Uvod u aktuarsku matematiku

Bojan Basrak

16. ožujka 2017.

Poglavlje 1

Kamate

1.1 Uvod

Proizvoljan skup financijskih transakcija, ugovora ili planova, možemo zapisati kao tzv. tok novca. Tokove novca stoga možemo smatrati jednim od osnovnih objekata u financijama, a njihovo vrednovanje ili usporedba jedan je od naših glavnih problema.

Tok novca (cash flow) je niz uredjenih parova realnih brojeva $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$.

Konstanta m u definiciji može biti prirodan broj ili $+\infty$, pa razlikujemo konačne i beskonačno prebrojive tokove novca. Konstante $t_j \in \mathbb{R}$ zovemo vremena, a $c_j \in \mathbb{R}$ iznosi.

Za ovakav tok novca kažemo i da je *jednostavan* ili *deterministički*. Ovisno o predznaku iznose c_j zovemo uplate odn. isplate. Kako se transakcije po ovoj definiciji odvijaju isljučivo u diskretnim vremenskim trenucima kažemo da je $\mathcal{C}$ deterministički diskretni tok novca.

Primjer 1.1.1 (Zero-coupon bond)

j	t_j	c_j	opis
1	0	-1000.00	kupovina obveznice
2	1	$+1100.00$	naplata obveznice

Kao najvažniji primjer nerizičnih tokova novca u praksi tipično se navode obveznice američke državne riznice (Treasury). Ovisno o datumu dospijeća one se zovu Treasury Bonds/Notes/Bills – od 10 godina, 1 do 10 godina, do 1 godine, (u Hrvatskoj razlikujemo obveznice i kratkoročne zapise). Drugi primjeri tokova novca koje predstavljamo determinističkim (odn. nerizičnim) tokovima novca su kratkoročna oročena štednja kod "boljih" banaka, neke državne obveznice, financijske rente.

Slučajni tok novca je niz dvodimenzionalnih slučajnih vektora $((T_j, C_j) : j = 1, \ldots, M)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

I ovdje se slučajne varijable C_j zovu iznosi, a T_j vremena. Duljina niza M je također (poopćena) slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ovakav tok novca je još uvijek diskretan, no očito predstavlja poopćenje originalne definicije.

Primjer 1.1.2 (izdaci kućanstva za sljedeći mjesec)

j	T_j	C_j	opis
1	1	-160.23	račun za struju
2	T_2	C_2	isplata s automata
3	10	C_3	račun za telefon
4	15	-2190.20	rata za kredit
5	25	5200.00	osobni dohodak

Mnogo je primjera slučajnih tokova novca: Korporacijske obveznice. Dionice. Osiguranje života. Životne rente. Igre na sreću. Osiguranje imovine. Izvedenice (derivativi). Investicijski projekti.

Kamata je naknada koju neka osoba plaća drugoj osobi za korištenje kapitala. Slične naknade plaćamo i za posudbu nekog drugog dobra, stana, npr.

Kako u pravilu svi preferiramo 1 euro danas u odn. na 1 euro za godinu dana, kamata je gotovo bez iznimke strogo pozitivna. Ona izražava vremensku promjenu vrijednosti novca. Ako ne znamo ništa o tome kako se ta vrijednost mijenja, ne možemo usporediti različite ekonomske planove niti racionalno donositi poslovne ili financijske odluke.

Kapital i kamata su najčešće izraženi u jedinicama istog dobra, npr. u terminima neke apstraktne monetarne jedinice. Također, kamata se odnosi na unaprijed dogovorenu vremensku jedinicu, tipično - godinu dana.

1.2 Složeno ukamaćivanje

Ukamaćivanje (tj. obračun kamate) se odvija tipično u diskretnim vremenskim trenucima (danima, mjesecima, godinama). Stoga je u nastavku korisno fiksirati jednu vremensku jedinicu. *Osnovna vremenska jedinica* pretpostavit ćemo je 1 godina. Kamata se isplaćuje na kraju fiksiranog perioda. Na investiciju u iznosu 1 uloženu u trenutku t na period od 1 godine, isplaćuje se u trenutku $t + 1$ iznos $1 + i(t)$, gdje je $i(t) > -1$. Broj $i(t)$ naziva se *(efektivna) kamatna stopa (e.k.s.)* za jedinični vremenski period $[t, t+1]$.

Mi pretpostavljamo (što je u praksi dakako često nerealno) da kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala (eng. *interest independent of scaling*). Dakle na uloženi iznos c dobit ćemo

$$c(1 + i(t)).$$

Dakle, u *sustavu složene kamate*, ako uložimo iznos c u $t = 0$ imat ćemo u trenutku $n \in N$ (tj nakon n godina)

$$c(1 + i(0))(1 + i(1)) \cdots (1 + i(n-1))\,.$$

Kamatne stope su obično nenegativne, no to ne mora uvijek biti tako. Npr. u Japanu krajem 1998. kamatne su stope na riznične zapise bile negativne, točnije -0.004%. U takvom slučaju dakako isplativije je držati gotovinu nego ulagati. Ponekad investitorima to ipak ne mora odgovarati, u japanskom slučaju npr. jednostavnije i brže je bilo elektronski trgovati zapisima riznice nego gotovinom. Kako god, nije zabilježeno niti je ekonomski opravdano očekivati da će kamatne stope pasti znatno ispod 0 (s realnim kamatnim stopama koje uzimaju u obzir inflaciju, a koje ćemo uvesti kasnije druga je stvar dakako).

Akumulacijski faktori

Za $t_1 \leq t_2$ definiramo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao *akumulaciju* (tj. ukupni kapital) do trenutka t_2 koju proizvodi depozit 1 investiran u trenutku t_1 i zovemo ga *akumulacijski faktor za period* $[t_1, t_2]$. Naravno, $A(t, t) = 1$. Akumulacijske faktore (zasad) smatramo unaprijed poznatim (predvidivim, odn. determinističkim).

Očito je

$$A(t, t+1) = 1 + i(t).$$

Ponekad zbog jednostavnosti pretpostavljamo da se kamata ne mijenja, tj da je $i(t) = i$ za sve $t = 0, 1, \ldots n-1$. Tada ćemo za depozit c nakon n godina dobiti

$$c(1 + i)^n\,.$$

Gornji iznos zovemo i akumulacija od c za n godina po kamatnoj stopi i. Primjetimo, kako je $1 + i > 0$, gornji izraz je smislen i ako n nije prirodan broj.

Ponekad se kamata obračunava na još jedan bitno različit način. Taj je danas rijetko u upotrebi (Hrvatska je tu donekle izuzetak).

Primjer 1.2.1 (Jednostavno ukamaćivanje) Ako je iznos c deponiran uz uvjet da mu se pridodaje *jednostavna kamata* po stopi i godišnje, tada se nakon $t > 0$ godina isplaćuje iznos

$$c(1 + ti).$$

Dakle, godišnja kamatna stopa i nakon 1 godine ulogu c u *sustavu jednostavne kamate* pridodaje iznos ci. Obično je $0 < i < 1$ i izražava se postotkom, npr.

$$i = 0.09 = \frac{9}{100} = 9\%.$$

Duljina vremenskog perioda t u gornjem izrazu ne mora biti cijeli broj. Nakon t godina jednostavna kamata iznosu c pridodaje

$$i_s(i, t, c) := cti\,.$$

Primjer 1.2.2 (Jednostavno ukamaćivanje i nekonzistentnost)

Uzmimo $n = 2$, po isteku dvije godine dobit ćemo iznos $c(1+2i)$. Ako uz iste uvjete ponovo uložimo iznos koji nam pripada nakon prve godine $c(1+i)$ dobit ćemo iznos $c(1+i)(1+i)$. Razlika je dakle

$$ci^2.$$

Taj iznos je u 2. godini donijela kamata iz 1. godine. Indukcijom vidimo da takvim ulaganjem nakon n godina dobivamo

$$c(1 + i)^n\,,$$

od čega je sama kamata $c((1 + i)^n - 1)$.

U sistemu jednostavne kamate, kamata ne donosi kamatu, ovo svojstvo ponekad nazivamo i *nekonzistentnosti* jednostavnog ukamaćivanja.

Pretpostavimo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Investicija u iznosu 1 u trenutku t_0 u trenutku t_2 vrijedi $A(t_0, t_2)$. S druge strane ako akumulirani iznos u trenutku t_1 reinvestiramo do t_2 dobit ćemo

$$A(t_0, t_1)A(t_1, t_2).$$

Reći ćemo da su akumulacijski faktori *konzistentni* ako

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2)$$

za sve $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Primjer 1.2.3 (Nominalne kamatne stope) Pretpostavljamo da je osnovna vremenska jedinica i dalje 1 godina, te da kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala. Promatramo transakcije u trajanju h, gdje h nije nužno cijeli broj. Dovoljno je promatrati povrat na depozit u iznosu 1.

Ako je iznos 1 investiran u trenutku t, $A(t, t+h)$ predstavlja njegovu vrijednost u trenutku $t+h$, $h > 0$. Možemo dakako pisati

$$A(t, t+h) = 1 + h i_h(t). \tag{1.1}$$

Broj $i_h(t)$ definiran ovim izrazom nazivamo *godišnja nominalna kamatna stopa u periodu* $[t, t+h]$, dakle

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}.$$

Primjetite da uz $i_h(t)$ kao godišnju kamatnu stopu u sustavu jednostavne kamate dobijemo baš $A(t, t+h)$ kao akumulaciju od iznosa 1 u intervalu $[t, t+h]$. Uočite: za $h = 1$ nominalna i efektivna stopa su jednake, odnosno $i_1(t) = i(t)$.

Ako pretpostavimo da su kamatne stope (odn. akumulacijski faktori $A(t, t+h)$) neovisne o trenutku t. Tada pišemo

$$i_h(t) = i_h, \qquad \text{za svako } t\,.$$

Tada je dakako i $i(t) = i_1$ za svaki t.

Kada vrijedi ova prepostavka govorimo o *sustavu fiksne kamatne stope.* Dakle, tada $A(t, t+h)$ ovisi samo o h.

Najvažniji poseban slučaj je $h = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$, a u praksi posebno polugodišnje, kvartalne, mjesečne ili dnevne transakcije odn. kamatne stope, tj. $h = 1/2, 1/4, 1/12, 1/365$. Tada pišemo

$$i_{1/p} = i^{(p)}, \qquad p \in \mathbb{N}\,,$$

dakle uvodimo samo novu oznaku, a (1.1) i dalje kaže da iznos 1 položen u bilo kom času po isteku $1/p$ godina daje

$$1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\,.$$

Kaže se da je $i^{(p)}$ godišnja *nominalna kamatna stopa plativa (konvertibilna) p puta godišnje (convertible pthly).*

Primjetite ako je nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje $i^{(p)}$, tada je e.k.s. za jedan period *duljine* $1/p$ zapravo $i^{(p)}/p$ (to je tzv. periodna stopa). Npr. ako je $i^{(4)} = 12\%$, to znači da je 3% kvartalna e.k.s. Tj. posudimo li 100EUR za tri mjeseca ćemo morati vratiti 103EUR uz ove uvjete. Ako znamo samo e.k.s. i iznos je $100(1 + i)^{1/4}$.

Primjetimo, ako je tržište novca *konzistentno*, tj. ako akumulacijski faktori zadovoljavaju

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2), \qquad \text{za sve } t_0 \le t_1 \le t_2, \tag{1.2}$$

tada indukcijom slijedi

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2) \cdots A(t_{n-1}, t_n), \qquad \text{za sve } t_0 \le \cdots \le t_n.$$

Primjer 1.2.4 (veza fiksne nominalne i e.k.s. stope)

Pretpostavimo konzistentnost tržišta (iako u praksi to ne možemo često sresti zbog troškova transakcije, poreza i sl.), te fiksnu efektivnu kamatnu stopu.

Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$, izračunajmo $i^{(p)}$. Iz (1.1) imamo

$$A(t, t + \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)},$$

posebno jer je e.k.s. fiksna

$$A(0, 1/p) = A(1/p, 2/p) = \cdots = A((p-1)/p, 1)\,,$$

pa po principu konzistencije

$$\left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p = 1 + i, \qquad \text{jer}$$

$$A(0, 1/p)A(1/p, 2/p) \cdots A((p-1)/p, 1) = A(0, 1)\,,$$

odakle slijedi

$$i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)\,.$$

Iz binomne formule se lako vidi (provjerite):

$$i^{(p)} \le i, \qquad \text{za svaki } p \in \mathbb{N}.$$

Ako za neko t postoji

$$r(t) := \lim_{h \to 0+} i_h(t)\,,$$

tada se ova veličina naziva *intenzitet kamate (po jedinici vremena) u trenutku* t. U sustavu fiksne kamatne stope vrijedi

$$r = r(t) = \lim_{p \to \infty} i^{(p)} = ((1+i)^x)'\,|_{x=0}\,.$$

Dakle

$$r = \ln(1+i) \quad \text{odn.} \quad e^r = 1 + i\,.$$

Intuitivno govorimo: prinos od kamate na iznos c u infinitezimalno malom intervalu $[t, t + \mathrm{d}t]$ je

$$\approx c r(t) \mathrm{d}t.$$

Teorem 1.1. *Ako funkcija $A : [0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ zadovoljava princip konzistencije (1.2), te ako je $g(t) = A(0,t)$ neprekidno derivabilna funkcija na $[0,\infty)$, tada postoji neprekidna funkcija $r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tako da*

$$A(t_1,t_2) = \exp(\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt), \qquad \textit{za sve } t_2 > t_1 \geq 0$$

Dokaz. Iz (1.2) slijedi $A(t,t) = 1$ za svako $t \geq 0$. Definirajmo

$$r(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{A(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{A(0,t+h)-A(0,t)}{hA(0,t)}$$

i $f(t) = \ln g(t)$. Sada je

$$f'(t) = g'(t)/g(t) = r(t).$$

Dakle f je primitivna funkcija funkcije r koja je neprekidna, pa je primjenjiva Newton-Leibnizova formula. Sad integriranjem slijedi

$$f(t) = \ln A(0,t) = \int_0^t r(s)\mathrm{d}s$$

i konačno iz (1.2) slijedi $A(t_1,t_2) = \exp(f(t_2) - f(t_1))$, tj. tvrdnja teorema.

$\square$

Mi u nastavku pretpostavljamo da postoji (po dijelovima) neprekidna funkcija r t.d. vrijedi

$$A(t_1,t_2) = \exp(\int_{t_1}^{t_2} r(t)\mathrm{d}t), \qquad \text{za sve } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Tada vrijedi i

$$i_h(t) = \frac{\exp(\int_t^{t+h} r(s)\mathrm{d}s) - 1}{h}.$$

Očito u točkama neprekidnosti od r vrijedi

$$i_h(t) \approx \frac{e^{r(t)h} - 1}{h} \to r(t)$$

za $h \to 0+$, dakle intenzitet kamate je upravo $r(t)$ za takve t. Pokažite to rigorozno.

Nadalje, ako je $r(t) \equiv r$ za svako t, tada

$$A(0,t) = e^{rt} = (1+i)^t, \qquad \text{za sve } t \geq 0\,,$$

a ne samo cijele brojeve.

Posebno, u periodu $[0,t]$, u sustavu složene kamate glavnici c se dodaje iznos

$$c\left(\exp(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s)-1\right).$$

Taj iznos se naziva i *prihod od kamata*, a u slučaju da je kamata fiksna ($r \equiv \ln(1+i)$) označavamo ga sa:

$$i_c(i,t,c) := c(A(0,t)-1) = c((1+i)^t-1)\,.$$

Prisjetimo se da je u sustavu fiksne jednostavne kamate prihod od kamata

$$i_c(i,t,c) = itc.$$

Korolar 1.2. *Uz proizvoljnu fiksnu e.k.s.* $i>0$ *i glavnicu* $c>0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} i_s(i,t,c) &> i_c(i,t,c), \qquad \textit{ako} \quad t\in(0,1),\\ i_s(i,t,c) &< i_c(i,t,c), \qquad \textit{ako} \quad t\in(1,\infty). \end{aligned}$$

Dokaz. Koristite $i_s(i,t,c) = itc$ i pokažite $f(t) = c((1+i)^t-1)$ je strogo konveksna i rastuća. □

U praksi se jednostavno ukamaćivanje više gotovo i ne koristi, osim iznimno za obračun kamate u kraćim vremenskim razmacima, kada za male i daje približno istu kamatu kao i složeno. Iznimka je i obračun zateznih kamata u RH, za koji Vjerodostojno tumačenje Sabora RH od 7. svibnja 2004. kaže

> *"U dvojbi može li se konformni [složeni op. BB] način uračunavanja zateznih kamata primjenjivati u slučaju kašnjenja s ispunjenjem dospjelih obveza za razdoblje dulje od godinu dana smatra se da to nije moguće već se za razdoblje dulje od godinu dana treba primjenjivati proporcionalni (prosti) [jednostavni op. BB] način obračuna zateznih kamata."*

Primjer 1.2.5 (jednostavno i složeno ukamaćivanje - usporedba) Neka se zatezna kamata obračunava jednostavnim sustavom po stopi od 15%. Ako dužnik duguje iznos 1 i može ga uložiti po e.k.s. i tokom 15 godina, izračunajmo koliki mora biti i da bi mu se odugovlačenje s otplatom duga isplatilo?

R. Mora biti $i_s(0.15, 15, c) < i_c(i, 15, c)$, tj.

$$15 \cdot 0.15 < (1+i)^{15} - 1.$$

Dakle dovoljno je $i > 8.17466\%$.

Propozicija 1.3. *Uz fiksnu e.k.s. $i > 0$ vrijedi*

$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > i^{(4)} > \cdots$$

Dokaz. Pokažite $f(p) = p(e^{r/p} - 1)$ (za $e^r = 1 + i > 1$) je strogo padajuća na $[0, \infty)$, a $i^{(p)} = f(p)$.

Sadašnje vrijednosti tokova novca

U nastavku koristimo oznake iz prethodne točke i pretpostavku da svi sudionici na tržištu novca po istim uvjetima mogu ulagati i posuđivati novac. Ako u trenutku t_1 investiramo depozit u iznosu $c \exp(-\int_{t_1}^{t_2} r(s) \mathrm{d}s)$ njegova vrijednost u trenutku t_2 naraste do c. Kažemo da je

$$c \exp(-\int_{t_1}^{t_2} r(s) \mathrm{d}s) = c / A(t_1, t_2)$$

diskontirana vrijednost u t_1 iznosa c koji dospijeva u t_2. Posebno

$$c \exp(-\int_0^t r(s) \mathrm{d}s)$$

zovemo *sadašnja vrijednost iznosa c koji dospijeva u trenutku t.*

U nastavku je korisno imati i oznaku

$$v(t) = \exp(-\int_0^t r(s) \mathrm{d}s)$$

za sadašnju vrijednost jediničnog iznosa koji dospijeva u trenutku $t \geq 0$. Za $t < 0$, vrijednost $v(t)$ je akumulacija od iznosa 1 u intervalu $[t, 0]$.

Sadašnja vrijednost toka novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ je

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{m} c_j v(t_j)\,, \tag{1.3}$$

uz prepostavku da red apsolutno konvergira ako je $m = \infty$. Kada je e.k.s. i fiksna za sadašnja vrijednost koristimo i oznaku $NPV_{\mathcal{C}}(i) = V_0(\mathcal{C})$.

Primjetite da je tek na osnovu poznate kamatne st moguće odrediti koji između više tokova novca ima veću vrijednost. Uz neke jednostavne prepostavke korištene i do sada (eng. zero transaction costs, interest independent on scaling, no satiation), taj izbor je jasan i neovisan o osobnim preferencama pojedinca u pogledu buduće potrošnje ili sl.

Neprekidni tokovi novca

Kao matematičku idealizaciju, možemo promatrati i *neprekidne tokove novca*, npr. kada modeliramo niz vrlo frekventnih isplata.

Neprekidni tok novca je (lokalno) Riemann integrabilna funkcija $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Vrijednost $\rho(t)$ zovemo stopa isplate po jedinici vremena u trenutku t.

Heuristički govoreći, u infinitezimalno malom vremenskom periodu $[t, t + \mathrm{d}t]$ isplata iznosi

$$\rho(t) \cdot \mathrm{d}t\,.$$

Ako ukupnu akumulaciju u intervalu $[0, t]$ označimo s $M(t)$, ona se u infinitezimalnom intervalu $[t, t + \mathrm{d}t]$ uveća za

$$\mathrm{d}M(t) = M(t)r(t)\mathrm{d}t + \rho(t)\mathrm{d}t\,,$$

pa M, pretpostavljamo, mora zadovoljati diferencijalnu jednadžbu

$$M'(t) = M(t)r(t) + \rho(t)\,.$$

Ako je $M(0) = 0$, rješenje se nađe kao

$$M(h) = \int_0^h \rho(t) \exp\Big(\int_t^h r(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t\,.$$

Pa u skladu sa (1.3), sadašnju vrijednost neprekidnog toka novca $\mathcal{C} = (\rho(t))_{t\in[0,h]}$ računamo kao

$$V_0(\mathcal{C}) = \int_0^h v(t)\rho(t)\mathrm{d}t\,.$$

Ako nas zanima vrijednost u nekoj drugoj vremenskoj točki t' dovoljno je podijeliti gornji iznos sa $v(t')$. To dakako vrijedi i za diskretne tokove novca.

Označimo s $\mathcal{C}$ diskretni ili neprekidni tok novca, a njegovu vrijednost u času t sa $V_t(\mathcal{C})$, tada za sve $s, t \in \mathbb{R}_+$ imamo formulu

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{v(s)}{v(t)} V_s(\mathcal{C}).$$

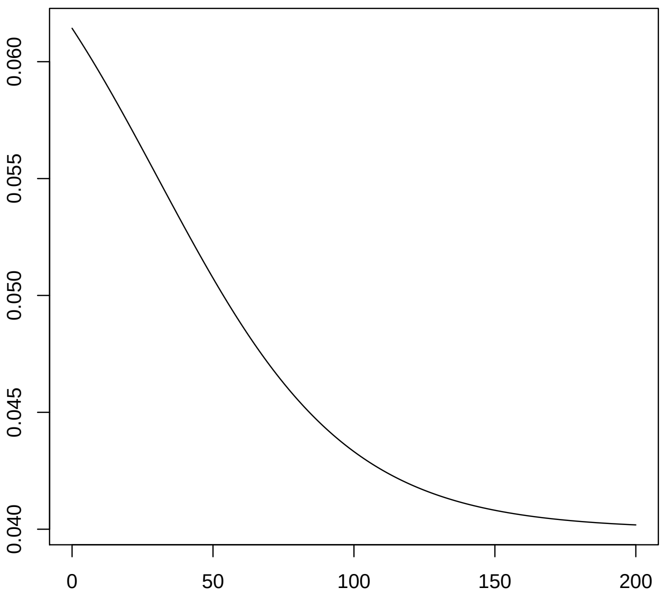
Posebno

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{1}{v(t)} V_0(\mathcal{C}).$$

Intenzitet kamate se katkad modelira *Stoodleyovom formulom*

$$r(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}} \,,$$

za pozitivne konstante p, r i s. U praksi ove parametre procjenjujemo nekom statističkom metodom. Graf funkcije r uz parametre $r = 0.4$, $p = 0.04$ and $s = 0.03$ je ilustriran na Slici 1.2.



Slika 1.1: Intenzitet kamate po Stoodleyevoj formuli

S kamatnim stopama nije sve uvijek baš tako jednostavno, iako je za nas zgodno pretpostaviti da postoji jedna e.k.s. unaprijed poznata za sve buduće periode, po kojoj možemo i ulagati i posuđivati novac, situacija je u stvarnosti dakako puno kompleksnija.

Buduće kamatne stope su nam često nepoznate, a njihov iznos ovisi i o rizičnosti svake pojedine posudbe, tj. o procjeni rizika da dužnik neće vratiti novac vjerovniku u ugovorenom roku. Dakako, to znači da ovisi i o duljini perioda kao i o pouzdanosti dužnika. Npr. e.k.s. (preciznije prinos) na US T-Bills (91d-1y) na dan 27.3.2003. iznosila je samo 1.14%, jer se smatra da je vjerojatnost da US Treasury ne isplati dug zapravo zanemariva (mada u novije vrijeme ima tu i drugačijih mišljenja). Nakon toga po rizičnosti dolaze kratkoročne bankovne garancije (do 6m) koje su tog dana imala e.k.s. od 1.22%. Jedna od važnijih kamatnih stopa je i *LIBOR* po kojoj važne banke na UK (i EU) tržištu obračunavaju kamate jedna drugoj. Mnoge druge kamatne stope vezane su uz LIBOR (ili alt. EURIBOR), pa tako i kamatne stope u RH, npr. komercijalni krediti banaka poduzećima.

For corporate bonds, the higher the bond's rating, the lower its default risk, and, consequently, the lower its interest rate.[13] Here are some representative interest rates on long-term bonds during April 2003:

	Rate		DRP	
Long-Term Bonds	2001	2003	2001	2003
U.S. Treasury	5.5%	4.9%	—	—
AAA	6.5	5.5	1.0	0.6
AA	6.8	5.6	1.3	0.7
A	7.3	6.2	1.8	1.3
BBB	7.9	6.8	2.4	1.9
BB+	10.5	8.4	5.0	3.5

Slika 1.2: Kamate (prinosi) na razne obveznice ovisno o kreditnom ratingu izdavatelja. Zadnja dva stupca u tablici nalazimo DRP (eng. default risk premium) odn. razliku između prinosa na obveznice za pojedine kategorije izdavatelja u odn. na obveznice državne riznice. Izvor Brigham i Ehrhardt [1].

U stvarnom svijetu važnu ulogu ima i inflacija, naime ponekad se u financijskoj praksi računaju i tzv. "realne kamatne stope"

$$i_{\text{real}} = i - i_{\text{infl}}\,,$$

gdje je i_{infl} opažena ili pretpostavljena inflacija u periodu koji promatramo. Stoga zemlje s većom inflacijom imaju dakako i veće efektivne kamatne stope.

U nastavku ćemo zbog jednostavnosti isticati samo dvije kamatne stope: e.k.s. i po kojoj možemo ulagati i posuđivati novac, te pripadni intenzitet kamate (ili ovotrenutnu kamatnu stopu) r. Za obje ćemo prepostaviti da su fiksne i ne ovise o uloženom kapitalu. U praksi bismo ih mogli općenito modelirati slučajnim procesima (to ćemo za naše potrebe iz računskih razloga ignorirati). Još jedna praktična strategija bi mogla biti da u izračunima vrijednosti budućih tokova novca koristimo više različitih, ali fiksnih kamatnih stopa, i uzmimo u obzir vjerojatnosti svakog od tih scenarija.

Složeno ukamaćivanje uz fiksnu e.k.s.

Prepostavljamo fiksnu efektivnu kamatnu stopu u iznosu i. Uočimo

$$v(t) = e^{-rt} = v^t \,,$$

uz oznaku $v = e^{-r}$.

Primjer 1.2.6 (Kamata unaprijed) Za posudbu iznosa 1 sada, u trenutku 1 moramo platiti naknadu i. Kolika bi naknada bila ako je želimo platiti odmah?

Odgovor je očito

$$d = vi = \frac{i}{1+i} = 1 - v \,.$$

Iznos d se zove *efektivna diskontna (ili anticipativna) kamatna stopa po jedinici vremena.*

Primjer 1.2.7 (Kamata neprekidno) Pretpostavimo da kamatu želimo otplaćivati neprekidno po fiksnoj stopi u intervalu $[0,1]$. Označimo taj iznos sa x, iz

$$d = \int_0^1 e^{-rt} x \mathrm{d}t = \frac{x}{r}(1 - e^{-r}) = \frac{x}{r} d$$

slijedi

$$x = r \,.$$

Četiri osnovne konstante korištene kod složenog ukamaćivanja dakako određuju jedna drugu na sljedeći jednostavan način

	r	i	v	d
r	$\cdot$	$e^r - 1$	e^{-r}	$1 - e^{-r}$
i	$\ln(1+i)$	$\cdot$	$1/(1+i)$	$i/(1+i)$
v	$-\ln v$	$1/v - 1$	$\cdot$	$1 - v$
d	$-\ln(1-d)$	$1/(1-d) - 1$	$1 - d$	$\cdot$

Uočimo

$$\lim_{i \to 0+} \frac{r(i)}{i} = \lim_{i \to 0+} \frac{\ln(1+i)}{i} = 1$$

$$\lim_{i \to 0+} \frac{d(i)}{i} = \lim_{i \to 0+} \frac{i/(1+i)}{i} = 1$$

Primjer 1.2.8 (Kamata p puta godišnje) Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$. Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenucima $1/p, 2/p, \ldots, p/p$ u jednakim iznosima, recimo x/p. Nađimo x iz

$$i = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x}{p}(1+i)^{k/p} = \frac{x}{p} \frac{i}{(1+i)^{1/p} - 1}\,.$$

Slijedi $x = p((1+i)^{1/p} - 1) = i^{(p)}$, x je dakle upravo nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje. To objašnjava i ovakav naziv, jer je kamata nominalno $i^{(p)}$ plativo p puta godišnje (stvarna e.k.s. je i dalje i dakako).

Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$ u jednakim iznosima, recimo $d^{(p)}/p$. Izjednačavanjem vrijednosti u $t = 0$ direktno se vidi da je

$$(1 - d^{(p)}/p)^p = 1 - d\,,$$

odnosno

$$d^{(p)} = p(1 - (1-d)^{1/p})$$

Veličina $d^{(p)}$ se zove *nominalna diskontna kamatna stopa plativa p puta godišnje.*

Iz ekonomskih razloga intuitivno je jasno da vrijedi $d^{(p)} < i^{(p)}$ ako $i > 0$. Zapravo vrijedi

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \cdots > r > \cdots > d^{(3)} > d^{(2)} > d^{(1)} = d.$$

Pravilni tokovi novca (jednostavne financijske rente)

Financijske rente su (deterministički) tokovi novca kod kojih se u pravilnim vremenskim razmacima vrše uplate u jednakim iznosima.

Promotrimo prvo tok novca kod kojega se u trenucima $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ uplaćuje iznos 1, tj.

$$\mathcal{C} = \{(i, 1) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Takvu rentu zovemo *postnumerando ili plativa unatrag (annuity-certain).* Njena sadašnja vrijednost uz fiksnu e.k.s. i iznosi

$$v + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{i} =: a_{\overline{n}|}. \tag{1.4}$$

Iz formule za sadašnju vrijednost toka novca, jasno je da ako uplate iznose c umjesto 1 sadašnja vrijednost rente postaje uvećana za faktor c.

Ako se uplate iznosa 1 vrše u trenucima $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_n = n-1$ renta se zove *prenumerando ili plativa unaprijed (annuity-due)*. Njena sadašnja vrijednost je:

$$1 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d} =: \ddot{a}_{\overline{n}|}. \tag{1.5}$$

U trenutku zadnje uplate obje ove rente imaju vrijednost

$$(1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, =: s_{\overline{n}|}.$$

a godinu dana nakon toga

$$(1+i)^n + \cdots + (1+i)^2 + 1 + i = \frac{(1+i)^n - 1}{d} =: \ddot{s}_{\overline{n}|}.$$

Ove vrijednosti se nekad zovu i akumulacije financijskih renti.

Primjer 1.2.9 (Perpetuities – vječne ili beskonačne rente) Pogledajmo sada slučaj kada se uplate vrše postnumerando odn. prenumerando, ali beskonačno dugo ($n = \infty$). Jasno je da im je vrijednost u jednom odn. drugom slučaju (ako vrijedi $i > 0$)

$$v + v^2 + v^3 + \cdots = \tfrac{1}{i}, =: a_{\overline{\infty}|} \tag{1.6}$$
$$1 + v + v^2 + \cdots = \tfrac{1}{d} =: \ddot{a}_{\overline{\infty}|}. \tag{1.7}$$

Primjer 1.2.10 (Neprekidne rente) Neka je $n \geq 0$ ne nužno cijeli broj. Sadašnja vrijednost rente koja se isplaćuje kontinuirano u intervalu $[0, n]$ po fiksnoj godišnjoj stopi 1 iznosi

$$\frac{1-v^n}{r} =: \bar{a}_{\overline{n}|}. \tag{1.8}$$

U aktuarskoj literaturi vrijednosti u formulama (1.4)– (1.8) označavaju sa

$$a_{\overline{n}|},\ \ddot{a}_{\overline{n}|},\ a_{\overline{\infty}|},\ \ddot{a}_{\overline{\infty}|},\ \bar{a}_{\overline{n}|},$$

ove oznake su i međunarodno propisane.

Primjer 1.2.11 (Odgođene rente) Ako rente imaju odgodu od m godina, njihovu sadašnju vrijednost nalazimo jednostavnim argumentima, npr. ako

$$\mathcal{C} = \{(i,1) : i = m+1, \ldots, m+n\}.$$

tada

$$V_0(\mathcal{C}) = v^m a_{\overline{n}|}, \tag{1.9}$$

ili $a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}$ u oznakama uvedenim gore.

Primjer 1.2.12 (Pravilno promjenjive rente) Posebno važne su linearno rastuće rente. Takav je npr. tok novca $\mathcal{C}_1$ kod kojega se:

- iznosi $1, \ldots, n$ uplaćuju se u trenucima $1, \ldots, n$, tj.

$$\mathcal{C} = \{(i,i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

Sadašnju vrijednosti ovakve promjenjive rente označimo sa $V_0(\mathcal{C}_1)$. Po definiciji je

$$V_0(\mathcal{C}_1) = v + 2v^2 + \cdots + nv^n,$$

otkuda množenjem s $1+i$ i oduzimanjem dviju jednakosti slijedi

$$iV_0(\mathcal{C}_1) = 1 + v + \cdots + v^{n-1} - nv^n.$$

Pa vrijedi

$$V_0(\mathcal{C}_1) = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}.$$

Propisana oznaka za ovaj izraz je $(Ia)_{\overline{n}|}$.

Ako neka renta traje n godina i počinje uplatom iznosa a u trenutku 1, te nakon toga uplaćuje iznose $a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ u trenucima $2, 3, \ldots, n$ njena sadašnja vrijednost lako se nađe kao

$$(a-b)a_{\overline{n}|} + bV_0(\mathcal{C}_1)\,.$$

Primjer 1.2.13 (Rente koje se isplaćuju u višegodišnjim intervalima) Za $r \in \mathbb{N}$, neka se renta uplaćuje u iznosu 1 ali u trenucima $r, 2r, \ldots, kr$. Nađite sadašnju vrijednost ovakve rente u terminima dosadašnjih kao

$$\frac{a_{\overline{kr}|}}{(1+i)^r a_{\overline{r}|}}$$

Primjer 1.2.14 (Rente plative p puta godišnje) Neka se u trenucima $1/p, 2/p, \ldots, n \cdot p/p$ uplaćuje iznos $1/p$. Sadašnja vrijednost ovakve postnumerando rente je

$$\frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|}.$$

Naime uplata iznosa $i^{(p)}/p$ u trenucima $(k-1)+1/p, (k-1)+2/p, \ldots, k$ ekvivalentno je uplati iznosa i u trenutku k.

Ako se radi o prenumerando renti tj. uplate su u trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (n \cdot p - 1)/p$ dobijemo

$$\frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|}.$$

Primjer 1.2.15 (Kuponske obveznice)

Obveznice imaju *nominalnu vrijednost* N, (npr. 1000$) i *godišnju kuponsku isplatu* c (npr 100$ ili 10% dakle u ovom primjeru), te *datum dospijeća* m (npr. 10 godina). One vlasniku daju pravo na tok novca

$$\mathcal{C} = \{(j, c_j) : j = 1, 2, \ldots, m\}$$

gdje su $c_j = c$ za $j = 1, \ldots, m-1$, a $c_m = c + N$. Vrijednost im je lako naći ako nam je poznata efektivna kamatna stopa i

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c}{(1+i)^k} + \frac{N}{(1+i)^m}.$$

To bi dakle bila i *fair* cijena obveznice. No ako vrijedi obrnuto, pa nam je poznata cijena obveznice te njeni parametri N, c i m, mogli bismo se pitati uz koju e.k.s. je to *fair* cijena obveznice. Drugim riječima iz cijena obveznica (npr. u financijskom tisku FT ili WSJ) mogli bismo iščitati pretpostavljene buduće kamatne stope (to je tzv. prinos do dospijeća). Tabele s cijenama u stvarnosti sadrže dvije cijene tzv. *ask & bid*, a razlika među njima omogućuje zaradu dilerima. $\ominus$

Cijene dionica bismo odredili na potpuno isti način ukoliko su poznate sve buduće kamate, kao i sve isplaćene dividende, što naravno u praksi nikada nije slučaj.

Prinos

Kad promatramo izvjestan poslovni ili financijski plan, opisan npr. tokom novca $\mathcal{C}$, a koji se sastoji od izvjesnog niza isplata i uplata, zanimljivo je vidjeti u koju fiksnu e.k.s. i_0 te uplate i isplate imaju potpuno jednaku vrijednost. Te uplate proizvode dakle jednake isplate kao i kad bismo ih neriziČno položili uz tu istu fiksnu e.k.s. i_0.

Prisjetimo se, uz fiksnu kamatnu stopu diskretni tok novca $\mathcal{C}$ ima sadašnju vrijednost

$$NPV_{\mathcal{C}}(i) = V_0(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{-rt_j}$$

gdje je $r = \ln(1+i)$.

Mi tražimo intenzitet kamate $r \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{m} c_j e^{-rt_j} = 0 \tag{1.10}$$

Ako takvo rješenje r_0 postoji i jedinstveno je zovemo ga *intenzitet kamate impliciran transakcijom*. U tom slučaju, pripadna e.k.s. $i_0 = e^{r_0} - 1$ naziva se *prinos od transakcije $\mathcal{C}$*. Uočite da je $i_0 \in (-1, \infty)$.

Alternativno, prinos i_0 možemo definirati i kao jedinstveno rješenje u skupu $(-1, \infty)$ jednadžbe

$$NPV_{\mathcal{C}}(i_0) = 0\,,$$

ako ono postoji. Dakle upravo uz e.k.s. i_0 vrijednost svih uplata jednaka je vrijednosti svih isplata.

Jednadžba (1.10) se lako generalizira na neprekidne tokove novca.

Primjer 1.2.16 (prinos ne postoji uvijek)

Pretpostavimo da se u vremenskim trenucima $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ i $t_3 = 2$ uplaćuju iznosi

a) $c_1 = -1.1,\ c_2 = 2.1,\ c_3 = -1$
b) $c_1 = -1,\ c_2 = 2.3,\ c_3 = -1.2$
c) $c_1 = -1,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1.1$
d) $c_1 = -1,\ c_2 = b,\ c_3 = -1,\ b > 0$ proizvoljan.
e) $c_1 = -1,\ c_2 = -1,\ c_3 = a,\ a > 0$ proizvoljan.

Uvjerite se da prinos postoji u slučaju e), te u slučaju d) za $b = 2$, u svim ostalim slučajevima prinos ne postoji.

Tok novca (odn . financijski projekt) je *profitabilan* ako je

$$NPV_{\mathcal{C}}(i_1) > 0\,,$$

gdje je i_1 e.k.s. koja vrijedi na tržištu.

Tipično je $NPV_{\mathcal{C}}(\cdot)$ padajuća funkcija kamatne stope. Npr. ako na početku projekta samo ulažemo, da bismo zatim imali samo prihode. U tom slučaju projekt je profitabilan ako

$$i_0 > i_1.$$

Primjer 1.2.17 (usporedba dva financijska projekta)

Ako odabiremo između dva investicijska projekta, npr. A i B, mogli bismo ih usporediti preko njihovih prinosa i_A i i_B. Uočite da iz $i_A > i_B$ ne slijedi da je nužno projekt A profitabilniji. Potrebno je usporediti njihovu (sadašnju) vrijednost u odn. na e.k.s. na tržištu, tj. e.k.s. i_1 po kojoj se možemo zaduživati odn. ulagati svoj novac. Projekt A je profitabilniji ako vrijedi

$$NPV_A(i_1) > NPV_B(i_1).$$

Primjer 1.2.18 (Vremenska promjenjivost kamatnih stopa)

Kako smo primjetili kamatne stope (prinosi) će na stvarnim tržištima ovisiti i o vremenu dospijeća duga, a kako dulji period predstavlja veći rizik (od *defaulta* ili promjena kamatnih stopa na tržištu npr.), prinosi su tipično veći na uloge s daljim datumom dospijeća (pokazat ćemo da svaki tok novca kod kojeg sve uplate prethode isplatama ima prinos do dospijeća). To je posebno slučaj s obveznicama ili otplatama duga. Ovisno o njihovom dospijeću [*years to maturity*], one imaju različite prinose. Posebno su važne krivulje prinosa [*yield curve*] na US Treasury bonds (i njima povezane vrijednosnice). O njima i njihovom obliku postoji i ekonomska teorija (v. google).

Teorem 1.4. *Za svaki konačan tok novca $\mathcal{C}$ u kojem postoje i uplate i isplate, te sve uplate prethode svim isplatama (ili obrnuto) jednadžba (1.10) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Neka su (b.s.o.) $c_i > 0,\ i = 1, \dots, k$ te $c_i < 0,\ i = k+1, \dots, n$, za neki $1 \le k < n$. Želimo naći r tako da

$$V_0(\mathcal{C}) = (c_1 e^{-rt_1} + \cdots + c_k e^{-rt_k}) + (c_{k+1} e^{-rt_{k+1}} + \cdots + c_n e^{-rt_n}) = 0$$

Pogledajmo vrijednost ovog toka novca u $t = t_k$, ona iznosi $f(r) = h(r) + g(r)$, gdje definiramo

$$g(r) = c_1 e^{r(t_k - t_1)} + \cdots + c_k e^{r(t_k - t_k)},$$
$$h(r) = c_{k+1} e^{-r(t_{k+1} - t_k)} + \cdots + c_n e^{-r(t_n - t_k)}.$$

Funkcije g i h su strogo rastuće, pa je i f strogo rastuća. Analizirajući funkcije g odn. h dobijemo

$$\lim_{r\to-\infty} f(r) = -\infty \qquad \text{odn.} \qquad \lim_{r\to\infty} f(r) = \begin{cases} c_1 & \text{za } k = 1 \\ \infty & k > 1 \end{cases}$$

No kako je f neprekidna, slijedi da postoji jedinstvena nultočka za f. $\square$

Napomena 1.5. *Ako možemo pokazati da ne postoji $i \leq 0$ takav da je $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$, prinos možemo tražiti i kao jedinstveno rješenje jednadžbe $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$ na skupu $(0, \infty)$. Uvjete za postojanje takvog i daje sljedeći teorem (primjetite i dalje se držimo iste definicije prinosa).*

Teorem 1.6. *Za tok novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ definiramo $s_r = \sum_{j=1}^{r} c_j$, $r = 1, \ldots, m$. Ako se predznak u nizu $s_1, \ldots, s_m$ promjeni točno jednom i ako $s_1 s_m < 0$, tada jednadžba $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$ ima jedinstveno rješenje na skupu $(0, \infty)$.*

Dokaz. Neka je b.s.o. $s_1, s_2, \ldots, s_k > 0$, a $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_m \leq 0$. Uzmimo $t' \in (t_k, t_{k+1})$. Definirajmo

$$g(r) = c_1 e^{r(t'-t_1)} + \cdots + c_k e^{r(t'-t_k)}$$

i

$$h(r) = c_{k+1} e^{-r(t_{k+1}-t')} + \cdots + c_n e^{-r(t_n-t')} .$$

Vrijednost ovog toka novca u t' je upravo $f(r) = g(r) + h(r)$. Uočimo da je $g(0) > 0$ i g monotono raste prema ∞ za $r \to \infty$. S druge strane raste i h za $r \to \infty$, ali prema 0 (derivirajte ili dajte ekonomski argument).

No $f(0) = s_m < 0$, a f je neprekidna dakle $f(r_0) = 0$ ima jedinstveno rješenje na $(0, \infty)$. $\square$

Otplata kapitala i pričuva (net reserve)

Dva toka novca $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ su jednako vrijedna ako je za neko $t \in \mathbb{R}$

$$V_t(\mathcal{C}) = V_t(\mathcal{C}') .$$

Tada im je vrijednost jednaka za svako $t \in \mathbb{R}$ i smatramo ih ekvivalentnima. Posebno sadašnja vrijednost toka novca zovemo *jednokratnom neto premijom*, jer uplata iznosa $V_0(\mathcal{C})$ u $t = 0$ ima jednaku vrijednost kao $\mathcal{C}$. Premija se često ne plaća na taj način. Ako se premija plaća kao tok novca $\mathcal{C}'$ i ako vrijedi gornja jednakost za neko $t \in \mathbb{R}$, tok $\mathcal{C}'$ zovemo *neto premijom* (za $\mathcal{C}$).

Napomena 1.7. *Premija je samo osiguravateljski izraz za tok novca kojim (obično) osiguranici plaćaju neki drugi toka novca (obično naknade štete koje evt. isplaćuje osiguravatelj). Jednokratnu neto premiju bismo mogli smatrati i fair cijenom nekog toka novca.*

Primjer 1.2.19 (otplata duga) Pretpostavimo da se iznos s isplaćen u $t = 0$ (dug) otplaćuje u trenucima $1, 2, \ldots, n$ i iznosima $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Neka je w_k vrijednost u trenutku $t = k$ akumuliranih otplata u periodu $[0, k)$, s_k neka je ukupna vrijednost preostalog duga za period $[k, \infty)$ u času k.

Ako su premije bile u neto iznosu, tada

$$s = vr_1 + v^2 r_2 + \cdots v^n r_n.$$

Iznos w_k se zove i neto akumulacija za tok novca $\{(i, r_i) : i = 1, \ldots, n\}$ u trenutku k. Tada je za $k \geq 1$ očito

$$w_k + s_k = (1+i)^k s.$$

Još vrijedi

$$s_k = (1+i)(s_{k-1} - r_{k-1}), \qquad \text{pa je} \qquad s_k = s(1+i)^k - \sum_{j=1}^{k-1} (1+i)^{k-j} r_j,$$

za $k \geq 1$, uz dogovor da vrijedi $s_0 = s$, a $r_0 = 0$.

Primjer 1.2.20 (pričuva) Pretpostavimo da želimo isplatu svote 1 u trenutku n. Ako se premija plaća godišnje prenumerando tokom perioda $[0, n)$ u iznosu P, onda je ona *neto premija* ako zadovoljava

$$P\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n .$$

Neto pričuva u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost akumuliranih otplata u periodu $[0, t)$, tj.

$$V = V_{t;\overline{n}|} = P\ddot{a}_{\overline{t}|}(1+i)^t .$$

to je tzv. retrospektivna formula.

No neto pričuvu lako možemo dobiti i računajući unaprijed kao vrijednost osigurane svote u trenutku t umanjenu za vrijednost nedospjelih premija

$$V = v^{n-t} - P\ddot{a}_{\overline{n-t}|} .$$

To je tzv. prospektivna formula za neto pričuvu. Neto rezerva se ekvivalentno računa i za druge tokove novca.

Primjer 1.2.21 (Zillmer reserve) Pitanje je kolika mora biti premija ako uračunamo *inicijalne troškove* I i *troškove obnavljanja* e. Ovakvu premiju označavamo sa P^* i zovemo *bruto premija*.

Prepostavimo da želimo isplatu iznosa 1 u trenutku n uz ove uvjete. Postavimo jednadžbu vrijednosti u $t = 0$

$$P^* \ddot{a}_{\overline{n}|} - e\ddot{a}_{\overline{n}|} - I = v^n$$

Cilmerizirana pričuva [Zillmer reserve] u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost osigurane svote i budućih troškova umanjena za vrijednost nedospjelih premija

$$V^*_{t;\overline{n}|} = v^{n-t} + (e - P^*)\ddot{a}_{\overline{n-t}|} = (1 + I)V_{t;\overline{n}|} + I$$

Alternativno i ovu pričuvu možemo dobiti retrospektivno kao vrijednost premija umanjenu za vrijednost troškova do tog momenta.

Općenitiji tokovi novca

Za tok novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ korisno je definirati i tokove novca

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}^+(t) = ((t_j, c_j^+) : j = 1, \ldots, m,\ t_j \leq t,\ c_j > 0) \text{ i} \\ &\mathcal{C}^-(t) = ((t_j, c_j^-) : j = 1, \ldots, m,\ t_j \leq t,\ c_j < 0) \end{aligned}$$

te posebno njima pridružene rastuće funkcije

$$C^+(t) = \sum_{t_j \leq t} c_j^+ \text{ i } C^-(t) = \sum_{t_j \leq t} c_j^-$$

koje mjere apsolutni (nediskontirani) iznos uplaćenog/isplaćenog novca do trenutka t. Primjetite da su ove funkcije monotono rastuće, a ako je $C^{\pm}(t) < \infty,\ t > 0$ one su i zdesna neprekidne.

Uz uvjet da nam je poznat intenzitet kamate r, možemo računati sadašnja vrijednost dijela tokova novca $\mathcal{C}^+(t)$ i $\mathcal{C}^-(t)$ kao Lebesgue–Stieltjes integral, tj.

$$V_0(\mathcal{C}^+(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) \quad \text{ i } \quad V_0(\mathcal{C}^-(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^-(s).$$

Sadašnja vrijednost toka novca $\mathcal{C}$ je sad

$$V_0(\mathcal{C}) = V_0(\mathcal{C}^+(\infty)) - V_0(\mathcal{C}^-(\infty)),$$

a ako nas zanima samo dio toka novca koji se odvija u vremenskom intervalu $[0, t]$ njegova je sadašnja vrijednost

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = V_0(\mathcal{C}^+(t)) - V_0(\mathcal{C}^-(t)).$$

Slično bismo mogli napraviti i za neprekidne tokove novca, no ponekad je korisno imati i puno općenitije tokove novca, npr. pretpostavimo da su zadane monotono rastuće i zdesna neprekidne funkcije C^+ i C^-, možemo ih i dalje interpretirati kao funkcije koje mjere apsolutnu (nediskontiranu) sumu uplata/isplata do trenutka t. Na taj način one određuju tok novca $\mathcal{C}(t)$ i njegovu sadašnja vrijednost

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) - \int_0^t e^{-rs} dC^-(s)$$

U pravilu su nam najinteresantniji upravo tokovi novca koji imaju neprekidan i diskretan dio, tj za njih se funkcije C^+ i C^- mogu napisati kao

$$C^{\pm}(t) = C^{\pm}(0) + \int_0^t \rho^{\pm}(s) ds + \sum_{0<s\leq t} \Delta C^{\pm}(s)$$

gdje je $\Delta C^{\pm}(s) = C^{\pm}(s) - C^{\pm}(s-)$, tj. skok funkcije $C^{\pm}$ u točki s.

Sadašnju vrijednost ovako općenitih tokova novca mogli bismo računati kao

$$V_0(\mathcal{C}(t)) = \int_0^t e^{-rs} dC^+(s) - \int_0^t e^{-rs} dC^-(s)$$

ako je e.k.s. konstantna, ili općenito kao

$$\begin{aligned} V_0(\mathcal{C}(t)) &= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC^+(s) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC^-(s) \\ &= \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} dC(s) \end{aligned}$$

Dakako, to nije ni približno najopćenitiji tok novca koji nas može zanimati i koji možemo sresti u praksi. Općenitije bismo mogli pretpostaviti da C^+ i C^- nisu determinističke funkcije nego slučajni procesi s monotono rastućim i zdesna neprekidnim putevima.

Naravno i intenzitet kamate r možemo modelirati slučajnim procesom, no ovako općeniti slučajevi su izvan interesa našeg kolegija. U nastavku ćemo se posebno baviti vrednovanjem diskretnih slučajnih tokova novca uz fiksnu e.k.s.

Zadaci

Zadatak 1. Pokažite da je za bilo koju vrijednost kamatne stope i akumulacija iznosa 1 nakon t godina uz jednostavnu kamatnu stopu veća (odn. manja) od akumulacije istog iznosa nakon t godina uz složenu kamatnu stopu za $0 < t < 1$ (odn. $t > 1$).

Zadatak 2. Posuđeni iznos od 3000 dužnik treba otplatiti u iznosu 3500 nakon 8 mjeseci. Pretpostavite fiksnu efektivnu kamatnu stopu i nađite efektivnu godišnju kamatnu stopu, efektivnu godišnju diskontnu stopu i godišnji intenzitet kamate za ovu transakciju.

Odmah nakon posudbe dužnik predlaže reprogramiranje otplate: platio bi 2000 nakon 8 mjeseci, a drugu preostalu uplatu izvršio bi 2 godine kasnije. Uz suglasnost druge strane, podrazumijevajući istu kamatnu stopu odredite odgovarajući iznos druge uplate.

Zadatak 3. U sustavu složene i fiksne kamate izračunajte koliko je dugo potrebno ulagati da bismo udvostručili kapital u ovisnosti o intenzitetu kamate.

Zadatak 4. Svake dvije godine se uplati 1000 na račun koji donosi kamatu po fiksnoj stopi. Nađite akumulirani iznos neposredno prije četvrte uplate ako je
(a) kamatna stopa efektivna 10% godišnje, a prva uplata je za dvije godine,
(b) kamatna stopa nominalna 10% godišnje konvertibilna polugodišnje, a prva uplata je odmah.

Zadatak 5. Pokažite da uz uobičajene oznake vrijedi:

$$i^{(m)} - d^{(m)} = \frac{i^{(m)} d^{(m)}}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}$$

i

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{d^{(m)}}, \qquad m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Zadatak 6. Želimo dignuti kredit u iznosu 30000 na 30 godina uz e.k.s 6%.

(a) Koliko bi trebala iznositi godišnja rata za otplatu kredita ako je otplaćujemo u jednakim iznosima u $t = 1, \ldots, 30$?

(b) Koliko iznosi dug nakon 5, odnosno 10 godina (neposredno pred kraj ovih godina)?

Zadatak 7. Svake 3 godine se uplati 100 na račun koji donosi kamatu po fiksnoj stopi. Nadite akumulirani iznos neposredno prije 6. uplate ako je kamatna stopa efektivna, 10% godišnje.

Zadatak 8. U nekoj je godini intenzitet kamate bio linearna funkcija vremena s vrijednostima 0.15 i 0.12 na početku i na kraju te godine. Nađite vrijednosti nominalnih kamatnih stopa na početku te godine za transakcije plative tromjesečno, mjesečno i dnevno.

Zadatak 9. Banka isplaćuje kamate na depozite s varijabilnim intenzitetom kamate. Na početku neke godine investitor je uložio 20000. Nakon pola godine akumulirana vrijednost bila je 20596.21, a na kraju godine 21183.7. Ako pretpostavimo da je intenzitet kamate linearna funkcija vremena (pri čemu vrijeme mjerimo od početka te godine), odredite:

(a) izraz za intenzitet kamate te godine,

(b) akumuliranu vrijednost nakon 9 mjeseci.

Zadatak 10. Dužnik je posudio 10000. Dug mora otplatiti u iznosu od 11200 nakon 10 mjeseci. Pretpostavite fiksnu efektivnu kamatnu stopu i nađite efektivnu godišnju kamatnu stopu, efektivnu godišnju diskontnu stopu i godišnji intenzitet kamate za ovu transakciju.

U trenutku u kojem je morao vratiti dug, dužnik može vratiti samo glavnicu tj, 10000, a ostatak želi vratiti nakon dodatnih šest mjeseci. Druga strana se slaže uz uvjet da se od sada kamate obračunavaju koristeći godišnji intenzitet kamate $r(t) = 0.2 + 0.01t$. Koliko iznosi preostala uplata?

Zadatak 11. Intenzitet kamate $r(t)$ po godini u trenutku t je linearna funkcija prvih m godina (mjereno od trenutka $t = 0$), a zatim konstanta na nivou dostignutom u trenutku m.

(a) Nađite akumulaciju iznosa 1 u vremenskom intervalu $[0, n]$ u terminima od $n, m, r(0), r(m)$.

(b) Izračunajte akumulaciju za $m = 16, r(0) = 0.08, r(16) = 0.048$ za $n = 15$ i $n = 40$.

(c) Nadite konstantan intenzitet koji daje isti rezultat kao u (b) nakon 15 odn. 40 godina.

Zadatak 12. Neka je $r(t)$ zadan Stoodleyevom formulom sa $p = 0.058269, s = 0.037041$ i $r = 1/3$. Investitor će uplatiti 5 puta iznos 600 na početku 5 uzastopnih godina, prva u $t = 0$. Zauzvrat može birati jednu od ponuđenih opcija:

(a) isplatu ukupnog akumuliranog iznosa po isteku 5 godina,

(b) seriju od 5 jednakih isplata u iznosu y na početku 5 uzastopnih godina od kojih prva dospijeva za 5 godina od sada.

Za koje y je opcija (b) povoljnija?

Zadatak 13. U zamjenu za jednokratnu uplatu u iznosu 1000 banka nudi dvije opcije:
(a) Jednokratnu isplatu u iznosu 1200 nakon 4 godine.
(b) Četiri isplate u iznosu 500 na kraju 9.,10.,11. i 12. godine.
Nadjite prinos na obje ove transakcije.

Prepostavimo fiksnu efektivnu kamatnu stopu u periodu koji nastupa nakon 4. godine, kolika mora biti ta stopa da bi akumulacija na kraju 12. godine bila jednaka za oba investicijska plana?

Zadatak 14. Neka se premija plaća godišnje unaprijed u iznosu x tokom n godina. Za uzvrat investitor dobiva m godišnjih isplata u iznosu y s tim da prva isplata dospijeva 1 godinu nakon zadnje uplate.

(a) Neka je $x = 500$, $y = 700$, $n = m = 10$. Iz jednadžbe vrijednosti nadjite prinos na transakciju.
(b) Za koje m uz x, y, n kao u (a) će prinos na transakciju biti iznad 10%?

Zadatak 15. Neka se u $t = 0$ investira iznos x, neka se na kraju svake godine tokom n godina uprihodi jx, te neka se u $t = n$ povuce pocetna investicija x. Iz jednadzbe vrijednosti nađite prinos.

Zadatak 16. Investitor može birati između sljedeća dva plana štednje:
(1) Deset godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 1700 nakon 10 godina.
(2) Petnaest godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 3200 nakon 15 godina.

Koji plan nudi viši prinos? Koje bi druge faktor investitor mogao uzeti u obzir?

Zadatak 17. U zamjenu za jednokratnu uplatu u iznosu 1000 banka nudi 3 mogućnosti:

(a) jednokratna isplata u iznosu 1330 nakon 3 godine
(b) jednokratna isplata u iznosu 1550 nakon 5 godina
(c) četiri godišnje isplate, svaka u iznosu 425, od kojih prva dospijeva nakon 5 godina
Nadite prinose ovih transakcija.
Pretpostavimo da investitor odabere (a) te da isplaćenu svotu reinvestira uz fiksnu kamatnu stopu. Kolika mora biti ta stopa da bi nakon 2 godine akumulacija iznosila 1550? Pretpostavimo da investitor odabere (b) te da nakon isplate odluči kupiti prenumerando rentu plativu tijekom 4 godine. Kolika bi trebala biti kamatna stopa da bi iznos te rente bio 425?

Zadatak 18. Investitor uplaćuje 20 premija godišnje unaprijed. Nakon 20 godina primit će akumulirani iznos svojih uplata koji je izračunat po e.k.s. $i = 8\%$ za prvih 5 godina, $i = 6\%$ sljedećih 7 godina i $i = 5\%$ za zadnjih 8 godina. Nađite iznos isplate ako je svaka uplata iznosila 100. Izračunajte prinos na transakciju.

Zadatak 19. Neka je e.k.s. 12%. Nadite sadašnju vrijednost rente koja se isplaćuje u ukupnom godišnjem iznosu 600 tijekom 20 godina:
(a) godišnje postnumerando,
(b) kvartalno postnumerando,
(c) mjesečno postnumerando,
(d) kontinuirano.

Zadatak 20. Investitor će na poseban račun uplaćivati iznos 10000 u 10 godišnjih rata. Zauzvrat, 1 godinu nakon zadnje uplate, počinje primati godišnju rentu u iznosu 15000 tokom 12 uzastopnih godina.
(a) Odredite prinos na transakciju.
(b) Podrazumijevajući kamatnu stopu impliciranu transakcijom odredite trenutak u kojem bi temeljem izvršenih uplata umjesto ugovorene rente investitoru trebao biti isplaćen iznos od 200000.

Zadatak 21. Postnumerando godišnja renta se plaća n godina, prva isplata je u iznosu 1, a svaka sljedeća je za faktor $(1 + r)$ veća od prethodne. Dokažite da je uz fiksnu godišnju kamatnu stopu i sadašnja vrijednost takve rente jednaka $a_{\overline{n}|,j} \cdot (1 + r)^{-1}$, gdje je $j = (i - r)/(1 + r)$.

Zadatak 22. Investitor plaća premije godišnje unaprijed u iznosu 100 tokom 6 godina. Godinu dana nakon posljednje uplate počinje dobivati godišnju rentu u iznosu y i s trajanjem od 40 godina. Nadjite prinos na transakciju ako je $y = 20$. Koliki treba biti y da bi prinos bio veći od 10%.

Zadatak 23. Uz nominalnu godišnju kamatnu stopu j plativu polugodišnje, sadašnja vrijednost prenumerando vječne rente koja se isplaćuje svake dvije godine u iznosu 1 je 7,66. Nađite j?

Zadatak 24. Prenumerando rentu ćemo dobivati tokom 30 godina: prvih 15 godina u iznosu 7000, te nakon toga 15 godina u iznosu 12000. Pokažite da je njena vrijednost u trenutku prve isplate $12000a_{\overline{29|}} - 5000a_{\overline{14|}} + 7000$.

Zadatak 25. Promotrite godišnju rentu kod koje je prva isplata u iznosu 1000, a svaka sljedeća je za 200 veća od prethodne. Renta se isplaćuje tokom 30 godina, a efektivna kamatna stopa je fiksna i iznosi 6%. Nađite vrijednost ove rente u trenutku prve isplate.

Zadatak 26. Pretpostavimo da je osiguravatelj obećao osiguraniku isplatu iznosa 10000 u trenutku 15. Neka je e.k.s. $i = 4\%$. Osiguranik će plaćati godišnje premije unaprijed, no u njih je uračunat i trošak obnavljanja: 3% svake premije, kao i inicijalni trošak: 1% osigurane svote. Odredite godišnju bruto premiju te Zillmer reserve/pričuvu neposredno prije 5. godišnje uplate.

Poglavlje 2

Slučajne varijable i modeli doživljenja

2.1 Uvod

Tokovi novca koje smo do sada promatrali bili su deterministički. Poopćene tokove novca tretiramo vrlo slično, no sada se teorija oslanja na vjerojatnost. Podsjetimo se, slučajna varijabla X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je izmjerivo preslikavanje $X : \Omega \to \mathbb{R}$, tj. preslikavanje sa svojstvom

$$\{\omega : X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{F}, \qquad \text{za sve } b \in \mathbb{R}.$$

Funkcija distribucije slučajne varijable X je $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ dana sa

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leq x)\,.$$

Ako je razdioba slučajne varijable X koncentrirana na prebrojivom ili konačnom skupu kažemo da je X diskretna slučajna varijabla. Tada, za neki prebrojiv ili konačan $D \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi $P(X \in D) = 1$.

Funkciju $f(x) = f_X(x) = P(X = x)$ zovemo funkcija gustoće diskretne slučajne varijable X. Preko nje obično zadajemo razdiobu od X.

Primjer 2.1.1 (tablica razdiobe diskretne slučajne varijable)

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je naravno $p_i = f(a_i)$. Brojevi a_i u prvom retku su međusobno različiti, a brojevi p_i moraju zadovoljavati $\sum p_i = 1$, $p_i \geq 0$. Diskretne razdiobe su: binomna, Poissonova, geometrijska, hipergeometrijska itd.

Slučajna varijabla je neprekidna ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da je za svaki $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\mathrm{d}s.$$

Funkciju f zovemo funkcija gustoće od X. Nužno je $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{d}s = 1$. Ako je f neprekidna u točki x, za "male" vrijednosti $\triangle x$ vrijedi

$$P(x < X \leq x + \triangle x) = \int_{x}^{x+\triangle x} f(s)\mathrm{d}s \approx f(x)\triangle x\,.$$

Studenti sa znanjem teorije mjere će razmišljati o Lebesgue-integrabilnoj f i govoriti da je X (odn. njena razdioba) apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru. Mi ćemo tipično pretpostavljati da je f i sama neprekidna osim u eventualno konačno mnogo točaka, tada je ona i Riemann integrabilna na svakom konačnom intervalu. Ako je X neprekidna slučajna varijabla tada je neprekidna i njena funkcija distribucije F.

Napomena 2.1. *Posebno ako je X neprekidna tada $P(X \in D) = 0$, za svaki prebrojiv $D \subseteq \mathbb{R}$. Ako je funkcija distribucije F neprekidna i neprekidno derivabilna (osim u eventualno konačno mnogo točaka) tada ona ima gustoću, koju možemo definirati kao $F'(\cdot)$ na skupu gdje je F derivabilna, a 0 izvan tog skupa.*

Primjer 2.1.2 (neke neprekidne slučajne varijable)
i) Uniformna razdioba, npr. $U(0, 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad , \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \geq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad ,$$

ii) Eksponencijalna razdioba, oznaka $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad , \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad ,$$

iii) Cauchyeva razdioba (simetrična)

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Pokažite da je f_X zaista gustoća.
iv) Gaussova ili normalna razdioba, $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Za $\mu = 0$, $\sigma = 1$ razdioba se zove i standardna normalna, a za nju koristimo standardne oznake

$$\varphi(x) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

v) Gama razdioba, $\Gamma(a, b)$, $a, b > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Matematičko očekivanje nenegativne diskretne slučajne varijable X možemo definirati kao

$$EX = \sum_{i \geq 1} a_i p_i = \sum_x x f(x)$$

ako ovaj red divergira $EX = +\infty$. Posebno, za slučajan dogadjaj A, i slučajnu varijablu $\mathbf{1}_A$ očito vrijedi da je $E\mathbf{1}_A = P(A)$.

Matematičko očekivanje općenite diskretne slučajne varijable X definiramo kao

$$EX = EX^+ - EX^-,$$

gdje je $X^+ = \max(X, 0)$, a $X^- = -\min(X, 0)$, ako je bar jedno od očekivanja na desnoj strani konačno. Prema dogovoru za svaki realan broj a vrijedi $\pm\infty + a = \pm\infty$.

Ako je X nenegativna i neprekidna s gustoćom f, i ako je funkcija $xf(x)$, $x > 0$ integrabilna na $[0, \infty)$, matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X računamo kao

$$EX = \int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x\,.$$

Kao i u diskretnom slučaju za općenite neprekidne slučajne varijable stavljamo

$$EX = EX^+ - EX^-.$$

Za (izmjerivu) realnu funkciju u može se pokazati da je

$$E\, u(X) = \int_{-\infty}^\infty u(s) f(s) \mathrm{d}s\,,$$

ako $Eu(X)$ postoji. Varijancu slučajne varijable X definiramo kao $E(X - EX)^2$ gdje taj izraz definiramo u gornjem smislu.

Napomena 2.2. *Uočite, ponekad se u literaturi govori da očekivanje postoji samo ako je $E|X| < \infty$ (v. npr. N. Sarapa [4] 1.dio), tada očekivanje ne postoji općenito čak ni za nenegativne slučajne varijable. No ako je $X \geq 0$, a EX divergira k $+\infty$, mi ipak pišemo $EX = +\infty$.*

Teorem 2.3. *Za neprekidnu i nenegativnu slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem vrijedi*

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx.$$

O raznim interpretacijama matematičkog očekivanja

Očekivanje kao limes u jakom zakonu velikih brojeva

Po Kolmogovljevom jakom zakonu velikih brojeva za niz n.j.d. slučajnih varijabli (X_i) vrijedi: očekivanje EX_1 postoji i konačno je ako i samo ako

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \stackrel{\text{g.s.}}{\to} EX_1, \quad n \to \infty.$$

Kako konvergencija g.s. povlači konvergenciju po vjerojatnosti, uz uvjet $E|X| < \infty$ vrijedi i

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \stackrel{P}{\to} EX_1, \quad n \to \infty.$$

Očekivanje kao najbolja aproksimacija

Pretpostavimo da slučajna varijabla X ima konačnu varijancu $\text{var}X < \infty$ i da želimo odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da je

$$E(X - c)^2$$

minimalno, tada je $c = EX$, jer

$$E(X - z)^2 = E(X - EX)^2 + (EX - z)^2 \geq \text{var}X.$$

Očekivanje kao fair cijena odn. premija za igru sa slučajnim ishodom

Ako promatramo igru koja kada se dogodi sl. dogadjaj A donosi dobitak $a > 0$, odn. gubitak iznosa $b > 0$ ako se A ne dogodi, i ako je $P(A) = p$, $q = 1 - P(A)$, mogli bismo reći da je fair cijena ove igre

$$-bq + ap$$

što je dakako očekivanje slučajne varijable koja ima razdiobu dobitka u ovoj igri

$$Y \sim \begin{pmatrix} -b & a \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Ispostavlja se da postoji puno situacija u kojima bi ovakvo određivanje fair cijene imalo nerazumne ili neočekivane posljedice, primjeri su: eu–call opcija, Sankt Petersburg paradoks ili problem dvije omotnice.

Primjer 2.1.3 (neprekidne slučajne varijable bez konačnog očekivanja) i) Pareto razdioba, oznaka $\mathrm{Par}(\alpha, \kappa)$ za neke parametre $\alpha, \kappa > 0$.

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{\kappa}{\kappa+x}\right)^\alpha & 0 < x \\ 1 & \text{inače} \end{cases},$$

i stoga

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\kappa^\alpha}{(\kappa+x)^(\alpha+1)} & 0 < x \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

Provjerite: $EX = +\infty$ akko $\alpha \leq 1$.

ii) Cauchyeva razdioba (simetrična)

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Pokažite da je $EX^+ = EX^- = \infty$, dakle očekivanje ne postoji.

Važna svojstva i nejednakosti vezane uz mat. ocekivanje su linearnost, Jensenova nejednakost, Markovljeva nejednakost itd.

Slučajni vektor (X, Y) ima zajedničku funkciju distribucije $F = F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ zadanu sa

$$F_{(X,Y)}(u, v) = F(u, v) = P(X \leq u, Y \leq v).$$

Slučajni vektor (X, Y) je neprekidan ako postoji Riemann integrabilna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ t.d. je

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f(s, t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \qquad (2.1)$$

Funkciju f zovemo (zajednička) funkcija gustoće od (X, Y) (alternativno i od F). Nužno je $\int_{\mathbb{R}^2} f(s, t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 1$.

Ako postoji zajednička gustoća, postoje i *marginalne gustoće* varijabli X i Y, npr. X ima gustoću

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

Ako je $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija tada je

$$E\, u(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(s, t)f(s, t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\,,$$

čim postoji $Eu(X, Y)$.

Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

za sve izmjerive skupove $A_i \subseteq \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$.

Prisjetimo se: diskretne slučajne varijable su nezavisne akko im se zajedničke funkcije gustoće faktoriziraju. Za neprekidne varijable vrijedi

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable s marginalnim gustoćama f_X i f_Y, tada je i sl. vektor (X, Y) neprekidan sa gustoćom

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)\,.$$

Obrnuto, ako se zajednička funkcija gustoće može faktorizirati kao $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, tada su X i Y nezavisne.

Ako su X i Y neprekidne i nezavisne slučajne varijable s gustoćama f_X odn. f_Y tada je neprekidna i $Z = X + Y$, te ima gustoću

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z - u) \mathrm{d}u.$$

Gustoća f_Z se naziva i konvolucija gustoća slučajnih varijabli X i Y.

Za nezavisne slučajne varijable X i Y s konačnim očekivanjem vrijedi i

$$E(XY) = E(X)E(Y)\,.$$

Uvjetnu vjerojatnost dogadjaja A uz uvjet B, gdje $P(B) > 0$, definiramo kao

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)\,.$$

Ako je B slučajan dogadjaj takav da $P(B) > 0$, a X diskretna slučajna varijabla s

$$f(x|B) = P(X = x|B)$$

zadana je uvjetna razdioba (točnije gustoća) slučajne varijable X uz uvjet B.

Kako je $f(x|B)$ ponovo funkcija gustoće možemo izračunati uvjetno očekivanje od X uz uvjet B kao

$$E(X|B) = \sum_x x^+ f(x|B) - \sum_x x^- f(x|B)\,,$$

kada bar jedan red na desnoj strani konvergira.

Uvjetno očekivanje općenitije

Uvjetnu razdiobu odn. očekivanje možemo definirati i za neprekidne slučajne varijable Neka je X neprekidna slučajna varijabla i neka je dan sl. dogadjaj A, $P(A) > 0$, tada je dobro definirana uvjetna funkcija distribucije

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A),$$

pa i za nju možemo tražiti gustoću ako postoji. Nas će posebno zanimati uvjeti oblika

$$\{\omega : a < X(\omega) \leq b\},$$

za $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Uvjetnu gustoću slučajne varijable X uz uvjet A je tada posebno lako naći kao

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} f(x)/(F(b) - F(a)) & \text{za } x \in (a, b] \\ 0 & \text{inače} . \end{cases}$$

Tada uvjetno očekivanje definiramo kao

$$E(X|A) = \int_a^b x \frac{f(x)}{F(b) - F(a)} \mathrm{d}x .$$

Primjer 2.1.4 Neka je T duljina života sl. odabrane osobe, često će nam trebati uvjetna funkcija distribucije i uvjetno očekivanje

$$F(t|x) := F_{T|T>x}(t + x) = P(T \leq t + x|T > x) \quad \text{i} \quad E(T - x|T > x) .$$

2.2 Intenzitet hazarda

Duljinu trajanja života slučajno odabrane osobe u nastavku promatramo kao **neprekidnu** slučajnu varijablu T s vrijednostima u $[0, \infty)$. Osim funkcije distribucije slučajne varijable T nas će često zanimati i *funkcija doživljenja* od T tj.

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t) .$$

Mi u nastavku pretpostavljamo da je T neprekidna slučajna varijabla, tj da postoji njena gustoća i da je za $t > 0$ možemo izraziti kao

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{F}(t) .$$

Intenzitet hazarda ili *smrtnosti* [force of mortality/hazard rate] neprekidne slučajne varijable T definiramo kao

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

za sve t za koje je $\bar{F}(t) > 0$. Uočite da je

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\log \bar{F}(t)) \tag{2.2}$$

za sve t za koje je $\bar{F}(t) > 0$ i u kojima je $\bar{F}$ derivabilna.

Intuitivno, za malo $\mathrm{d}t$ je

$$\mu(t)\mathrm{d}t = \frac{f(t)\mathrm{d}t}{\bar{F}(t)} \approx \frac{P(t < T < t + \mathrm{d}t)}{P(T > t)} = P(T \leq t + \mathrm{d}t | T > t)\,.$$

Tj. vjerojatnosti smrti osobe starosti t u predstojećem intervalu duljine $\mathrm{d}t$ je proporcionalna $\mathrm{d}t$, a faktor proporcionalnosti je upravo intenzitet smrtnosti.

Integrirajući (2.2) dobijemo

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s},$$

kao i

$$f(t) = \mu(t)\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}\mu(t)\,.$$

Napomena 2.4. *Očito funkcijama F, $\bar{F}$, f i μ možemo na razne načine zadati zakon smrtnosti. Zbog $\bar{F}(\infty) = 0$ mora biti $\int_0^\infty \mu(s)ds = \infty$. Funkciju $\Lambda(t) = -\log \bar{F}(\cdot) = \int_0^t \mu(s)ds$ zovemo* kumulativna funkcija hazarda, *iako se u literaturi i ona katkad naziva funkcijom hazarda.*

Ako postoji najveća moguća životna dob u populaciji, recimo $w \geq 0$, (tj. $\bar{F}(w) = 0$ i $\bar{F}(t) > 0$ za $t < w$) tada

$$\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s \to \infty$$

za $t \to w$. Posebno ako pretpostavimo da je μ monotono rastuća, tada mora biti $\mu(t) \to \infty,\;$ za $t \to w$.

Mi tipično promatramo osobu koja je već doživjela dob $x > 0$ (život u dobi x ili *life aged* x) i zanima nas njena preostala duljina života T_x. Razdioba od T_x je uvjetna razdioba od $T - x$ uz uvjet $T > x$. Njena je funkcija distribucije

$$F_{T_x}(t) = F(t|x) := P(T \leq t + x | T > x) = \frac{F(x + t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

za sve $t \geq 0$, uz pretpostavku $\bar{F}(x) > 0$. Funkcija doživljenja joj je

$$\bar{F}(t|x) := P(T > t + x | T > x) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)},$$

za sve $t \geq 0$. Gustoća ove uvjetne razdiobe je

$$f(t|x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x)}.$$

Međunarodne aktuarske oznake

Međunarodno prihvaćene aktuarske oznake su

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= F(t|x) = P(T_x \leq t), \\
{}_tp_x &= \bar{F}(t|x) = P(T_x > t) = 1 - {}_tq_x, \\
\mu_{x+t} &= \mu(x+t).
\end{aligned}$$

Posebno

$$\begin{aligned}
{}_tq_0 &= F(t), \\
{}_tp_0 &= \bar{F}(t),.
\end{aligned}$$

Ako je $t = 1$ može se izostaviti, pa pišemo $q_x = {}_1q_x$ i $p_x = {}_1p_x$.

Postoji npr. propisana oznaka i za vjerojatnost smrti u periodu $[x+n, x+m+n)$ osobe koja je doživjela dob x:

$${}_{n|m}q_x = {}_{n+m}q_x - {}_nq_x = {}_np_x - {}_{n+m}p_x .$$

kao i za očekivanu preostalu duljinu života:

$$\mathring{e} = \bar{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty tf(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty {}_tp_x \mathrm{d}t .$$

Primjer 2.2.1 (zaboravljivost eksponencijalne razdiobe) Ako je duljina života u nekoj populaciji eksponencijalno distribuirana, tj. $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, tada

$$\mu(x) = \lambda \quad \text{i} \quad \bar{F}(t|x) = \bar{F}(t), \; x, t > 0$$

Kako se mnogi tokovi novca odvijaju u diskretnim vremenskim trenucima ponekad je korisno diskretizirati duljinu života. Pretpostavljamo dakle da je T neprekidna slučajna varijabla, ali promatramo slučajnu varijablu $K = \lfloor T \rfloor$ s vrijednostima u skupu $\mathbb{N}_0$.

Ako je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ kao gore, tada će K imati geometrijsku razdiobu s parametrom $1 - p = 1 - e^{-\lambda}$, tj. za $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = e^{-k\lambda} - e^{-(k+1)\lambda} = p^k(1 - p)\,.$$

Općenito za preostalu duljinu života u godinama $K_x = \lfloor T_x \rfloor$, zbog neprekidnosti razdiobe od T dobijemo

$$\begin{aligned}
&P(K_x = k) = P(T_x \in [k, k + 1)) \\
&= \; P(T - x \in [k, k + 1)|T > x) = P(T - x > k|T > x)P(T - x - k \leq 1|T > x + k) \\
&= \; {}_kp_x\, q_{x+k}\,.
\end{aligned}$$

Tako da

$$\begin{aligned}
&e_x := E(K_x) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(K_x = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_kp_x\, q_{x+k} \\
&= \; \sum_{k=0}^{\infty} P(K_x \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x\,.
\end{aligned}$$

Uvedimo $T_x = K_x + S$, jasno $S \in [0, 1)$ g.s., katkad koristimo aproksimaciju $\bar{e}_x \approx e_x + 1/2$.

Primjetite za $k \in \mathbb{N}$ i $u \in [0, 1)$

$$P(S \leq u|K_x = k) = \frac{{}_uq_{x+k}}{q_{x+k}}\,.$$

Ako su S i K_x nezavisne slučajne varijable tada je gornji izraz neovisan o k, tj. $P(S \leq u|K_x = k)$ je isključivo funkcija od u, recimo $H(u)$.

Primjer 2.2.2 Vrijedi da je $H(u) = P(S \leq u) = u$ za $u \in [0, 1]$ akko je $S \sim \mathrm{U}(0, 1)$.

Slično definiramo $S^{(m)}$ kao duljinu života u posljednjoj godini zaokruženu na prvi veći od brojeva $1/m, 2/m, \ldots, 1$, tj.

$$S^{(m)} = \frac{1}{m}\lfloor mS + 1 \rfloor.$$

Ako su K i S nezavisni, a $S \sim \mathrm{U}(0,1)$ tada $S^{(m)}$ ima diskretnu uniformnu razdiobu na $\{1/m, 2/m, \ldots, 1\}$.

2.3 Zakoni smrtnosti

Razdioba slučajne varijable T možemo dakle zadati preko $f,\ F,\ \bar{F}$ ili μ. Povijesno važne i popularne razdiobe su:

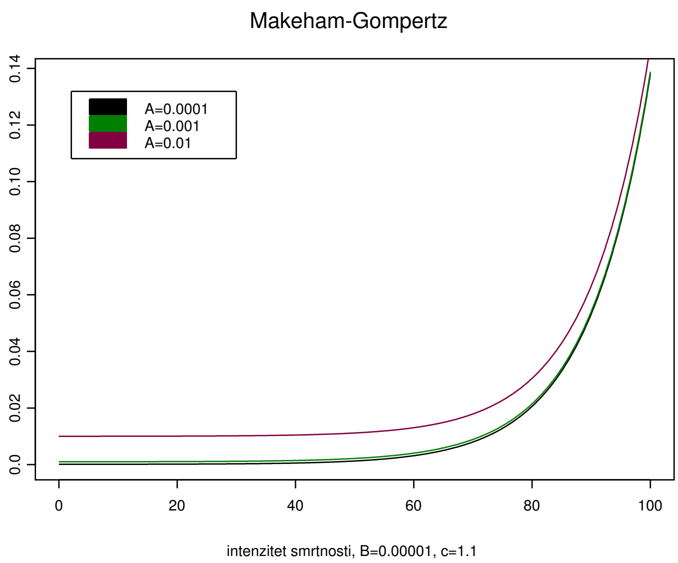
- de Moivreov zakon (1724)

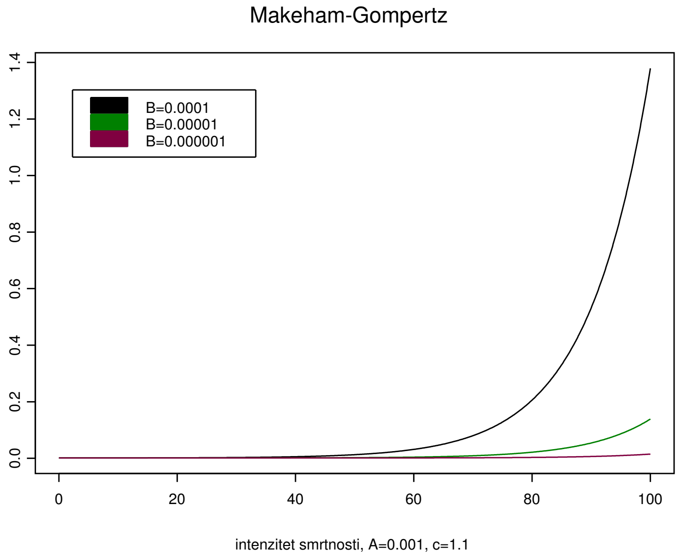
  Za $w > 0$, neka je
  $$f(x) = \frac{1}{w} \qquad \text{na } (0, w)$$

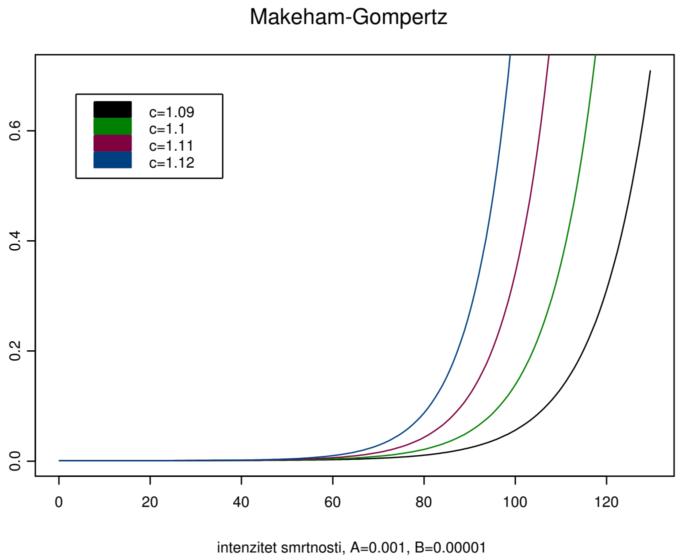
- Gompertz (1824) Za realne parametre $B > 0$ i $c > 0$
  $$\mu(x) = Bc^x \qquad \text{za } x > 0.$$

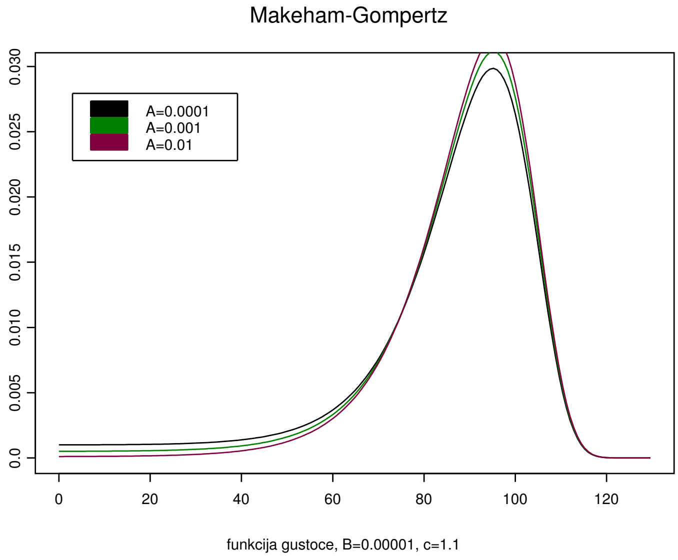
- Makeham (1860) Za realne parametre $A > 0,\ B \geq 0$ i $c > 0$
  $$\mu(x) = A + Bc^x \qquad \text{za } x > 0.$$

  Pokazuje se da vrijedi
  $$\bar{F}(t|x) = \exp\left(-At - mc^x(c^t - 1)\right),$$
  gdje je $m = B/\log c$.

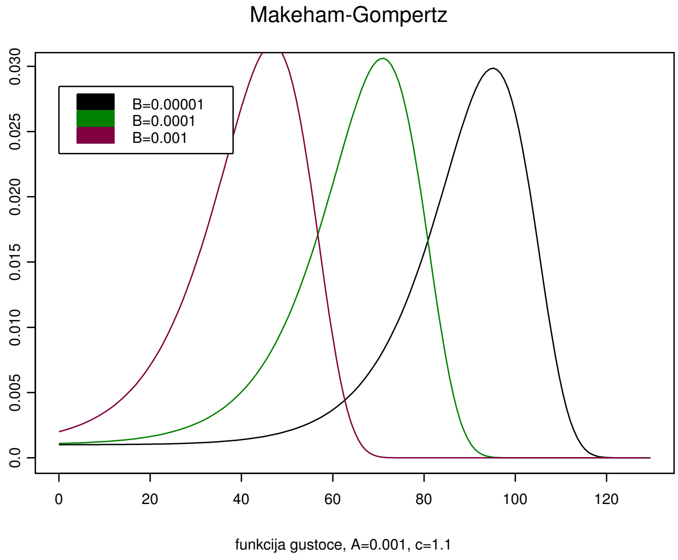



Makeham-Gompertz
B=0.0001
B=0.00001
B=0.000001
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
intenzitet smrtnosti, A=0.001, c=1.1

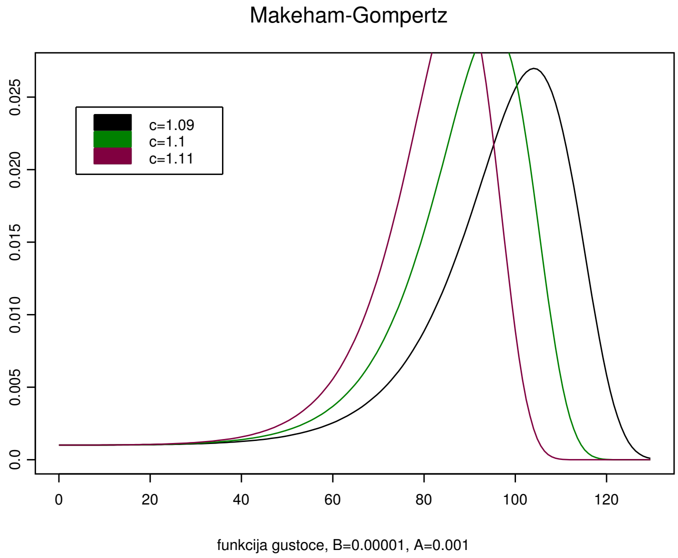

Makeham-Gompertz
c=1.09
c=1.1
c=1.11
c=1.12
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
120
intenzitet smrtnosti, A=0.001, B=0.00001



Makeham-Gompertz
A=0.0001
A=0.001
A=0.01
0.0
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0
20
40
60
80
100
120
funkcija gustoce, B=0.00001, c=1.1



Makeham-Gompertz
B=0.00001
B=0.0001
B=0.001
0.0
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0
20
40
60
80
100
120
funkcija gustoce, A=0.001, c=1.1



- Weibull (1939) Za realne parametre $\kappa > 0, \;\alpha \geq 0$

$$\mu(x) = \kappa\, x^{\alpha} \qquad \text{za } x > 0.$$

ako je $\alpha = 0$, razdioba je zapravo eksponencijalna.

- Dvostruki geometrijski zakon (1867)

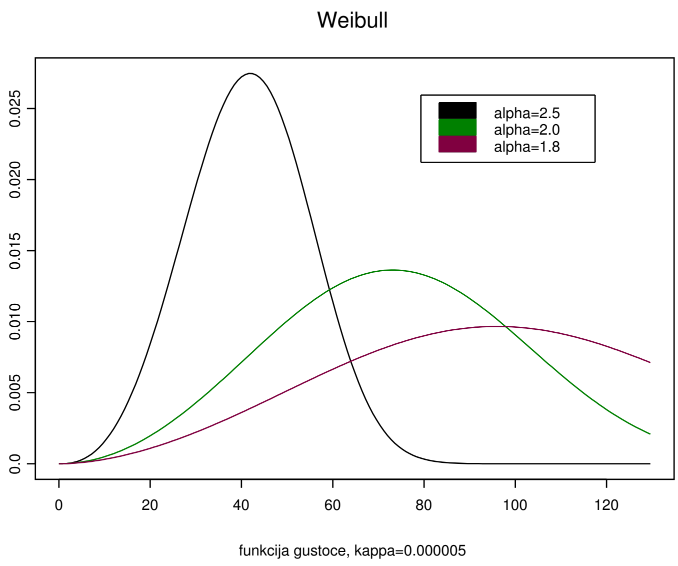
$$\mu(x) = Bc^x + Mn^x \qquad \text{za } x > 0.$$

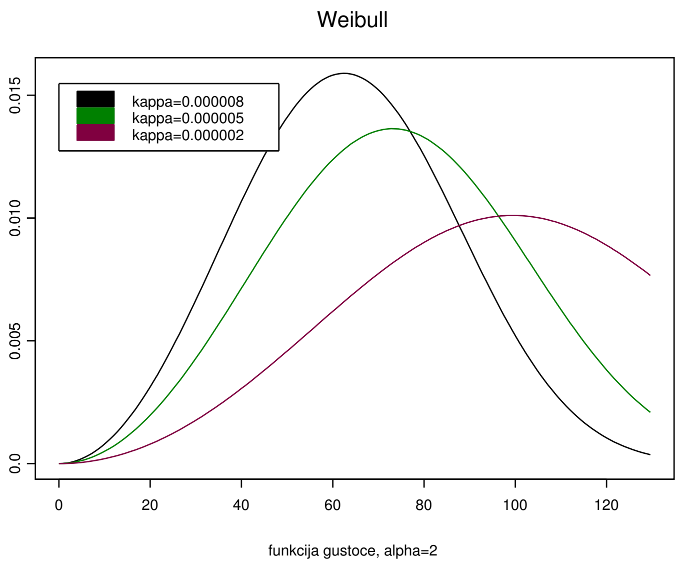
- Makeham II (1889)

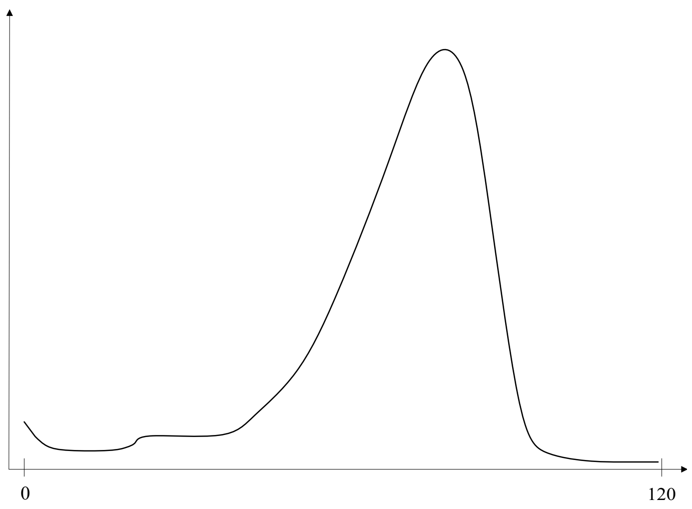
$$\mu(x) = A + Hx + Bc^x \qquad \text{za } x > 0.$$

- Perk (1931)

$$\mu(x) = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x} \qquad \text{za } x > 0.$$


Weibull
alpha=2.5
alpha=2.0
alpha=1.8
0.0
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0
20
40
60
80
100
120
funkcija gustoce, kappa=0.000005


Weibull
kappa=0.000008
kappa=0.000005
kappa=0.000002
0.0
0.005
0.010
0.015
0
20
40
60
80
100
120
funkcija gustoce, alpha=2



Oblik empirijske procjene fukcije gustoće za duljinu života u tipičnom suvremenom društvu

Razdiobe s monotonim intenzitetom smrtnosti

Promotrimo prvo diskretne razdiobe koncentrirane na $\mathbb{N}_0$. Za njih možemo definirati (diskretni) intenzitet smrtnosti ili hazarda kao

$$m(n) = P(K = n | K \geq n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Intenzitet smrtnosti je ponekad samo lokalno monotona funkcija. Za diskretne razdiobe pak, funkcija m je nerijetko monotona. Ako je duljina života T neprekidna slučajna varijabla, tada je za $K = \lfloor T \rfloor$, intenzitet smrtnosti $m(n) = q_n$, $n \in \mathbb{N}$.

I funkciju doživljenja za K možemo izraziti preko m, npr. za $k \in \mathbb{N}_0$ imamo

$$\bar{F}(k) = P(K > k) = P(K \geq k+1) = P(K \geq k)\,(1 - P(K \leq k | K \geq k)) = \cdots = \prod_{i=0}^{k}(1-m(i)),$$

a gustoću diskretne slučajne varijable K nadjemo kao

$$P(K = k) = m(k)\bar{F}(k-1), \ k \in \mathbb{N}.$$

Primjer 2.3.1 Niz $(m(n))$ može biti i konstantan, to je naime slučaj za geometrijsku razdiobu. Naime u tom je primjeru $m(n) = 1 - p$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$, za parametar $p \in (0, 1)$. Lako se vidi i da geometrijska razdioba ima svojstvo (diskretne) zaboravljivosti, tj. ako je K geometrijski distribuirana

$$P(K \geq i + j | K \geq j) = P(K \geq i), \qquad \text{za sve } i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Kažemo da je razdioba diskretne slučajne varijable K, razdioba rastućeg hazarda ako je niz $(m(n))$ monotono rastući. Za niz realnih brojeva (p_k) kažemo da je log-konkavan ako $p_{k+1}^2 \geq p_{k+2}p_k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ (odn. log-konveksan ako vrijedi obrnuta nejednakost). Interesantno je da vrijedi: ako je niz $p_k = P(K = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, strogo pozitivan i log-konkavan tada je razdioba slučajne varijable K monotono rastućeg hazarda.

Napomena 2.5. *Svaka Poissonova razdioba je razdioba rastućeg hazarda. Negativna binomna razdioba je razdioba monotono rastućeg hazarda ako $\alpha \geq 1$.*

Ako je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, znamo da za sve $s, t \geq 0$ vrijedi

$$P(T > s + t | T > s) = P(T > t).$$

Pokažite da gornja tvrdnja vrijedi i ako s zamijenimo bilo kakvom nenegativnom i neprekidnom slučajnom varijablom nezavisnom s T.

Promotrimo sada funkciju hazarda neprekidnih razdioba. Mi smo već uveli

$$F_{T_x} = F(t|x) = P(T - t \leq x | T > x), \qquad t > 0,$$

uvedim još i *funkciju očekivanog preostalog života* (odn. očekivane preostale duljine života, *mean residual life*)

$$\bar{e}_x := E(T - x | T > x), \qquad x \geq 0.$$

Ona je od izuztene važnosti i u teoriji rizika te matematičkim financijama, gdje se naziva i *funkcija očekivanog viška* (*mean excess function*).

Uvedimo parcijalni uredjaj na skup funkcija distribucije (tj. razdioba), naime kažemo da je distribucija F stohastički manja od distribucije G i pišemo

$$F \overset{st}{\leq} G$$

ako

$$\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Može se pokazati da je funkcija hazarda neprekidne razdiobe monotono rastuća ako i samo ako je familija razdioba $F(|x)$ stohastički padajuća. Tada kažemo da je T, odn. njena razdioba, rastućeg hazarda. Preciznije: neprekidna razdioba na $[0, \infty$ s funkcijom distribucije F je monotono rastućeg hazarda akko je za sve $0 \leq x \leq y < \infty$

$$F_{T_x} \overset{st}{\geq} F_{T_y}\,.$$

Razdioba od T_x nije važna samo za osiguranje života, već i u općoj teoriji osiguranja. Npr. ako je X ukupna šteta za osig. kompaniju u danom periodu,

$$\bar{e}_x := E(X - x | X > x)$$

je očekivana vrijednost štete kod tzv. stop-loss reosiguranja.

U teoriji pouzdanosti uvode se i pojmovi NBU–*new better than used* i NWU–*new worse than used* razdioba ako

$$F_{T_x} \overset{st}{\leq} F \qquad x \geq 0,$$

odn.

$$F_{T_x} \overset{st}{\geq} F \qquad x \geq 0.$$

Očito je razdioba rastućeg hazarda i NBU.

2.4 Životne tablice (tablice smrtnosti)

Parametarski modeli nam nisu nužni ako postoji dovoljno kvalitetnih empirijskih podataka o zakonu smrtnosti. Tada zakon razdiobe možemo izraziti i životnim tablicama.

Prve životne tablice sastavili su J. Graunt (1662) i Sir E. Halley (1693). Nedugo zatim proučavali su ih i poznati matematičari tog vremena, medju ostalima J. Bernoulli i C. Huygens. Danas su sveprisutne, a sastavljaju se i u Hrvatskoj.

Obično, tablica smrtnosti za $k \in \mathbb{N}_0$ sadrži brojeve

$$l_k = \text{ (očekivani) broj osoba u danoj populaciji koji je živ u dobi } x\,.$$

Posebno, broj

$$l_0 = \text{ (očekivani) broj novorodjenih osoba u danoj populaciji}\,,$$

se još zove i korijen tablice. Ovo je zapravo samo korisna interpretacija brojeva u tablici, no uvijek možemo staviti da je npr. $l_0 = 10^6$ ili $l_0 = 10^3$, što se često i čini.

Upravo niz (funkcija) l_x predstavlja tablicu smrtnosti. Uočite, l je tipično funkcija zadana na $\mathbb{N}_0$, t.j. $(l_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zadajemo kao niz. U tablicama se često nalaze i brojevi

$$d_k = \text{ (očekivani) broj smrti u intervalu } [k, k+1) = l_k - l_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Napomena 2.6. *Tablicama je moguće dati i determinističku interpretaciju, npr. možemo pretpostaviti da je l_x točan broj osoba koje će biti žive u dobi x u portfelju osiguravatelja. I takva prepostavka omogućuje da korektno izračunamo premije koristeći samo očekivane vrijednosti, no ona predstavlja problem ako moramo koristiti bilo koju metodu statističkog zaključivanja ili dati ocjenu rizičnosti.*

Iz tablica je lako *odrediti* razne vjerojatnosti, npr.

$$\bar{F}_T(k) = P(T > k) = P(T \geq k) = {}_kp_0 = l_k/l_0\,.$$

Uočite da gore pišemo znak jednakosti iako se u praksi zapravo uvijek radi o procjeni. Na intervalima $[k, k+1)$, l_x odn. ${}_xp_0$ se može dobiti interpolacijom.

Za cijele brojeve k, zbog neprekidnosti slučajne varijable T

$$\begin{aligned}
{}_kq_x &= P(T_x \leq k) = P(T_x < k) = p(K_x \leq k-1) = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x} \\
{}_kp_x &= P(T_x > k) = P(T_x \geq k) = p(K_x \geq k) = \frac{l_{x+k}}{l_x}
\end{aligned}$$

Mi pretpostavljamo da je ukupna duljina života neprekidna slučajna varijabla, posebno za sve $t > 0$, $P(T_x = t) = P(T = t) = 0$. Zato je za $k \in \mathbb{N}_0$ uočite

$$P(K_x = k) = P(k \leq T_x < k+1) = P(T_x \geq k) - P(T_x \geq k+1)\,.$$

No za $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P(K_x \geq k) =_k p_x = P(T_x \geq k) &= P(T_x \geq k-1)\frac{P(T_x \geq k)}{P(T_x \geq k-1)} \\
&= P(T_x \geq k-1)\frac{P(T - x \geq k | T > x)}{P(T - x \geq k-1 | T > x)} \\
&= P(T_x \geq k-1)\frac{P(T \geq k+x)}{P(T \geq x+k-1)} \\
&= P(T_x > k-1)\frac{P(T > k+x)}{P(T > x+k-1)} \\
&= {}_{k-1}p_x \; p_{x+k-1} = \cdots = \prod_{l=0}^{k-1}(1 - q_{x+l}).
\end{aligned}$$

Zato je zakon razdiobe slučajne varijable K_x određen izrazom

$$P(K_x = k) =_k p_x q_{x+k}$$

za $k \in \mathbb{N}_0$

Tablice s odabirom (select)

Osiguravajuća društva obično dijele potencijalne klijente po spolu, generaciji i sl. No često imaju razloga pretpostaviti i da se potpisnici ugovora o osiguranju razlikuju od ostalog dijela populacije. Te osobe npr.
- prolaze medicinski pregled prije sklapanja ugovora ili
- vjeruju da su dobroga zdravlja te na toj osnovi sklapaju ugovor o životnoj renti.

Tablice za ovakve osobe se obično zovu *select* tj. tablice s odabirom. U njima se vjerojatnosti nešto drugačije označavaju. Npr. vjerojatnost da će takva osoba koja je pristupila osiguranju u dobi x, a sada je u dobi $x + t$ umrijeti u sljedećih godinu dana je sa

$$q_{[x]+t}$$

Nakon izvjesnog perioda ovakve osobe imaju jednaku funkciju doživljenja kao i ostatak populacije. *Period odabira* obično traje $r \in \mathbb{N}$ godina. Nakon toga se koriste tzv. *ultimate (krajnje)* tablice. Dakle

$$q_{[x]+t} = q_{x+t}, \qquad \text{za sve } t \geq r\,.$$

Dakle ako tražimo razdiobu slučajne varijable $K = K_x = \lfloor T_x \rfloor$ i ako je period odabira 3 godine imamo

$$P(K_x = k) = q'_{x+k} \prod_{l=0}^{k-1} (1 - q'_{x+l})$$

gdje je $(q'_x, q'_{x+1}, q'_{x+2}, q'_{x+3}, q'_{x+4}, \ldots) = (q_{[x]}, q_{[x]+1}, q_{[x]+2}, q_{x+3}, q_{x+4}, \ldots)$. Tablice koje ne razlikuju odabranu populaciju zovu se skupne (*aggregate*) ili agregatne.

Uobičajeni izgled tablica s odabirom

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	$x+2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
42	.00126512	.00168105	.00233523	44
43	.00113404	.00150654	.00263723	45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Vjerojatnost smrti u dijelovima godine

Životne tablice zadaju samo zakon razdiobe slučajne varijable $K = \lfloor T_x \rfloor$, tj. duljine života u godinama

$$P(K \geq k) = {}_k p_x = p_x p_{x+1} \cdots p_{x+k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Razdioba slučajne varijable T može se dobiti interpolacijom uz neke dodatne pretpostavke o funkcijama

$$ {}_u q_x \text{ odn. } \mu_{x+u} \qquad \text{za } u \in (0,1)\,. $$

Česte prepostavke su, za $x \in \mathbb{N}_0,\ u \in (0,1)$:

a) linearnost funkcije ${}_u q_x$, tj.

$$ {}_u q_x = u \cdot q_x\,, $$

što je ekvivalentno tome da $\mu_{x+u} = q_x/(1-uq_x)$ odn. K i S su nezavisne, te

$$ T - K = S \sim U(0,1). $$

U tom slučaju funkcija distribucije slučajne varijable T zapravo se dobije linearnom interpolacijom od funkcije distribucije slučajne varijable K izmedju cjelobrojnih vjerojanosti.

b) intenzitet smrtnosti tokom godine je konstantan i jednak nekoj konstanti $\mu_{(x+1/2)}$. Tada mora biti

$$ \mu_{(x+1/2)} = -\ln p_x \quad \text{i} \quad {}_u p_x = e^{-u\mu_{(x+1/2)}} = p_x^u\,, $$

a S ima odrezanu eksponencijalnu razdiobu. Mogli bismo reći dakle da T ima po dijelovima eksponencijalnu razdiobu

c) linearna je funkcija ${}_{1-u}q_{x+u}$ (Balduccijeva pretpostavka) tj.

$$ {}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x\,. $$

Napomena 2.7. *Za ove prepostavke možemo reći da su "poluparametarske". Nijedna od njih nije vrlo realistična, intenzitet smrtnosti u sva tri slučaja ima skokove, a u slučaju c) je čak padajuća funkcija na intervalima* $[k, k+1),\ k \in \mathbb{N}$.

Zadaci

Zadatak 1. Pokažite da za $\varepsilon \to 0$, u točkama neprekidnosti od f:

$$\frac{P(T \leq t+\varepsilon | T > t)}{\varepsilon} \to \mu(t)\,.$$

Zadatak 2. Pokažite da je uvjetni intenzitet smrtnosti (intenzitet hazarda) odn. intenzitet hazarda slučajne varijable T_x dan sa $\mu(t|x) = \frac{f(t+x)}{\bar{F}(t+x)} = \mu(t+x)$.

Zadatak 3. Ako slučajna varijabla T ima Makeham-Gompertzovu razdiobu (tj. intenzitet hazarda $\mu(x) = A + Bc^x,$ za $x > 0$,) pokažite da vrijedi

$$\bar{F}(t|x) = \exp\left(-At - mc^x(c^t - 1)\right),$$

gdje je $m = B/\log c$.

Zadatak 4. Parcijalnom integracijom pokažite da za neprekidnu i nenegativnu sl. var. T vrijedi

$$\bar{e}_x = \frac{\int_x^\infty \bar{F}(t)\mathrm{d}t}{1 - F(x)}\,.$$

Zadatak 5. Pokažite, za nenegativne x, s, t

(a) ${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_s \mathrm{d}s\right)$

(b) $\frac{d}{dx}\,{}_tp_x = (\mu_x - \mu_{x+t})\,{}_tp_x$

(c) ${}_{s+t}p_x = {}_tp_{x+s} \cdot {}_sp_x$.

Zadatak 6. Pretpostavimo da vrijedi de Moivreov zakon smrtnosti, gdje je maksimalna dob $w > 0$. Nađite $\bar{F}_T, \mu$ i varT_{16}, ako se zna da je $ET_{16} = 36$.

Zadatak 7. Na slučajan način biramo dvije osobe jednake životne dobi iz dane populacije. Pretpostavimo da je jedna osoba pušač, a druga ne. Neka je $\mu(x),\ x > 0$ intenzitet smrtnosti za nepušače, a $c\mu(x),\ x > 0$ intenzitet smrtnosti za pušače, gdje je $c > 1$. Izračunajte vjerojatnost da ce pušač nadživiti nepušača.

Zadatak 8. Neka je

$$\bar{F}(t|x) = \left(\frac{100 - x - t}{100 - x}\right)^2, \qquad 0 \leq t \leq 100 - x.$$

Nađite $\operatorname{var} T_x$.

Zadatak 9. (Teorem o lošoj sreći) Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s gustoćom f. Definiramo

$$K := \inf\{n \geq 2 : X_n \geq X_1\}.$$

Nađite razdiobu i očekivanje od K.

Zadatak 10. Pretpostavimo da je životni vijek u populaciji A neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_A, a životni vijek u populaciji B neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_B. Neka je vjerojatnost da odaberemo osobu iz populacije A odn. B jednaka p odn. $1-p$. Odredite gustoću životnog vijeka slučajno odabrane osobe.

Zadatak 11. Neka je funkcija distribucije duljine života u nekoj populaciji zadana relacijom

$$F(x) = 1 - \frac{\sqrt{100-x}}{10},$$

za $0 \leq x \leq 100$. Odredite gustoću slučajne varijable T_{33} (odn buduće duljine života za osobu u dobi 33), te ET_{33}. Odredite i vjerojatnost da će osoba u dobi 33 doživjeti dob 63.

Zadatak 12. Jedna, prilična skupa komponenta za vaš pokvareni PC se na tržištu nalazi u dvije varijante: s vjerojatnošću p kupit ćete nelegalnu kopiju čiji je vijek trajanja eksponencijalno distribuiran s parametrom λ', a s vjerojatnošću $1-p$ legalnu kopiju čiji je vijek trajanja eksponencijalno distribuiran s parametrom λ. Pretpostavimo da je $\lambda < \lambda'$. Neka je T životni vijek ovako nabavljene komponente, odredite mu intenzitet hazarda.

Zadatak 13. Osobe A i B su slučajno odabrane iz populacije za koju intenzitet smrtnosti u dobi t iznosi $\mu(t)$, a osoba C iz populacije za koju je intenzitet smrtnosti $3\mu(t)/2$. Sve osobe su iste dobi, a preostale duljine života su im medjusobno nezavisne. Kolika je vjerojatnost da će osoba C živjeti najdulje od njih?

Zadatak 14. Zakon smrtnosti je zadan funkcijom

$$l_x = \sqrt{121-x},\ 0 \geq x \geq 121.$$

Izračunajte vjerojatnost da je osoba koja je doživjela dob od 21 godine živjela duže od 40, ali ne duže od 57 godina.

Zadatak 15. Pretpostavite da je tablica smrtnosti zadana formulom

$$l_x = \frac{10000}{(x+1)^3}$$

za $x \geq 0$. Nađite izraz za $\mathrm{var}(T_x)$, gdje je T_x buduća duljina života za osobu u dobi x.

Zadatak 16. Zadana je tablica

x	e_x
75	10.5
76	10.0
77	9.5

Izračunajte vjerojatnost da osoba dobi od 75 godina doživi 77 godina.

Zadatak 17. Nadjite izraze za ${}_kq_n$ preko funkcije l_x. Npr. $q_k = d_k/l_k \;\; k \geq 0$.

Zadatak 18. Označite s T duljinu života slučajno odabrane osobe u godinama. Napišite T kao $K+S$, gdje je $K = \lfloor T \rfloor$, tj. najveće cijelo od T. Pretpostavite da su slučajne varijable K i S nezavisne, te da je S uniformno distribuirana na intervalu $[0,1)$. Razdioba slučajne varijable K zadana je u priloženoj životnoj tablici LAT A1967-70. Izračunajte ${}_3q_{77,5}$.

Zadatak 19. Prepostavite da imate sljedeći izvadak iz tablica smrtnosti

x	l_x
65	7654
66	7348
67	7077

Nađite vjerojatnost da će osoba u dobi 65, preživjeti jos barem 21 mjesec (1.75 godine), koristeći
(a) pretpostavku o linearnosti funkcije ${}_uq_x$, tj. ${}_uq_x = u \cdot q_x$, (b) pretpostavku da je intenzite smrtnosti konstantan i iznosi $\mu_{(x+1/2)} = -\ln p_x$ tokom godine $[x, x+1)$, (c) Balduccijevu pretpostavku ${}_{1-u}q_{x+u} = (1-u)q_x$.

Zadatak 20. Prepostavite da imate sljedeći izvadak iz tablica smrtnosti s odabirom (select) s periodom odabira 2 godine

x	$1000q_{[x]}$	$1000q_{[x]+1}$	$1000q_{x+2}$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
30	0.222	0.330	0.422	9907	9905	9901	32
31	0.234	0.352	0.459	9903	9901	9897	33
32	0.250	0.377	0.500	9899	9896	9893	34
33	0.269	0.407	0.545	9894	9892	9888	35
34	0.291	0.441	0.596	9889	887	9882	36

Odredite ${}_2p_{[30]}$, ${}_5p_{[30]}$, ${}_3q_{[31]+1}$

Zadatak 21. Izrazite formulom i izračunajte koristeći LAT A1967-70 vjerojatnost da će osoba koja doživi 30 godina
(a) doživjeti dob od 40 godina,
(b) umrijeti prije 40. godine,
(c) umrijeti nakon 60., ali prije 80. godine.

Zadatak 22. Za osobu dobi od 55 godina pretpostavljamo da je izložena konstantnom intenzitetu smrtnosti $\mu = 0.02$ do dobi od 62 godine, nakon čega se pretpostavlja da je izložena intenzitetu smrtnosti prema LAT A 1967-70. Izračunajte:
(a) vjerojatnost smrti prije navršene 60. godine,
(b) vjerojatnost doživljenja dobi od 70 godina,
(c) vjerojatnost smrti izmedu 60. i 65. godine.

Poglavlje 3

Osnove životnog osiguranja

3.1 Vrednovanje tokova novca neutralno na rizik

Za deterministički tok novca $\mathcal{C}$ današnja jednokratna neto premija ("fair cijena") bila je jednaka njegovoj sadašnjoj vrijednosti

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_j c_j v(t_j)\,,$$

što smo za konstantnu e.k.s. i mogli naći i kao neto sadašnju vrijednost

$$\mathrm{NPV}_{\mathcal{C}}(i) = \sum_j c_j v^{t_j}\,.$$

Sa Z označimo sadašnju vrijednost slučajnog toka novca, tj. slučajnu varijablu

$$Z = V_0(\mathcal{C}) = \sum_j C_j v^{T_j}\,,$$

prepostavljajući apsolutnu konvergenciju reda na d.s. Ako postoji $EZ < \infty$, tada izraz EZ možemo uzeti za za "fair cijenu" slučajnog toka novca, tu vrijednost zovemo i *jednokratna neto premija [net single premium]*. Tu je nužan oprez, naime ovakvo određivanje cijena

- gotovo sigurno vodi osig. kompaniju u propast (zbog asimptotskog ponašanja parcijalnih suma slučajnih varijabli),
- podrazumijeva neutralan odnos prema riziku (tj. funkcija korisnosti je uvijek linearna), što je tipično nerealno prema nekim empirijskim istraživanjima.

- katkad dopušta zaradu bez rizika (*arbitrage*), kao npr. kod cijena izvedenica tj. derivativa.

Primjetite da $E(Z)$ ne opisuje rizik koji prihvaća osiguravatelj, za to bi trebalo znati nešto više o razdiobi slučajne varijable Z koja će u nastavku modelirati sadašnju vrijednost isplata (odn. gubitaka) po polici osiguranja. Tradicionalno se rizik mjeri preko varijance, no i tu je nužan oprez. Korisniju informaciju o riziku koji prihvaća osiguravatelj bismo dobili promatrajući zakon razdiobe slučajne varijable $(Z-u)_+$ gdje je $u > 0$ unaprijed odredjen prag (npr. cijena police) ili barem brojeve

$$P(Z > u),\ E(Z-u)_+ \text{ ili } E(Z-u|Z>u)\,.$$

Ove se veličine katkad, posebice u financijskoj literaturi, smatraju i *mjerama rizika*.

Alternativno se koriste i gornji q-kvantili razdiobe slučajne varijable Z tj. vrijednosti u_q za koje je $P(Z > u_q) = q$, za neki unaprijed odredjen nivo q, npr. u praksi se često koristi $q = 0.05$. Ovakva mjera rizika je u literaturi poznata i pod imenom *value at risk – VaR*.

Ugovori o životnom osiguranju su uvijek vezani uz neki slučajan dogadjaj, i slučajan trenutak T' u kojem se on događa. Tipično ovi ugovori predstavljaju obećanja da će se isplatiti izvjesna suma, npr. jedan, u trenutku T' ili da će se isplaćivati renta sve do trenutka T'. Posebno važnu ulogu imaju slučajne varijable $T,\ T_x = (T-x|T>x),\ K = K_x = \lfloor T_x \rfloor$ odn. $S = S_x = \{T_x\}$, gdje je $x \geq 0$ dob osobe koja pristupa osiguranju.

U nastavku pretpostavljamo neprekidnost slučajne varijable T i fiksnu e.k.s.

Jednokratna neto premija

Primjer 3.1.1 Pretpostavimo da dobijemo c ako se kuglica zaustavi na "impair" u igri ruleta. Naš dobitak je cX gdje je X slučajna varijabla s razdiobom $B(1, 18/37)$, a "fair cijena" za ovakvu igru bila bi

$$E(cX) = c\frac{18}{37}$$

ako se igra odvija upravo sada ili

$$E(cvX) = cv\frac{18}{37}$$

ako se dobitak isplaćuje tek za godinu dana.

Kao i u igri ruleta, ugovori o osiguranju često obavezuju osiguravatelja na jednokratnu isplatu u slučaju smrti, nezgode, doživljenja ili sl. Ako označimo tu svotu sa c i ako se ona isplaćuje u sl. vremenskom trenutku τ njena sadašnja vrijednost je očito:

$$cv^{\tau}\,.$$

Pretpostavimo da se naknade osiguravatelja osiguraniku po nekoj polici osiguranja mogu zapisati kao tok novca $\mathcal{C} = ((T_j, C_j))$, te da su sve vrijednosti T_j, C_j nenegativne slučajne varijable, tada je

$$Z = \sum_j C_j v^{T_j}\,,$$

uvijek dobro definirana poopćena slučajna varijabla takva da $Z : \Omega \to [0, \infty]$. U slučaju da je $EZ < \infty$ kaže se da su naknade (odn. polica ili *risk*) $\mathcal{C}$ prikladni za osiguranje odn. *insurable*. U tom slučaju očekivanje

$$\Pi(\mathcal{C}) = EV_0(\mathcal{C}) = EZ = \sum_j E(v^{T_j} C_j)$$

zovemo *jednokratnom neto premijom (net single premium)* za $\mathcal{C}$ (uočite da zadnja jednakost slijedi iz Fubinijevog teorema).

Bilo koji drugi (ne nužno deterministički) tok novca $\mathcal{P}$ također nazivamo neto premijom za $\mathcal{C}$ ako vrijedi

$$EV_0(\mathcal{P}) = \Pi(\mathcal{C})\,.$$

Prije nego nastavimo, naglasimo još jednom da postoje i drugi principi određivanja premije, koji uzimaju u obzir npr. i rizik kojem se izlaže osiguravatelj.

3.2 Jednostavni tipovi osiguranja

Primjer 3.2.1 (Jednostavno osiguranje života) Prvi ugovor koji želimo definirati je *osiguranje života (whole life insurance)*. On obavezuje osiguravatelja na isplatu (fiksnog) iznosa 1 na kraju godine smrti. Ovaj ugovor možemo kao zapisati kao tok novca $\mathcal{C} = ((K_x + 1, 1))$. Dakle jedino je vrijeme isplate slučajno, pa je sadašnja vrijednost isplate:

$$Z = v^{K+1}.$$

Dakle za $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$P(Z = v^{k+1}) = P(k \le T_x < k+1) = P(K_x = k) = {}_k p_x \, q_{x+k}\,, \tag{3.1}$$

zbog činjenice da je $T_{x+k} \stackrel{d}{=} (T_x - k | T_x \geq k)$. Očekivana sadašnja vrijednost (jednokratna neto premija) za ovakav ugovor je

$$
\begin{aligned}
A_x = E(Z) = E(v^{K+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(k \leq T_x < k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K_x = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_x \, q_{x+k} \, .
\end{aligned}
$$

uz koristenje činjenice da T_x ima neprekidnu razdiobu, te je stoga $P(T_x = y) = 0$ za svaki $x \geq 0, y \in \mathbb{R}$. Želimo li A_x izraziti u terminima veličina iz tablice smrtnosti uočimo da je (uz dogovor da je $0/0 = 0$, tj. da zbrajanje prestaje na kraju tablice)

$$
A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_x}{l_{x+k}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x} =: \frac{M_x}{D_x} \, . \tag{3.2}
$$

Kako su vrijednosti M_x, D_x često unaprijed tabelirane za razne fiksne e.k.s., jednokratnu neto premiju u ovom slučaju lako nalazimo iz tablice.

Varijancu od Z nađemo kao

$$
\mathrm{var}(Z) = EZ^2 - (EZ)^2 = EZ^2 - A_x^2 \, ,
$$

gdje je

$$
E(Z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} P(K = k) = E(v^{2(K+1)}) \, ,
$$

dakle izraz je isti kao i za A_x, ali uz dvostruki intenzitet kamate.

Primjer 3.2.2 (Osiguranje života na rok od n godina) Ako se osiguravatelj obavezuje na isplatu iznosa 1 kao i gore, ali samo kada se smrt dogodi u prvih n godina po potpisivanju ugovora govorimo o *osiguranju života na rok od n godina (term insurance)*. Precizno $\mathcal{C} = ((K_x + 1, 1_{\{K_x < n\}}))$. Sadašnja vrijednost isplate je

$$
Z = v^{K_x + 1} \cdot I_{K_x < n} \, ,
$$

a jednokratna neto premija iznosi

$$
A^1_{x:\overline{n}|} = E(Z)
$$

i očito je

$$
A^1_{x:\overline{n}|} = E(v^{K_x+1} \cdot I_{K_x < n}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K_x = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \, {}_k p_x \, q_{x+k} \, .
$$

A na sličan način kao gore vidimo i

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

za M_x, D_x zadane u (3.2). Izračunajte varijancu slučajne varijable Z.

Primjer 3.2.3 (Osiguranje doživljenja) Sljedeći ugovor koji promatramo takodjer ima rok od n godina i isplaćuje iznos 1, ali samo u slučaju doživljenja. Preciznije $\mathcal{C} = ((n, 1_{\{K_x \geq n\}}))$. Zovemo ga *osiguranje doživljenja (pure endowment).* Sadašnja vrijednost isplate je

$$Z = v^n \cdot I_{K_x \geq n} .$$

Jednokratna neto premija stoga iznosi

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E(Z) = E(v^n \cdot I_{K_x \geq n}) = v^n P(K \geq n) = v^n P(T_x \geq n).$$

a to je dakako jednako

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Kako je $I_{K_x \geq n}$ Bernoullijeva slučajna varijabla, varijancu od Z lako nađemo kao

$$\mathrm{var}(Z) = v^{2n} P(K_x \geq n) P(K_x < n).$$

Primjer 3.2.4 (Mješovito osiguranje) Sljedeći ugovor je samo "suma" prethodna dva, i naziva se *mješovito osiguranje.* On osigurava iznos 1 na kraju godine smrti ukoliko se ona dogodi u prvih n godina, u suprotnom se isti iznos isplaćuje na kraju n-te godine, tj. $\mathcal{C} = ((K_x + 1, 1_{\{K_x < n\}}), (n, 1_{\{K_x \geq n\}})) = (((K_x + 1) \wedge n, 1))$, pa je

$$Z = v^{K+1} \cdot I_{K_x < n} + v^n \cdot I_{K_x \geq n} =: Z_1 + Z_2 .$$

Stoga je jednokratna neto premija za ovakav ugovor

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

odn.

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

u terminima veličina iz tablice, vidi (3.2).

Promotrimo varijancu slučajne varijable Z, ona iznosi

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2) + 2\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) ,$$

no

$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < 0.$$

Dakle vrijedi

$$\mathrm{var}(Z) < \mathrm{var}(Z_1) + \mathrm{var}(Z_2) .$$

Dakle rizik prodaje jedne kombinirane police je manji (mjeren varijancom) u odnosu na dvije odvojene i nezavisne police.

Primjer 3.2.5 (Odgođeno osiguranje života) *Odgođeno osiguranje života za m godina ili m-year differed whole life insurance* zapisujemo kao $\mathcal{C} = ((K_x+1, 1_{\{K_x \geq m\}}))$. Ono dakle ima sad. vrijednost:

$$Z = v^{K_x+1} \cdot I_{K_x \geq m} \,.$$

Jednokratna neto premija očito mora iznositi

$$_{m|}A_x = E(Z) = v^m P(T_x > m) A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}|}$$

jer je $v^{K+1} \cdot I_{K \geq m} = v^{K+1} - v^{K+1} I_{K<m}$.

Primjer 3.2.6 (Osiguranje plativo u trenutku smrti) Ako se iznos 1 plaća u trenutku pada, njegova sadašnja vrijednost je

$$Z = v^{T_x} \,.$$

Jednokratna neto premija se označava sa

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty v^t f_{T_x}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t \bar{F}(t|x)\mu_{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t \,{}_t p_x \mu_{x+t}\mathrm{d}t \,.$$

Uočite, ovu vrijednost tipično nije moguće izračunati na osnovu životnih tablica bez dodatnih prepostavki, naime u njima je zadan samo zakon razdiobe sl. vrijable K.

Ako npr. rastavimo slučajnu varijablu T_x na njen cijeli i razlomljeni dio

$$T_x = K_x + S_x \,,$$

i pretpostavimo da su K_x i S_x nezavisne slučajne varijable, a S_x ima uniformnu razdiobu na intervalu $[0,1)$, uočimo

$$E(v^{S_x-1}) = E((1+i)^{1-S_x}) = \int_0^1 (1+i)^u \mathrm{d}u = \int_0^1 e^{\delta u}\mathrm{d}u = (e^\delta - 1)/r = i/r,$$

pa je dakle zbog nezavisnosti

$$\bar{A}_x = E(v^{K_x+1} v^{S_x-1}) = \frac{i}{r} A_x \,.$$

Izvedite sličnu formulu uz iste pretpostavke i za osiguranje plativo u trenutku smrti ali s trajanjem od n godina tj. pokažite

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + (\frac{i}{r} - 1) A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Općeniti tipovi životnog osiguranja

Prepostavimo da se osigurana svota mijenja iz godine u godinu, neka je npr. $c_j \geq 0$ osigurana svota u j-toj godini nakon zaključenja police. Sad. vrijednost police je dakle

$$Z = c_{k+1} v^{K+1} .$$

Sve momente slučajne varijable Z lako nađemo kao

$$E(Z^h) = \sum_{k=0}^{n} c_{k+1}^h v^{h(k+1)} \, {}_k p_x q_{x+k} .$$

Uz dodatnu pretpostavku $\sum_k c_{k+1} v^{k+1} < \infty$, vrijedi

$$Z = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K=k} = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K \geq k} - \sum_{k \geq 0} c_{k+1} v^{k+1} \mathbf{1}_{K \geq k+1} .$$

pa očekivanje možemo naći i alternativno kao

$$E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1) \, {}_{1|}A_x + (c_3 - c_3) \, {}_{2|}A_x + \ldots$$

Ukoliko se osiguranje plaća odmah nakon pada, osigurana suma se općenito zadaje proizvoljnom (izmjerivom) funkcijom $c : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Tada ugovor zapisujemo kao $\mathcal{C} = ((T_x, c(T_x)))$, a sadašnja vrijednost mu je

$$Z = c(T_x) v^{T_x} ,$$

dakle, jednokratna neto premija je

$$E(Z) = \int_0^\infty c(t) v^t f(t|x) \mathrm{d}t = \int_0^\infty c(t) v^t \bar{F}(t|x) \mu_{x+t} \mathrm{d}t .$$

Ako rastavimo T_x na $K + S$ kao prije

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(Z|K = k) P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(c(K + S)(1 + i)^{1-S}|K = k) v^{k+1} P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1} P(K = k)
\end{aligned}$$

uz $c_{k+1} = E(c(K + S)(1 + i)^{1-S}|K = k)$.

3.3 Životne rente

Renta je tok novca kojeg čini niz periodičnih uplata za vrijeme trajanja života osobe. Iznosi su tipično unaprijed odredjeni no broj isplata je slučajan, pa je sadašnja vrijednost rente slučajna varijabla. Njeno očekivanje i ovdje grubo govoreći smatramo "fair cijenom" i zovemo jednokratnom neto premijom. Naglasimo odmah, životnu rentu možemo gledati i s obrnutim predznakom. Tada ona opisuje (periodične) isplate.

Jednostavne životne rente

I ovdje razlikujemo prenumerando i postnumerando rente, te koristimo oznake $T_x = K + S$.

Primjer 3.3.1 (Prenumerando životna renta) *Prenumerando životna renta ili whole life annuity-due* opisana je tokom novca $\mathcal{C} = ((i, \mathbf{1}_{\{K_x \geq i\}}) : i \in \mathbb{N})$, koji ima sadašnju vrijednost

$$Y = 1 + v + v^2 + \cdots v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}},$$

stoga je

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = P(K_x = k).$$

Jednokratna neto premija je dakle

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} P(K = k).$$

Iz $Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{K \geq k}$ dalje slijedi

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(K_x \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}}{D_x} =: \frac{N_x}{D_x},$$

što je korisna formula ako vrijednosti N_x, D_x imamo unaprijed tabelirane za danu fiksnu e.k.s. (usporedite sa (3.2)). Iz $Y = (1 - v^{K+1})/(1 - v)$ slično slijedi

$$\ddot{a}_x = E(Y) = E\left(\frac{1 - Z}{1 - v}\right) = \frac{1 - A_x}{d}$$

gdje je Z sadašnja vrijednost za osiguranje života. Nađite var Y.

Ako "uklonimo točkice" u gornjem primjeru dobijemo

Primjer 3.3.2 (Postnumerando životna renta) *Postnumerando životnu rentu ili whole life immediate annuity* koja ima sadašnju vrijednost

$$Y = v + v^2 + \cdots + v^K = a_{\overline{K|}}$$

pa slijedi

$$a_x = E(Y) = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1 - A_x}{d} - 1.$$

Primjer 3.3.3 (Prenumerando životna renta s ograničenim trajanjem) *Prenumerando životna renta s ograničenim trajanjem ili n-year temporary whole life annuity-due* ima sadašnju vrijednost

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} I_{K<n} + \ddot{a}_{\overline{n}|} I_{K \geq n} = \ddot{a}_{\overline{n \wedge (K+1)}|} = 1 + v + \cdots + v^{n \wedge (K+1)},$$

gdje je $i \wedge j = \min\{i, j\}$. Jednokratna neto premija je

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} P(K = k) + \ddot{a}_{\overline{n}|} P(K \geq n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(K \geq k) = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \end{aligned}$$

Primjer 3.3.4 (Prenumerando životna renta s odgodom) *Prenumerando životna renta s odgodom od m godina ili m-year deffered whole life annuity-due* ima sadašnju vrijednost

$$Y = (v^m + v^{m+1} + \cdots v^K) I_{K \geq m},$$

s očekivanjem

$$E(Y) = v^m P(T_x > m) \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

Životne rente plative više puta godišnje

U ovom odjeljku pretpostavljamo da se uplate u iznosu $1/m$, $m \in \mathbb{N}$ plaćaju se m puta godišnje u jednakim vremenskim razmacima. Ako je renta prenumerando npr., uplate se vrše u trenucima

$$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots$$

sve dok je korisnik rente živ. Uz pretpostavku a) s kraja prošlog poglavlja očekivana sadašnja vrijednost ovakve rente je

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}},$$

pri tom je

$$A_x^{(m)} = E(v^{K+S^{(m)}}) = A_x \frac{i}{i^{(m)}},$$

gdje su $S^{(m)} = \frac{1}{m}\lfloor mS \rfloor$ i $i^{(m)} = m(1-(1+i)^{-1/m})$. Uočite, da uz prepostavku da su u $T_x = K_x + S_x$

$$K_x \text{ i } S_x \text{ nezavisne, te } S_x \sim U(0,1), \tag{3.3}$$

za $S^{(m)}$ vrijedi

$$S^{(m)} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1/m & \ldots & (m-1)/m \\ 1/m & 1/m & \ldots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Primjer 3.3.5 Promotrimo postnumerando ekvivalentnu rentu: neka iznosi $1/m$ dospijevaju u trenucima

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$$

za života korisnika. Sad. vrijednost ovakve rente je

$$Y = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{m} v^{t/m} I_{T_x > t/m}.$$

Zato je jednokratna neto premija

$$a_x^{(m)} = E(Y) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t/m} P(T_x > t/m).$$

U aktuarskim tablicama se pojavljuje i izraz $D_t = v^t l_t$, pa iz $P(T_x > u) = P(K_x \geq u) = l_{x+u}/l_x$ za $x, u \in \mathbb{N}$, slijedi

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x}.$$

Analogno se vidi da je očekivana sadašnja vrijednost odgovarajuće prenumerando životne rente

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t/m} P(T_x > t/m) = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t/m}}{D_x}.$$

Kako vrijednosti D_x općenito nisu tabelirane za necjelobrojne vrijednosti x, u praksi i ovdje moramo koristiti nekakvu aproksimaciju

3.4 Periodične neto premije

Sve premije koje smo računali do sada bile su jednokratne neto premije. Iznosile su $E(Z)$ gdje je Z bila sadašnja vrijednost svih isplata osiguraniku (uz pretpostavku da je ovo očekivanje konačno, Z je tzv. engl. *insurable risk*). Ovakve premije se plaćaju odjednom i unaprijed, no premija se ne plaća uvijek na taj način. Premija se tipično plaća u pravilnim vremenskim razmacima i (u pravilu) uvijek unaprijed (prenumerando). Najčešći načini plaćanja premije su: jednokratna premija, periodične premije u konstantnom iznosu, te periodične premije u varijabilnom iznosu.

Označimo s L gubitak osiguravatelja u odnosu na policu osiguranja, preciznije

$$\begin{aligned} L &= \text{(sad. vr. svih isplata)} - \text{(sad. vr. svih uplaćenih premija).} \\ &= EV_0(\mathcal{N}) - EV_0(\mathcal{P}) = 0\,, \end{aligned}$$

gdje su $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$ tokovi novca koji opisuju naknade osiguraniku odn. uplaćene premije. Dakako, negativni gubitak je dobitak za osiguravatelja. Premija se naziva *neto premija* ako je

$$E(L) = 0 \tag{3.4}$$

Ovakva je bila premija u prvom od gore navedenih načina plaćanja, a iz (3.4) moguće je odrediti premiju i u drugom načinu plaćanja.

Primjer

Godišnje neto premije za jednostavne tipove osiguranja

i) osiguranje života: osigurani iznos je 1 plativ na kraju godine smrti, premija se plaća godišnje unaprijed, odredimo njen iznos P_x. Očito

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

Iz (3.4) slijedi

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\,.$$

No gubitak možemo alternativno zapisati i kao

$$L = v^{K+1} - \frac{P_x}{1-v}(1 - v^{K+1})\,.$$

Odavde je

$$\mathrm{var}L = \left(1 + \frac{P_x}{d}\right)^2 \mathrm{var}(v^{K+1})\,.$$

Rizik za osiguravatelja dakle, iskazan varijancom, je veći ako se premije plaćaju godišnje nego kada se plaćaju jednokratno.

Lako se vidi i

$$\frac{1}{\ddot{a}_x} = d + P_x$$

ii) životno osiguranje s ograničenim trajanjem daje gubitak

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{K+1} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_n & \text{za } K \geq n\,. \end{cases}$$

Neto godišnja premija dobije se iz (3.4) kao

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

iii) osiguranje doživljenja; ovdje godišnje neto premiju oznčavamo s $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, a gubitak iznosi

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{za } K = 0, 1, \ldots, n-1 \\ v^n - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_n & \text{za } K \geq n\,. \end{cases}$$

Postavimo li $EL = 0$, slijedi

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

iv) mješovito osiguranje; premija se lako dobije kao

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Pokažite da vrijede jednakosti

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = d + P_{x:\overline{n}|} \quad \text{i} \quad P_{x:\overline{n}|} = dA_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}\,.$$

v) osiguranje životne rente s odgodom od n godina

Premije plative m puta godišnje

Oznake su $P_x^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{1\ \ (m)}, P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1(m)}$, a formule se dobiju zamijenjujući $\ddot{a}_x, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \ldots$ u nazivniku sa $\ddot{a}_x^{(m)}, \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}, \ldots$

Primjer Neto premija za mješovito osiguranje je

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Napomena I za sve druge police osiguranja i načine otplate neto premije odredjujemo iz (3.4). Da bismo realnije odredili premiju, e.k.s. takodjer možemo modelirati stohastičkim procesom. Takvi modeli ipak obično ne vrijede na dugi rok, a značajno kompliciraju račun, npr. gubici nezavisnih polica više nisu nezavisne slučajne varijable. U praksi osiguravatelji koriste "scenarije" i simulacije.

Neprekidne rente i premije

Za životno osiguranje koje se isplaćuje u trenutku smrti sadašnja vrijednost i njeno očekivanje bili su

$$Z = v^{T_x} \quad \text{i} \quad EZ = \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty v^t \bar{F}(t|x)\mu_{x+t}\mathrm{d}t\,.$$

Prepostavimo da se životna renta isplaćuje kontinuirano po stopi $r(t)$ u trenutku t. Njena sadašnja vrijednost je

$$Y = \int_0^{T_x} r(t)v^t\mathrm{d}t\,,$$

pa jednokratna neto premija iznosi

$$EY = \int_0^\infty \int_0^t r(s)v^s\mathrm{d}s f(t|x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty r(s)v^s\,{}_sp_x\mathrm{d}s\,.$$

U posebnom slučaju kada je $r \equiv 1$, definiramo

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\bar{F}(t|x)\mathrm{d}t$$

Prisjetimo se za funkciju g kažemo da je konveksna na svojoj domeni I, ako za sve $a \in I$ postoji $\lambda(a)$ tako da za sve $x \in I$

$$g(x) \geq g(a) + \lambda(a)(x-a).$$

Ako je g još i diferencijabilna u a tada će $\lambda(a) = g'(a)$ zadovoljavati gornji uvjet. Jensenova nejednakost kaže da za slučajnu varijablu X s konačnim očekivanjem EX i konveksnu funkciju g vrijedi

$$Eg(X) \geq g(EX).$$

Zaista, u gornju relaciju postavimo $a = EX$ i dobijemo

$$g(X) \geq g(EX) + \lambda(a)(X - EX).$$

Tvrdnja sada slijedi iz monotonosti očekivanja.

Ako je e.k.s. $i \geq 0$ vrijedi

$$\bar{a}_x \leq \bar{a}_{\overline{\bar{e}_x}|} \quad \text{i} \quad \bar{A}_x \geq v^{\bar{e}_x} .$$

Iskoristite Jensenovu nejednakost za funkcije

$$g_1(t) = v^t$$

i

$$g_2(t) = -\int_0^t v^s \mathrm{d}s.$$

3.5 Vrijednost police i pričuva

Prepostavimo i nadalje fiksnu efektivnu kamatnu stopu. Uz policu osiguranja možemo vezati tokove novca $\mathcal{N}$ odn. $\mathcal{P}$ koji označavaju isplate naknada osiguraniku, odn. isplate premija osiguravatelju.

U trenutku t, vrijednost preostalog gubitka za osiguravatelja definiramo kao

$$\begin{aligned} {}_tL &= (\text{vri. u času } t \text{ svih preostalih naknada u } (t,\infty)) - \\ &\quad\ (\text{vri. u času } t \text{ svih preostalih premija u } [t,\infty)) \\ &= V_t(\mathcal{N}_{(t,\infty)}) - V_t(\mathcal{P}_{[t,\infty)}), \end{aligned}$$

uz oznake

$$\mathcal{N}_{(a,b)} = \text{ tok novca koje opisuje naknade isplaćene u intervalu } (a,b),$$

$$\mathcal{P}_{[a,b)} = \text{ tok novca koje opisuje premije uplaćene u intervalu } [a,b)\,.$$

Premijsku rezervu definiramo kao

$$ {}_tV = E({}_tL | T_x > t) = E\left(V_t(\mathcal{N}_{(t,\infty)}) | T_x > t\right) - E\left(V_t(\mathcal{P}_{[t,\infty)}) | T_x > t\right) . $$

Ona nam daje preostalu vrijednost police u trenutku t tj. očekivanu vrijednosti svih preostalih gubitaka uz uvjet da je osiguranik živ u trenutku t. Uočimo da se rezerva (odn. vrijednost police) s vremenom mijenja. Ako se polica financira isključivo iz neto premija, tj. vrijedi $E(L) = E({}_0L) = 0$, vrijednost ${}_tV$ zovemo *neto premijska rezerva.*

Police obično imaju svojstvo da je ${}_tV > 0$ nakon nekog vremena t_0, što znači da vrijednost police (tj. očekivani gubitak za osiguravatelja) na početku raste. To je posljedica činjenice da se premije plaćaju i prije nego se isplaćuju naknade, a to dakako daje motivaciju osiguranicima da ne raskidaju policu. Dakle premije skupljene u prošlosti osiguravatelj mora čuvati (odn. rezervirati i reinvestirati) kako bi osigurao isplate koje tek dolaze na naplatu. Osiguravatelj koji to ne bi činio lako bi se našao u situaciji da ne može isplatiti ugovoreni iznos. Pojam pričuve je lakše razumijeti na velikom broju osiguranika i uz pomoć zakona velikih brojeva.

Prospektivna i retrospektivna formula za neto premijsku pričuvu

Označimo kao i prije vrijednost toka novca $\mathcal{C}$ u trenutku t sa

$$ V_t(\mathcal{C}) . $$

Tada uz fiksnu e.k.s. imamo

$$ EV_t(\mathcal{C}) = (1+i)^t EV_0(\mathcal{C}) = \frac{1}{v^t} EV_0(\mathcal{C}) . $$

Definirajmo sljedeće tokove novca

$$ \begin{aligned} \mathcal{N}_{[a,b)} &= \text{ sve naknade isplaćene u intervalu } [a,b), \\ \mathcal{P}_{[a,b)} &= \text{ sve premije uplaćene u intervalu } [a,b) . \end{aligned} $$

Iz $E(L) = 0$ slijedi

$$ EV_0(\mathcal{N}_{[0,\infty)}) - EV_0(\mathcal{P}_{[0,\infty)}) = 0 $$

pa vrijedi i

$$ EV_0(\mathcal{N}_{(k,\infty)}) - EV_0(\mathcal{P}_{[k,\infty)}) = EV_0(\mathcal{P}_{[0,k)}) - EV_0(\mathcal{N}_{[0,k]}). $$

Za neto premijsku pričuvu u $t \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$ \begin{aligned} {}_tV &= E\left(V_t(\mathcal{N}_{(t,\infty)}) | T_x > t\right) - E\left(V_t(\mathcal{P}_{[t,\infty)}) | T_x > t\right) \qquad (3.5) \\ &= \frac{1}{v^t}\left[E\left(V_0(\mathcal{N}_{(t,\infty)}) | T_x > t\right) - E\left(V_0(\mathcal{P}_{[t,\infty)}) | T_x > t\right)\right] \end{aligned} $$

Formula (3.5) se zove *prospektivna* formula za neto premijsku pričuvu.

Kako za slučajnu varijablu X i slučajni dogadjaj B vrijedi $E(XI_B) = E(X|B)P(B)$, posebno ako je $X = 0$ na B^c, vrijedi i $E(X) = E(XI_B) = E(X|B)P(B)$. Stoga

$$
{}_tV \;=\; \frac{1}{v^t P(T_x > t)} \left[E\left(V_0(\mathcal{N}_{(t,\infty)})\right) - E\left(V_0(\mathcal{P}_{[t,\infty)})\right) \right]
$$

Do sada smo koristili samo uobičajenu aktuarsku pretpostavku da su uz uvjet $T_x \leq t$, tokovi novca $N_{(t,\infty)}$ i $\mathcal{P}_{[t,\infty)}$ prazni. Sada imamo

$$
{}_tV = \left[EV_0(\mathcal{P}_{[0,t)}) - EV_0(\mathcal{N}_{[0,t]}) \right] \frac{1}{v^t \bar{F}(t|x)} \,. \tag{3.6}
$$

Formula(3.6) se zove *retrospektivna* formula za neto premijsku pričuvu. Probajte dati intuitivnu interpretaciju jednakosti medju njima.
Primjer (miješovito osiguranje)

Dobitak i gubitak od smrtnosti

Kao što smo vidjeli pričuva se mijenja tokom vremena. I ovdje promatramo neto premijsku rezervu, a želimo usporediti vrijednost ${}_tV$ i ${}_{t+1}V$.

Po definiciji

$$
\begin{aligned}
{}_tV \;&=\; E\left(V_t(\mathcal{N}_{(t,\infty)})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\mathcal{P}_{[t,\infty)})|T_x > t\right) \\
&=\; E\left(V_t(\mathcal{N}_{(t+1,\infty)}) + V_t(\mathcal{N}_{(t,t+1]})|T_x > t\right) \\
&\quad\; -E\left(V_t(\mathcal{P}_{[t+1,\infty)}) + V_t(\mathcal{P}_{[t,t+1)})|T_x > t\right) \\
&=\; vp_{x+t}E\left(V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t+1,\infty)})|T_x > t+1\right) \\
&\quad\; -vp_{x+t}E\left(V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t+1,\infty)})|T_x > t+1\right) \\
&\quad\; +vE\left(V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t,t+1]})|T_x > t\right) - E\left(V_t(\mathcal{P}_{[t,t+1)})|T_x > t\right) .
\end{aligned}
$$

Ako se premija plaća godišnje prenumerando u iznosu P za vrijeme života osobe, dobili smo

$$
{}_tV = vp_{x+t}\,{}_{t+1}V \;+ vE\left(V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t,t+1]})|T_x > t\right) - P \tag{3.7}
$$

Dakle, (3.7) nam daje rekurzivnu formulu za premijsku rezervu.

Primjer (doživotno osiguranje života)
Prepostavimo da se premija plaća u neto iznosu, tj $P = P_x$. Uočimo $V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t,t+1]}) = 1$ ako $T_x \in [t, t+1)$, a 0 inače. Tako da

$$E\left(V_{t+1}(\mathcal{N}_{(t,t+1]})|T_x > t\right) = E\left(\mathbf{1}_{(t,t+1]}(T_x)|T_x > t\right) = q_{x+t}.$$

Iz (3.7) slijedi dakle

$$({}_tV + P_x)(1+i) = p_{x+t}\ {}_{t+1}V + q_{x+t}.$$

Probajte dati intuitivnu interpretaciju gornjoj jednakosti. Nju možemo napisati i kao

$$({}_tV + P_x)(1+i) = {}_{t+1}V + (1 - {}_{t+1}V)q_{x+t}.$$

Očekivana svota pod rizikom [expected death strain] u godini $(t, t+1]$ je

$$EDS = (1 - {}_{t+1}V)q_{x+t}.$$

To je očekivanje sl. varijable ADS, koja ima zakon radiobe kao $\mathbf{1}_{(t,t+1]}(T_x)(1- {}_{t+1}V)$, ali uz uvjet $T_x > t$, tj.

$$ADS = \mathbf{1}_{(0,1]}(T_{x+t})(1 - {}_{t+1}V).$$

Slučajna varijabla ADS je *stvarna svota pod rizikom* u godini $(t, t+1]$ [actual death strain]. Razlika

$$EDS - ADS$$

je slučajna varijabla i zove se *dobitak od smrtnosti* u godini $(t, t+1]$.

Uzmite n jednakih i nezavisnih polica osiguranja života i pomoću njih dajte interpretaciju gore uvedenim pojmovima. Isti pojmovi se definiraju i za druge tipove životog osiguranja.

Zillmerizirana rezerva

Kako osiguravatelji moraju u premije uračunati i vlastite troškove (početne, periodične i administrativne) oni tipično zaračunavaju bruto premije u kojima su ti troškovi uključeni. Ako uključimo ove troškove i u izračun pričuve govorimo o Zillmeriziranoj rezervi.

3.6 Osiguranje više života

Stanje združenih života

Za m osoba koje su trenutno starosti $x_1, \dots, x_m$ uvedimo

$$T_k = T_{x_k}, \qquad k = 1, \dots, m.$$

Združeno stanje ovih osoba označavamo s

$$u = x_1 : x_2 : \cdots : x_m \,.$$

To stanje doživljava pad ("smrt") u trenutku smrti prve od njih

$$T(u) = \min(T_1, \dots, T_m).$$

Ako pretpostavimo da su slučajne varijable $T_1, \dots, T_m$ nezavisne funkcija doživljenja za $T(u)$ je

$${}_tp_{x_1:x_2:\cdots:x_m} := P(T(u) > t) = \prod_{k=1}^{m} P(T_{x_k} > t),$$

a intenzitet smrtnosti za $T(u)$ je

$$\mu_{u+t} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t}$$

Stanje zadnjeg preživjelog

Ovo stanje označavamo sa

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \cdots : x_m}$$

i ono se smatra nepromjenjenim sve dok je i posljednja osoba iz ove skupine živa. Dakle stanje pada u trenutku:

$$T'(u) = \max(T_1, \dots, T_k) \,.$$

Uz oznaku $B_k = B_k(t) = \{$ osoba k je živa u trenutku t $\}$, imamo iz Sylvesterove formule

$$\begin{aligned}
{}_tp_{\overline{x_1:x_2:\cdots:x_m}} &:= P(T'(u) > t) = \\
&= P(B_1 \cup \cdots B_k) \\
&= \sum_{l} P(B_l) - \sum_{l<j} P(B_l \cap B_j) + \sum_{l<j<k} P(B_l \cap B_j \cap B_k) - \cdots \\
&\quad -(-1)^m P(B_1 \cap \cdots B_m) \\
&=: s_1^t - s_2^t + s_3^t - \cdots + s_m^t
\end{aligned}$$

Zadaci

Zadatak 1. Osoba stara 30 godina osigurava život na iznos od 50 000 plativ u trenutku smrti. Ako je funkcija doživljenja

$$\bar{F}(x) = 1 - \frac{x}{100}, \quad 0 < x < 100,$$

a intenzitet kamate $r = 0.01$, nađite vrijednost premije koju osiguranik mora platiti ako je plaća sada i odjednom.

Zadatak 2. Osoba dobi x osigurava život, a plaća premiju odjednom i sada. Nadite iznos premije, ako je osigurani iznos 10 000 prvih 20 godina, a 20 000 nakon toga. Osoba takoder dobije i povrat premije (bez kamata) u slučaju smrti u prvih 20 godina. Ako pretpostavimo da se osigurani iznos isplaćuje na kraju godine smrti, nadite odgovarajuću premiju izraženu preko funkcija M i D iz tablica smrtnosti.

Zadatak 3. Duljina života u nekoj populaciji ima funkciju gustoće

$$f(t) = \begin{cases} (2+t^2)/c\,, & t \in [0, 111) \\ 0 & , \text{ inače.} \end{cases}$$

Odredite konstantu $c > 0$, zatim nađite jednokratnu neto premiju uz ove uvjete: intenzitet kamate je konstantan i iznosi $r = 0.2$, osiguranje se isplaćuje u trenutku smrti u iznosu 1 milijun, a osoba kojoj se izdaje osiguranje trenutno je stara 40 godina.

Zadatak 4. Osoba dobi x godina pristupa životnom osiguranju koje
(i) isplaćuje 10 000 nakon 20 godina, ako je osoba živa;
(ii) vraća premiju P na kraju godine smrti, ako osoba umre u prvih 20 godina.
Izrazite premiju P preko D i M te nadite iznos premije iz LAT A 1967-70 za $x = 30$ i e.k.s. $i = 0.04$.

Zadatak 5. Osoba stara 30 godina ugovara osiguranje života. Ako je osigurani iznos 10 000, zakon smrtnosti je određen tablicama LAT A 1967-70 i e.k.s. $i = 0.04$.
a) nađite jednokratnu premiju
b) nađite godišnju neto premiju
c) nađite jednokratnu premiju, ali koristeći tablice s odabirom (select).

Zadatak 6. Neka je L gubitak vezan uz osiguranje života na 2 godine u iznosu 1 plativom na kraju godine smrti. Neto godišnja premije se plaća unaprijed, ali je nepoznata. Ako je $q_x = 0.1$, $q_{x+1} = 0.2$ i $v = 0.9$, nadite $\operatorname{var} L$.

Zadatak 7. Neka je duljina života u nekoj populaciji eksponencijalno distribuirana s parametrom $\lambda = 0.02$. Prepostavite fiksni intenzitet kamate $r = 0.08$, te da se osiguranje života u iznosu 1 isplaćuje u trenutku smrti. Označite sa X sadašnju vrijednost ovog osiguranja za osobu u dobi 20 godina uz osigurani iznos 200000. Za slučajnu varijablu X nadjite realan broj x, t.d. $P(X > x) = P(X < x)$.

Zadatak 8. Osoba stara 65 godina sklapa posebno životno osiguranje rastuće doživotne rente. Renta će se isplaćivati postnumerando godišnje. Iznos prve uplate je 1 000 i svake godine se povećava za 9.62 % iznosa prethodne godine. Odredite neto cijenu ove rente ako su na snazi stope mortaliteta iz LAT A 1967-70 uz efektivnu kamatnu stopu od 14 %.

Zadatak 9. Izračunajte $\ddot{a}_{40}^{(2)}$ i $\ddot{a}_{40:\overline{30}|}^{(2)}$ uz efektivnu kamatnu stopu od 4 %, tablice LAT A 1967-70 za $x = 30$ i pretpostavku (3.3) v. str. 63

Zadatak 10. Osoba stara 40 godina ugovara posebnu odgođenu prenumerando rentu godišnjeg iznosa 1 000 kada navrši 60 godina. Ako osoba umre nakon navršenih 60 godina, ali prije nego joj je uplaćeno ukupno 15 000, razlika se plaća na kraju godine smrti. Izračunajte godišnju neto premiju koristeći LAT A 1967-70 select.

Zadatak 11. Investitor ulaže 4 milijuna sada, kako bi nakon odgode od 2 godine dobivao 1 milijun svake dvije godine prenumerando tokom narednih 20 godina. Postoji mogućnost da investicija propadne uslijed nekog izrazito nepovoljnog slučajnog događaja. Vjerojatnost da se prvi sljedeći takav dogadjaj dogodi u godini k (dakle u periodu $(k-1, k]$) je $(1-p)^{k-1}p,\ k \in \mathbb{N}$, gdje je $p = 0.01$. Nakon takvog događaja prestaju sve isplate investitoru. Da li je investitor mudro uložio svoj novac ako je efektivna kamatna stopa 6%? Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 12. Ako je ${}_{10}V_{25} = 0.1$ i ${}_{10}V_{35} = 0.2$, odredite ${}_{20}V_{25}$.

Zadatak 13. Pretpostavimo da osoba starosti 35 godina kupuje životnu rentu u iznosu 1 godišnje uz odgodu od 20 godina. Neka je $i = 0.04$ i neka se neto premija plaća godišnje kroz 20 godina. Koristeći LAT A 1967-70 ultimate, nađite neto premijsku rezervu na kraju 10. godine.

Zadatak 14. Osoba ima 30 godina i ugovara mješovito osiguranje uz $n = 25$. Osigurani iznos je 5 000 za smrt i 10 000 za doživljenje. Ako je premija neto godišnja, nađite neto premijsku rezervu nakon 10. godine koristeći LAT A 1967-70 ultimate.

Zadatak 15. Osoba u dobi 42 godine želi osigurati životnu rentu, koju će primati u iznosima od 8000 prenumerando, ali odgođenu za 23 godine. Premiju će plaćati godišnje u neto iznosu tokom prvih 18 godina. Nađite neto premijsku rezervu na kraju 10. i na kraju 30. godine (koristite LAT A 1967-70 (ultimate)).

Zadatak 16. Pretpostavimo da osoba starosti 70 godina sklapa policu mješovitog osiguranja i da premiju plaća godišnje. Neka je zadana efektivna kamatna stopa $i = 0.05$, te brojevi $q_{70} = 0.10$ i $q_{71} = 0.11$. Nađite neto premijsku rezervu na kraju druge godine ako polica traje 3 godine.

Bibliografija

[1] Brigham, E.F. i M. Ehrhardt (2005) *Financial Management Theory and Practice.* Thomson.

[2] Gerber, H. U. (1995).*Life Insurance Mathematics.* Springer, Berlin Heidelberg.

[3] Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries. (1975). *A1967-1970 Tables for Assured Lives.* Oxford.

[4] Sarapa, N. (2003). *Teorija vjerojatnosti.* Školska knjiga, Zagreb.