$$

Tada je dakako i $i(t) = i_1$ za svaki t.
Kada vrijedi ova prepostavka govorimo o *sustavu fiksne kamatne stope*. Dakle, tada $A(t, t+h)$ ovisi samo o h.

Najvažniji poseban slučaj je $h = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$, a u praksi posebno polugodišnje, kvartalne, mjesečne ili dnevne transakcije, tj. $h = 1/2, 1/4, 1/12, 1/365$. Tada pišemo

$$i_{1/p} = i^{(p)}, \qquad p \in \mathbb{N}\,,$$

dakle uvodimo samo novu oznaku, a (1) i dalje kaže da iznos 1 položen u bilo kom času po isteku $1/p$ godina daje

$$1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\,.$$

Kaze se da je $i^{(p)}$ godišnja *nominalna kamatna stopa plativa (konvertibilna)* p *puta godišnje [convertible* p*thly].*

Primjer (Nominalne kamatne stope i dalje traje)
Primjetite ako je nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje $i^{(p)}$, tada je e.k.s. za jedan period **duljine** $1/p$ zapravo $i^{(p)}/p$ (to je tzv. periodna stopa).

Npr ako je $i^{(p)} = 12\%$, to znači da je 3% kvartalna e.k.s. Tj. posudimo li 100EUR za tri mjeseca ćemo morati vratiti 103EUR uz ove uvjete. $\lrcorner$

Primjetimo ako je tržište novca *konzistentno* tada akumulacijski faktori zadovoljavaju

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2), \qquad \text{za svako } t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{2}$$

Tada indukcijom slijedi

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2) \cdots A(t_{n-1}, t_n), \qquad \text{za svako } t_0 \leq \cdots \leq t_n.$$

Primjer (veza fiksne nominalne i e.k.s. stope) Pretpostavimo konzistentnost tržišta (iako u praksi to ne možemo često sresti zbog troškova transakcije, poreza i sl.), te fiksnu efektivnu kamatnu stopu.
Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$, izračunajmo $i^{(p)}$. Iz (1) imamo

$$A(t, t + \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)},$$

posebno jer je e.k.s. fiksna

$$A(0, 1/p) = A(1/p, 2/p) = \cdots = A((p-1)/p, 1)\,,$$

pa po principu konzistencije

$$\left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p = 1 + i, \qquad \text{jer}$$

$$A(0, 1/p) A(1/p, 2/p) \cdots A((p-1)/p, 1) = A(0, 1)\,,$$

Odakle slijedi

$$i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1\right) \ .$$

Iz binomne formule se lako vidi (provjerite):

$$i^{(p)} \leq i, \qquad \text{za svaki } p \geq 1.$$

$\lrcorner$

Ako za neko t postoji

$$r(t) := \lim_{h\to 0+} i_h(t)\,,$$

tada se ova veličina naziva *intenzitet kamate (po jedinici vremena) u trenutku* t. U sustavu fiksne kamatne stope vrijedi

$$r = r(t) = \lim_{p\to\infty} i^{(p)} = ((1+i)^x)'\,|_{x=0}\,.$$

Dakle

$$r = \ln(1+i) \quad \text{odn.} \quad e^r = 1+i\,.$$

Ideja: prinos od kamate na iznos c u infinitezimalno malom intervalu $[t, t+\mathrm{d}t]$ je

$$\approx c r(t) \mathrm{d}t.$$

Teorem 1 *Ako funkcija* $A : [0,\infty)^2 \longrightarrow (0,\infty)$ *zadovoljava princip konzistencije (2), te ako je* $g(t) = A(0,t)$ *neprekidno derivabilna funkcija na* $[0,\infty)$*, tada postoji neprekidna funkcija* $r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *tako da*

$$A(t_1,t_2) = \exp(\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt), \qquad \text{za sve } t_2 > t_1 \geq 0$$

Dokaz. Iz (2) slijedi $A(t,t) = 1$ za svako $t \geq 0$. Definirajmo

$$r(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{A(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{A(0,t+h)-A(0,t)}{hA(0,t)}$$

i $f(t) = \ln g(t)$. Sada je

$$f'(t) = g'(t)/g(t) = r(t).$$

Dakle f je primitivna funkcija funkcije r koja je neprekidna, pa je primjenjiva Newton-Leibnizova formula. Sad integriranjem slijedi

$$f(t) = \ln A(0,t) = \int_0^t r(s)\mathsf{d}s$$

i konačno iz (2) slijedi $A(t_1, t_2) = \exp(f(t_2) - f(t_1))$, tj. tvrdnja teorema. $\square$

Mi u nastavku pretpostavljamo da postoji (po dijelovima) neprekidna funkcija r t.d. vrijedi

$$A(t_1, t_2) = \exp(\int_{t_1}^{t_2} r(t)\mathsf{d}t), \qquad \text{za sve } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Tada vrijedi i

$$i_h(t) = \frac{\exp(\int_t^{t+h} r(s)\mathsf{d}s) - 1}{h}.$$

Očito u točkama neprekidnosti od r vrijedi

$$i_h(t) \approx \frac{e^{r(t)h} - 1}{h} \to r(t)$$

za $h \to 0+$, dakle intenzitet kamate je upravo $r(t)$ za takve t. Pokažite to rigorozno.

Nadalje, ako je $r(t) \equiv r$ za svako t, tada

$$A(0,t) = e^{rt} = (1+i)^t, \qquad \text{za sve } t \geq 0\,,$$

a ne samo cijele brojeve.

Posebno, u periodu $[0, t]$, u sustavu složene kamate glavnici c se dodaje iznos

$$c\left(\exp(\int_0^t r(s)\mathsf{d}s) - 1\right).$$

Taj iznos se naziva i *prihod od kamata*, a u slučaju da je kamata fiksna $(r \equiv \ln(1+i))$ označavamo ga sa:

$$i_c(i, t, c) := c(A(0, t) - 1) = c((1+i)^t - 1).$$

Korolar 2 *Uz proizvoljnu fiksnu e.k.s.* $i > 0$ *i glavnicu* $c > 0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} i_s(i,t,c) &> i_c(i,t,c), \qquad \textit{ako} \quad t \in (0,1), \\ i_s(i,t,c) &< i_c(i,t,c), \qquad \textit{ako} \quad t \in (1,\infty). \end{aligned}$$

Dokaz. Koristite $i_s(i, t, c) = itc$ i pokažite $f(t) = c((1+i)^t - 1)$ je strogo konveksna i rastuća.

U praksi se jednostavno ukamaćivanje više gotovo i ne koristi, osim iznimno za obračun kamate u kraćim vremenskim razmacima, kada za male i daje približno istu kamatu kao i složeno. Iznimka je i obračun zateznih kamata u RH, za koji Vjerodostojno tumačenje Sabora RH od 7. svibnja 2004. kaže

> *"U dvojbi može li se konformni [složeni op. BB] način uračunavanja zateznih kamata primjenjivati u slučaju kašnjenja s ispunjenjem dospjelih obveza za razdoblje dulje od godinu dana smatra se da to nije moguće već se za razdoblje dulje od godinu dana treba primjenjivati proporcionalni (prosti) [jednostavni op. BB] način obračuna zateznih kamata."*

Primjer (jednostavno i složeno ukamaćivanje - usporedba Neka se zatezna kamata obračunava jednostavnim sustavom po stopi od 15%. Ako je dužnik duguje iznos 1 i može ga uložiti po e.k.s. i tokom 15 godina, koliki mora biti i da bi mu se odugovlačenje s otplatom duga isplatilo?

R. Mora biti $i_s(0.15, 15, c) < i_c(i, 15, c)$, tj.

$$15 \cdot 0.15 < (1 + i)^{15} - 1.$$

Dakle i mora biti $> 8.17466\%$.

Propozicija 3 *Uz fiksnu e.k.s.* $i > 0$ *vrijedi*

$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > i^{(4)} > \cdots$$

Dokaz. Pokažite $f(t) = t(e^{r/t} - 1)$ je strogo padajuća na $[0, \infty)$.

Sadašnje vrijedosti tokova novca

Ako u trenutku t_1 investiramo depozit u iznosu $c\exp(-\int_{t_1}^{t_2} r(s)\mathrm{d}s)$ njegova vrijednost u trenutku t_2 naraste do c. Kažemo da je

$$c\exp(-\int_{t_1}^{t_2} r(s)\mathrm{d}s) = c/A(t_1,t_2)$$

diskontirana vrijednost u t_1 *iznosa* c *koji dospijeva u* t_2. Posebno

$$c\exp(-\int_{0}^{t} r(s)\mathrm{d}s)$$

zovemo *sadašnja vrijednost iznosa* c *koji dospijeva u trenutku* t.

U nastavku je korisno imati i oznaku

$$v(t) = \exp(-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s)$$

za sadašnju vrijednost jediničnog iznosa koji dospjeva u trenutku $t \geq 0$. Za $t < 0$, vrijednost $v(t)$ je akumulacija od iznosa 1 u intervalu $[t, 0]$.

Sadašnja vrijednost toka novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ je

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{m} c_j v(t_j)\,, \tag{3}$$

uz prepostavku da red konvergira ako je $m = \infty$. Kada je e.k.s. i fiksna za sad. vrijednost koristimo i oznaku $\mathit{NPV}_{\mathcal{C}}(i) = V_0(\mathcal{C})$.

Primjetite da je tek na osnovu poznate k.s. moguće odrediti koji izmedju više tokova novca ima veću vrijednost. Uz neke jednostavne prepostavke [zero transaction costs, interest independent on scaling, no satiation], taj izbor je jasan i neovisan o osobnim preferencama pojedinca u pogledu buduće potrošnje ili sl.

Neprekidni tokovi novca

Kao matematičku idealizaciju, možemo promatrati i *neprekidne tokove novca*, npr. kada modeliramo niz vrlo frekventnih isplata.

Neprekidni tok novca je (lokalno) Riemann integrabilna funkcija $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Vrijednost $\rho(t)$ zovemo stopa isplate po jedinici vremena u trenutku t.

Heuristički govoreći, u infinitezimalno malom vremenskom periodu $[t, t+\mathrm{d}t]$ isplata iznosi

$$\rho(t) \cdot \mathrm{d}t \, .$$

Ako ukupnu akumulaciju u intervalu $[0, t]$ označimo s $M(t)$, ona se u infinitezimalnom intervalu $[t, t + \mathrm{d}t]$ uveća za

$$M(t)r(t)\mathrm{d}t + \rho(t)\mathrm{d}t \, ,$$

pa M, pretpostavljamo, mora zadovoljati diferencijalnu jednadžbu

$$M'(t) = M(t)r(t) + \rho(t) \, .$$

Ako je $M(0) = 0$, rješenje se nadje kao

$$M(h) = \int_0^h \rho(t) \exp(\int_t^h r(s) \mathsf{d}s) \mathsf{d}t \,.$$

Pa u skladu sa (3), sadašnju vrijednost neprekidnog toka novca $\mathcal{C} = (\rho(t))_{t\in[0,h]}$ računamo kao

$$V_0(\mathcal{C}) = \int_0^h v(t)\rho(t) \mathsf{d}t \,.$$

Ako nas zanima vrijednost u nekoj drugoj vremenskoj točki t' dovoljno je podijeliti gornji iznos sa $v(t')$. To dakako vrijedi i za diskretne tokove novca.

Označimo s $\mathcal{C}$ diskretni ili neprekidni tok novca, a njegovu vrijednost u času t sa $V_t(\mathcal{C})$, tada za sve $s, t \in \mathbb{R}_+$ imamo formulu

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{v(s)}{v(t)} V_s(\mathcal{C}).$$

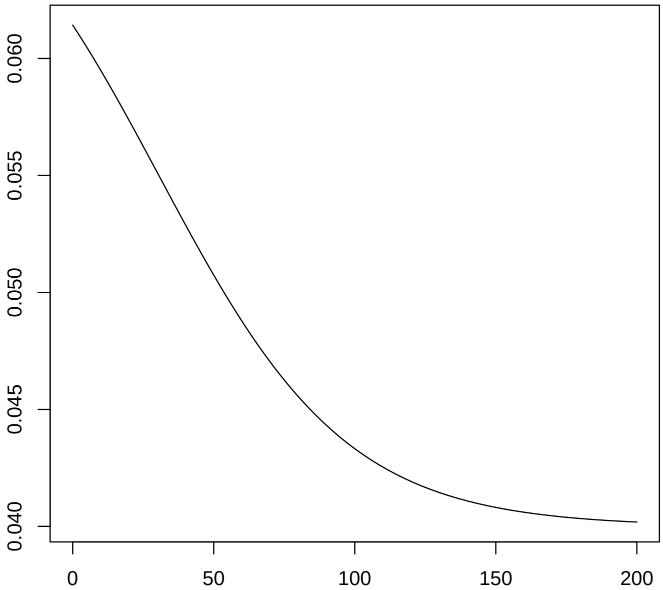
Posebno

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{1}{v(t)} V_0(\mathcal{C}).$$

Intenzitet kamate se katkad modelira Stoodleyovom formulom

$$r(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}}\,,$$

za pozitivne konstante p, r i s. U praksi ove parametre procjenjujemo nekom statističkom metodom. Graf funkcije r uz parametre $r = 0.4$, $p = 0.04$ and $s = 0.03$ je ilustriran na sljedećoj slici



S kamatnim stopama nije sve uvijek baš tako jednostavno, iako je za nas zgodno pretpostaviti da postoji jedna e.k.s. unaprijed poznata za sve buduće periode, po kojoj možemo i ulagati i posudjivati novac, situacija je dakako puno kompleksnija.

Buduće kamatne stope su nam često nepoznate, a njihov iznos ovisi i o rizičnosti svake pojedine posudbe, tj. o procjeni rizika da dužnik neće vratiti novac vjerovniku u ugovorenom roku. Dakako, to znači da ovisi i o duljini perioda kao i o pouzdanosti dužnika. Npr. e.k.s. na US T-Bills (91d-1y) na dan 27.3.2003. iznosila je 1.14%, jer se smatra da je vjerojatnost da US Treasury ne isplati dug zapravo 0. Nakon toga po rizičnosti dolaze kratkoročne bankovne garancije (do 6m) koje su tog dana imala e.k.s. od 1.22%. Jedna od važnijih k.s. je i *LIBOR* po kojoj bolje banke na UK (i EU) tržištu obračunavaju kamate jedna drugoj. Mnoge druge kamatne stope vezane su uz LIBOR (ili alt. EURIBOR), pa tako i kamatne stope u RH, npr. komercijalni krediti banaka poduzećima.

U stvarnom svijetu važnu ulogu ima i inflacija, naime ponekad se u financijskoj praksi računaju i tzv. "realne kamatne stope"

$$i_{real} = i - i_{infl} \,,$$

gdje je i_{infl} opažena ili pretpostavljena inflacija u periodu koji promatramo. Stoga zemlje s većom inflacijom imaju dakako i veće efektivne kamatne stope.

U nastavku ćemo zbog jednostavnosti isticati samo dvije kamatne stope: e.k.s. i po kojoj možemo ulagati i posudjivati novac, te pripadni intenzitet kamate (ili ovotrenutnu kamatnu stopu) r.

Za obje ćemo prepostaviti da su fiksne i ne ovise o uloženom kapitalu. U praksi bismo ih mogli općenito modelirati slučajnim procesima (to ćemo za naše potrebe iz računskih razloga ignorirati). Još jedna praktična strategija bi mogla biti da u izračunima vrijednosti budućih tokova novca koristimo više različitih, ali fiksnih kamatnih stopa, i uzmimo u obzir vjerojatnosti svakog od tih scenarija.

Složeno ukamaćivanje uz fiksnu e.k.s.

Prepostavljamo fiksnu efektivnu kamatnu stopu u iznosu i. Uočimo

$$v(t) = e^{-rt} = v^t\,,$$

uz oznaku $v = e^{-r}$.

Primjer (Kamata unaprijed) Za posudbu iznosa 1 sada, u trenutku 1 moramo platiti naknadu i. Kolika bi naknada bila ako je želimo platiti odmah?

Odgovor je očito

$$d = vi = \frac{i}{1+i} = 1 - v\,.$$

Iznos d se zove *efektivna diskontna (ili anticipativna) kamatna stopa po jedinici vremena*.

Primjer (Kamata neprekidno) Pretpostavimo da kamatu želimo otplaćivati neprekidno po fiksnoj stopi u intervalu $[0,1]$. Označimo taj iznos sa x, iz

$$d = \int_0^1 e^{-rt} x \mathsf{d}t = \frac{x}{r}(1 - e^{-r}) = \frac{x}{r} d$$

slijedi

$$x = r\,.$$

Četiri osnovne konstante korištene kod složenog ukamaćivanja dakako odredjuju jedna drugu na sljedeći jednostavan način

	r	i	v	d
r	$\cdot$	$e^r - 1$	e^{-r}	$1 - e^{-r}$
i	$\ln(1+i)$	$\cdot$	$1/(1+i)$	$i/(1+i)$
v	$-\ln v$	$1/v - 1$	$\cdot$	$1 - v$
d	$-\ln(1-d)$	$1/(1-d) - 1$	$1 - d$	$\cdot$

Uočimo

$$\lim_{i \to 0+} \frac{r(i)}{i} = \lim_{i \to 0+} \frac{\ln(1+i)}{i} = 1$$

$$\lim_{i \to 0+} \frac{d(i)}{i} = \lim_{i \to 0+} \frac{i/(1+i)}{i} = 1$$

Primjer (Kamata p puta godišnje) Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$. Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenucima $1/p, 2/p, \ldots, p/p$ u jednakim iznosima, recimo x/p. Nadjimo x iz

$$i = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x}{p}(1+i)^{k/p} = \frac{x}{p} \frac{i}{(1+i)^{1/p} - 1}\,.$$

Slijedi $x = p((1+i)^{1/p} - 1) = i^{(p)}$, x je dakle upravo nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje. To objašnjava i ovakav naziv, jer je kamata nominalno $i^{(p)}$ plativo p puta godišnje (stvarna e.k.s. je i dalje i dakako).

Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$ u jednakim iznosima, recimo $d^{(p)}/p$. Izjednačavanjem vrijednosti u $t=0$ direktno se vidi da je

$$(1-d^{(p)}/p)^p = 1-d\,,$$

odnosno

$$d^{(p)} = p(1-(1-d)^{1/p})$$

Veličina $d^{(p)}$ se zove *nominalna diskontna kamatna stopa plativa* p *puta godišnje.*

Intuitivno je jasno da vrijedi $d^{(p)} < i^{(p)}$. Zapravo vrijedi

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \cdots > r > \cdots > d^{(3)} > d^{(2)} > d^{(1)} = d$$

Pravilni tokovi novca (Jednostavne financijske rente)

Financijske rente su (deterministički) tokovi novca kod kojih se u pravilnim vremenskim razmacima vrše uplate u jednakim iznosima.

Promotrimo prvo tok novca kod kojega se u trenucima $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ uplaćuje iznos 1, tj.

$$\mathcal{C} = \{(i, 1) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Takvu rentu zovemo *postnumerando ili plativa unatrag (annuity-certain)*. Njena sadašnja vrijednost uz fiksnu e.k.s. i iznosi

$$v + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}\,. \tag{4}$$

Iz formule za sadašnju vrijednost toka novca, jasno je da ako uplate iznose c umjesto 1 sadašnja vrijednost rente postaje uvećana za faktor c.

Ako se uplate iznosa 1 vrše u trenucima $t_1 = 0, t_2 = 2, \ldots, t_n = n-1$ renta se zove *prenumerando ili plativa unaprijed (annuity-due)*. Njena sadašnja vrijednost je:

$$1 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d} \,. \tag{5}$$

U trenutku zadnje uplate obje ove rente imaju vrijednost

$$(1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \,,$$

a godinu dana nakon toga

$$(1+i)^n + \cdots + (1+i)^2 + 1 + i = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Ove vrijednosti se nekad zovu i akumulacije financijskih renti.

Primjer (Perpetuities – vječne ili beskonačne rente) Pogledajmo sada slučaj kada se uplate vrše postnumerando odn. prenumerando, ali beskonačno dugo ($n = \infty$). Jasno je da im je vrijednost u jednom odn. drugom slučaju (ako vrijedi $i > 0$)

$$v + v^2 + v^3 + \cdots = \tfrac{1}{i}\,, \tag{6}$$

$$1 + v + v^2 + \cdots = \tfrac{1}{d}\,. \tag{7}$$

Primjer (Neprekidne rente) Neka je $n \geq 0$ ne nužno cijeli broj. Sadašnja vrijednost rente koja se isplaćuje kontinuirano u intervalu $[0, n]$ po fiksnoj godišnjoj stopi 1 iznosi

$$\frac{1 - v^n}{r}\,. \tag{8}$$

Tradicionalno se u aktuarskoj literaturi vrijednosti u formulama (4)– (8) označavaju sa $a_{\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{\infty}|}$, $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$, $\bar{a}_{\overline{n}|}$, .

Primjer (Odgođene rente) Ako rente imaju odgodu od m godina, njihovu sadašnju vrijednost nalazimo jednostavnim argumentima, npr. ako

$$\mathcal{C} = \{(i, 1) : i = m + 1, \ldots, m + n\}.$$

tada

$$V_0(\mathcal{C}) = v^m a_{\overline{n}|}, \tag{9}$$

ili $a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}$ u oznakama uvedenim gore.

Primjer (Pravilno pomjenjive rente) Posebno važne su linearno rastuće rente. Takav je npr. tok novca $\mathcal{C}_1$ kod kojega se:

- iznosi $1, 2, \ldots, n$ uplaćuju se u trenucima $1, \ldots, n$

Sadašnju vrijednosti ovakve promjenjive rente označimo sa $V_0(\mathcal{C}_1)$. Po definiciji je

$$V_0(\mathcal{C}_1) = v + 2v^2 + \cdots + nv^n,$$

otkuda množenjem s $1+i$ i oduzimanjem dviju jednakosti slijedi

$$iV_0(\mathcal{C}_1) = 1 + v + \cdots + v^{n-1} - nv^n.$$

Pa vrijedi

$$V_0(\mathcal{C}_1) = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}.$$

Ako neka renta traje n godina i počinje uplatom iznosa a u trenutku 1, te nakon toga uplaćuje iznose $a + b, a + 2b, \ldots, a + (n-1)b$ u trenucima $2, 3, \ldots, n$ njena sad. vrijednost lako se nadje kao

$$(a-b)a_{\overline{n}|} + bV_0(\mathcal{C}_1)\,.$$

Primjer (Rente koje se isplaćuju u višegodišnjim intervalima) Za $r \in \mathbb{N}$, neka se renta uplaćuje u iznosu 1 ali u trenucima $r, 2r, \ldots, kr$. Nadjite sadašnju vrijednost ovakve rente u terminima dosadašnjih kao

$$\frac{a_{\overline{kr}|}}{(1+i)^r a_{\overline{r}|}}$$

Primjer (Rente plative p puta godišnje) Neka se u trenucima $1/p, 2/p, \ldots, n \cdot p/p$ uplaćuje iznos $1/p$. Sadašnja vrijednost ovakve postnumerando rente je

$$\frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|} \, .$$

Naime uplata iznosa $i^{(p)}/p$ u trenucima $(k-1)+1/p, (k-1)+2/p, \ldots, k$ ekivalentno je uplati iznosa i u trenutku k.
Ako se radi o prenumerando renti tj. uplate su u trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (n \cdot p - 1)/p$ dobijemo

$$\frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|} \, .$$

Primjer (Obveznice)
Obveznice imaju *nominalnu vrijednost* N, (npr. 1000\$) i *godišnju kuponsku isplatu* c (npr 100\$ ili 10% dakle u ovom primjeru), te *datum dospijeća* m (npr. 10 godina). One vlasniku daju pravo na tok novca

$$\mathcal{C} = \{(i, c_i) : i = 1, 2, \ldots, m\}$$

gdje su $c_i = c$ za $i < m$, a $c_m = c + N$. Vrijednost im je lako naći ako nam je poznata efektivna kamatna stopa i

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{c}{(1+i)^k} + \frac{N}{(1+i)^m}.$$

To bi dakle bila i *fair* cijena obveznice, no ako vrijedi obrnuto, pa nam je poznata cijena obveznice te njeni parametri N, c i m, mogli bismo se pitati uz koju e.k.s. je to *fair* cijena obveznice. Drugim riječima iz cijena obveznica (u npr FT ili WSJ) mogli bismo isčitati pretpostavljene buduće kamatne stope (to je tzv. prinos do dospijeća). Tabele s cijenama zapravo sadrže dvije cijene *ask* / *bid*, a razlika medju njima omogućuje zaradu dilerima.

Prinos

Kad promatramo izvjestan poslovni ili financijski plan, opisan npr. tokom novca $\mathcal{C}$, a koji se sastoji od izvjesnog niza isplata i uplata, zanimljivo je vidjeti u koju fiksnu e.k.s. i_0 te uplate i isplate imaju potpuno jednaku vrijednost. Te uplate proizvode dakle jednake isplate kao i kad bismo ih nerizično položili uz tu istu fiksnu e.k.s. i_0.

Diskretni tok novca $\mathcal{C}$ ima sadašnju vrijednost

$$\mathit{NPV}_{\mathcal{C}}(i) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{-rt_j}$$

gdje je $r = \ln(1 + i)$.

Mi tražimo intenzitet kamate $r \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{m} c_j e^{-rt_j} = 0 \tag{10}$$

Ako takvo rješenje r_0 postoji i jedinstveno je zovemo ga *intenzitet kamate impliciran transakcijom*. U tom slučaju, pripadna e.k.s. $i_0 = e^{r_0} - 1$ naziva se *prinos od transakcije* $\mathcal{C}$. Uočite da je $i_0 \in (-1, \infty)$.

Alternativno, prinos i_0 možemo definirati i kao jedinstveno rješenje u skupu $(-1, \infty)$ jednadžbe

$$\mathit{NPV}_{\mathcal{C}}(i_0) = 0\,,$$

kad ono postoji. Ponovimo, uz e.k.s. i_0 vrijednost svih uplata jednaka je vrijednosti svih isplata.

Jednadžba (10) se lako generalizira na neprekidne tokove novca.

Primjer (prinos ne postoji uvijek)

Pretpostavimo da se u vremenskim trenucima $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ i $t_3 = 2$ uplaćuju iznosi

a) $c_1 = -1.1$, $c_2 = 2.1$, $c_3 = -1$
b) $c_1 = -1$, $c_2 = 2.3$, $c_3 = -1.2$
c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1.1$
d) $c_1 = -1$, $c_2 = b$, $c_3 = -1$, $b > 0$ proizvoljan.
e) $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = a$, $a > 0$ proizvoljan.

Uočite da prinos postoji u slučaju e), te u slučaju d) za $b = 2$, u svim ostalim slučajevima prinos ne postoji.

Tok novca (odn . financijski projekt) je *profitabilan* ako je

$$NPV_{\mathcal{C}}(i_1) > 0\,,$$

gdje je i_1 e.k.s. koja vrijedi na tržistu.

Tipično je $NPV_{\mathcal{C}}(\cdot)$ padajuća funkcija, u tom slučaju projekt je profitabilan ako

$$i_0 > i_1.$$

Primjer (usporedba dva financijska projekta)

Ako odabiremo izmedju dva investicijska projekta, npr. A i B, mogli bismo ih usporediti preko njihovih prinosa i_A i i_B. Uočite da iz $i_A > i_B$ ne slijedi da je nužno projekt A profitabilniji. Potrebno je usporediti njihovu (sadašnju) vrijednost u odn. na e.k.s. na tržištu, tj. e.k.s. i_1 po kojoj se možemo zaduživati odn. ulagati svoj novac. Projekt A je profitabilniji ako vrijedi

$$NPV_A(i_1) > NPV_B(i_1).$$

Primjer (Vremenska promjenjivost kamatnih stopa)
Kako smo primjetili kamatne stope (prinosi) će na stvarnim tržištima ovisiti i o vremenu dospijeća duga, a kako dulji period predstavlja veći rizik (od *defaulta* ili promjena k.s. na tržištu npr.), prinosi su tipično veći na uloge s daljim datumom dospijeća (pokazat ćemo da svaki tok novca kod kojeg sve uplate prethode isplatama ima prinos do dospijeća). To je posebno slučaj s obveznicama ili otplatama duga. Ovisno o njihovom dospijeću [*years to maturity*], one imaju različite prinose. Posebno su važne krivulje prinosa [*yield curve*] na US Treasury bonds (i njima povezane vrijednosnice). O njima i njihovom obliku postoji i ekonomska teorija (v. google).

Teorem 4 *Za svaki konačan tok novca u kojem postoje i uplate i isplate, te sve uplate prethode svim isplatama (ili obrnuto) jednadžba (10) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Neka su (b.s.o.) $c_i > 0,\ i = 1, \ldots, k$ te $c_i < 0,\ i = k+1, \ldots, n$, za neki $1 \leq k < n$. Želimo naći r tako da

$$\left(c_1 e^{-rt_1} + \cdots c_k e^{-rt_k}\right) + \left(c_{k+1} e^{-rt_{k+1}} + \cdots c_n e^{-rt_n}\right) = 0$$

Pogledajmo vrijednost ovog toka novca u $t = t_k$, ona iznosi $f(r) = h(r) + g(r)$, gdje definiramo

$$g(r) = c_1 e^{r(t_k - t_1)} + \cdots + c_k e^{r(t_k - t_k)},$$

$$h(r) = c_{k+1} e^{-r(t_{k+1} - t_k)} + \cdots + c_n e^{-r(t_n - t_k)}.$$

Funkcije g i h su strogo rastuće, pa je i f strogo rastuća. Analizirajući funkcije g odn. h dobijemo

$$\lim_{r \to -\infty} f(r) = -\infty \qquad \text{odn.} \qquad \lim_{r \to \infty} f(r) = \infty \ ,$$

No kako je f neprekidna, slijedi da postoji jedinstvena nultočka za f. $\square$

Napomena
Prinos se ponekad definira i ako postoji jedinstveno rješenje jednadžbe $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$ na skupu $(0, \infty)$. Uvjete za postojanje takvog i daje sljedeći teorem (no mi ćemo se i dalje držati gornje definicije).

Teorem 5 *Za tok novca* $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ *definiramo* $s_r = \sum_{j=1}^{r} c_j,\ r = 1, \ldots, m$. *Ako se predznak u nizu* $s_1, \ldots, s_m$ *promjeni točno jednom i ako* $s_1 s_m < 0$, *tada jednadžba NPV*$_{\mathcal{C}}(i) = 0$ *ima jedinstveno rješenje na skupu* $(0, \infty)$.

Dokaz. Neka je b.s.o. $s_1, s_2, \ldots, s_k > 0$, a $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m \leq 0$. Uzmimo $t' \in (t_k, t_{k+1})$. Definirajmo

$$g(r) = c_1 e^{r(t'-t_1)} + \cdots + c_k e^{r(t'-t_k)}$$

i

$$h(r) = c_{k+1} e^{-r(t_{k+1}-t')} + \cdots + c_n e^{-r(t_n-t')}\ .$$

Vrijednost ovog toka novca u t' je upravo $f(r) = g(r) + h(r)$. Uočimo da je $g(0) > 0$ i g monotono raste prema ∞ za $r \longrightarrow \infty$, a s druge raste i h za $r \longrightarrow \infty$, ali prema 0 (derivirajte ili dajte ekonomski argument).
No $f(0) = s_m < 0$, a f je neprekidna dakle $f(r_0) = 0$ ima jedinstveno rješenje na $(0, \infty)$. $\square$

Net reserve (Neto pričuva) i otplata duga

Dva toka novca $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ su jednako vrijedna ako je za neko $t \in \mathbb{R}$

$$V_t(\mathcal{C}) = V_t(\mathcal{C}')\,.$$

Tada im je vrijednost jednaka za svako $t \in \mathbb{R}$ i možemo ih smatrati ekvivalentnima. Posebno sad. vrijednost toka novca zovemo *jednokratnom neto premijom*, jer uplata iznosa $V_0(\mathcal{C})$ u $t = 0$ ima jednaku vrijednost kao $\mathcal{C}$. Premija se često ne plaća na taj način. Ako se premija plaća kao tok novca $\mathcal{C}'$ i ako vrijedi gornja jednakost za neko $t \in \mathbb{R}$, tok $\mathcal{C}'$ zovemo *neto premijom* (za $\mathcal{C}$).

Premija je samo osiguravateljski izraz za tok novca kojim (obicno mi osiguranici) placamo neki drugi toka novca (obicno naknade stete koje evt. isplacuje osiguravatelj). Jednokratnu neto premiju bismo mogli smatrati i *fair* cijenom nekog toka novca.

Primjer (otplata duga) Pretpostavimo da se iznos s isplaćen u $t = 0$ (dug) otplaćuje u trenucima $1, 2, \ldots, n$ i iznosima $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Neka je w vrijednost u trenutku $t = k$ akumuliranih otplata u periodu $[0, k)$, s_k neka je ukupna vrijednost preostalog duga za period $[k, \infty)$ u času k.
Ako su premije bile u neto iznosu, tada

$$s = vr_1 + v^2 r_2 + \cdots v^n r_n.$$

Iznos w se zove i neto akumulacija za tok novca $\{(i, r_i) : i = 1, \ldots, n\}$ u trenutku k. Tada je za $k \geq 1$ očito

$$w + s_k = (1+i)^k s.$$

Još vrijedi

$$s_k = (1+i)(s_{k-1} - r_{k-1}), \qquad \text{pa} \qquad s_k = s(1+i)^k - \sum_{j=1}^{k-1} (1+i)^{k-j} r_j,$$

za $k \geq 1$, uz prepostavku $s_0 = s$, a $r_0 = 0$.

Primjer (pričuva) Pretpostavimo da želimo isplatu svote 1 u trenutku n. Ako se premija plaća godišnje prenumerando tokom perioda $[0, n)$ u iznosu P, onda je ona *neto premija* ako zadovoljava

$$P\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n .$$

Neto pričuva u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost akumuliranih otplata u periodu $[0, t)$, tj.

$$V = V_{t;\overline{n}|} = P\ddot{a}_{\overline{t}|}(1+i)^t .$$

to je tzv. retrospektivna formula.
No neto pričuvu lako možemo dobiti i računajući unaprijed kao vrijednost osigurane svote u trenutku t umanjenu za vrijednost nedospjelih premija

$$V = v^{n-t} - P\ddot{a}_{\overline{n-t}|} .$$

To je tzv. prospektivna formula za neto pričuvu. Neto rezerva se ekvivalentno računa i za druge tokove novca.

Primjer (Zillmer reserve) Pitanje je kolika mora biti premija ako uračunamo *inicijalne troškove* I i *troškove obnavljanja* e. Ovakvu premiju označavamo sa P^* i zovemo *bruto premija*.

Prepostavimo da želimo isplatu iznosa 1 u trenutku n uz ove uvjete. Postavimo jednadžbu vrijednosti u $t = 0$

$$P^* \ddot{a}_{\overline{n}|} - e \ddot{a}_{\overline{n}|} - I = v^n$$

Cilmerizirana pričuva [Zillmer reserve] u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost osigurane svote i budućih troškova umanjena za vrijednost nedospjelih premija

$$V^*_{t;\overline{n}|} = v^{n-t} + (e - P^*)\ddot{a}_{\overline{n-t}|} = (1 + I)V_{t;\overline{n}|} + I$$

Alternativno i ovu pričuvu možemo dobiti retrospektivno kao vrijednost premija umanjenu za vrijednost troškova do tog momenta.

Općenitiji tokovi novca

Za tok novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ korisno je definirati i tokove novca

$$\mathcal{C}^+(t) = ((t_j, c_j^+) : j = 1, \ldots, m,\ t_j \leq t,\ c_j > 0) \text{ i}$$
$$\mathcal{C}^-(t) = ((t_j, c_j^-) : j = 1, \ldots, m,\ t_j \leq t,\ c_j < 0)$$

te posebno njima pridružene rastuće funkcije

$$C^+(t) = \sum_{t_j \leq t} c_j^+ \text{ i } C^-(t) = \sum_{t_j \leq t} c_j^-$$

koje mjere apsolutni (nediskontirani) iznos uplaćenog/isplaćenog novca do trenutka t. Primjetite da su ove funkcije monotono rastuće, a ako je $C^{\pm}(t) < \infty,\ t > 0$ one su i zdesna neprekidne.

Uz uvjet da nam je poznat intenzitet kamate r, možemo računati sad. vrijednost dijela tokova novca $\mathcal{C}^+(t)$ i $\mathcal{C}^-(t)$ kao Lebesgue–Stieltjes integral, tj.

$$V_0(\mathcal{C}^+(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) \quad \text{i} \quad V_0(\mathcal{C}^-(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^-(s).$$

Sadašnja vrijednost toka novca $\mathcal{C}$ je sad

$$V_0(\mathcal{C}) = V_0(\mathcal{C}^+(\infty)) - V_0(\mathcal{C}^-(\infty)),$$

a ako nas zanima samo dio toka novca koji se odvija u vremenskom intervalu $[0, t]$ njegova je sad. vrijednost

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = V_0(\mathcal{C}^+(t)) - V_0(\mathcal{C}^-(t)).$$

Slično bismo mogli napraviti i za neprekidne tokove novca, no ponekad je korisno imati i puno općenitije tokove novca, npr. pretpostavimo da su zadane monotono rastuće i zdesna neprekidne funkcije C^+ i C^-, možemo ih i dalje interpretirati kao funkcije koje mjere apsolutnu (nediskontiranu) sumu uplata/isplata do trenutka t. Na taj način one odredjuju tok novca $\mathcal{C}(t)$ i njegovu sad. vrijednost

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) - \int_0^t e^{-rs} dC^-(s)$$

U pravilu su nam najinteresantniji upravo tokovi novca koji imaju neprekidan i diskretan dio, tj za njih se fje C^+ i C^- mogu napisati kao

$$C^{\pm}(t) = C^{\pm}(0) + \int_0^t \rho^{\pm}(s)ds + \sum_{0<s\leq t} \Delta C^{\pm}(s)$$

gdje je $\Delta C^{\pm}(s) = C^{\pm}(s) - C^{\pm}(s-)$, tj. skok funkcije $C^{\pm}$ u točki s.

Sadašnju vrijednost ovako općenitih tokova novca mogli bismo računati kao

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) - \int_0^t e^{-rs} dC^-(s)$$

ako je e.k.s. konstantna, ili općenito kao

$$\begin{aligned} V_0(\mathcal{C}(t)) &= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC^+(s) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC^-(s) \\ &= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC(s) \end{aligned}$$

Dakako, to nije ni približno naopćenitiji tok novca koji će nas zanimati u toku studija. Općenitije bismo mogli pretpostaviti da C^+ i C^- nisu determinističke funkcije nego slučajni procesi s monotono rastućim i zdesna neprekidnim putevima.

Naravno i intenzitet kamate r možemo modelirati sl. procesom, no ovako općeniti slučajevi su izvan interesa našeg kolegija. U nastavku ćemo se posebno ipak pozabaviti vrednovanjem diskretnih slučajnih tokova novca uz fiksnu e.k.s.